21世纪高校规划教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

(理工类)

主编　欧阳长城

江西高校出版社

GAODENGSHUXUE

21 世纪高校规划教材

高等数学

（理工类）

主　编　欧阳长城
副主编　邓安生　陈裕先　杨　俊
编　委　（按姓氏笔划为序）
邓安生　王茶生　杨　俊　张春生
陈裕先　聂红隆　谢　芳　欧阳长城

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/欧阳长城主编 .—南昌:江西高校出版社,2004.8

ISBN 7-81075-441-6

Ⅰ.高… Ⅱ.欧… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063766 号

江西高校出版社出版发行

(江西省南昌市洪都北大道 96 号)

邮编:330046 电话:(0791)8592235、8504319

江西太元科技有限公司照排部照排

江西教育印刷厂印刷

各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 22.375 印张 560 千字

印数:1~2000 册

定价:33.50 元

前　言

在改革开放不断深入的当今,高等教育事业发展迅猛,高校各专业及其学科的建设与教学如何跟上和适应形势发展的需要,教材建设至关重要。在江西省教育厅的统一组织下,根据原国家教委颁布的高等工程专科《高等数学》课程的教学基本要求,我们组织编写了以大学专科学校及高等职业技术学院理工类学生为主要对象的《高等数学》(理工类)这套教材。在编写过程中我们注重了以下几个方面:

1. 全国各高校扩招以后,大专层次理工类新生的知识水平较之扩招前普遍有所降低,因此,教材内容的整体要求及其各知识点的难度均应降低。

2. 考虑到高职、高专理工类的教学要求及其特点,旨在重视和突出实用性,因此在内容的深度上,对一些繁杂的理论推导能省略则尽量省略。

3. 在内容的编排上,注意与新编全国统编中学数学教材知识点的衔接,且力求做到详略合理、增删有据。

4. 在注重培养学生的应用能力和计算能力的同时,通过举例与提出一些问题,适时地加以引导、归纳和比较,从而加深学生对知识的理解。

本套教材的总教学时数为216学时。

本书除适用大学专科及高等职业技术学院理工类学校的教学需要之外,亦可供各类成人教育、函授等大专层次理工类各专业使用。

注有“*”号的章节及其内容可作为选学内容。

参加本书编写的教师是:王荼生(第一、二、三章)、谢芳(第四、五章)、聂红隆(第六、十三章)、陈裕先(第七、八章)、杨俊(第九章)、欧阳长城(第十、十一、十二章)、张春生(第十四、十五章)、邓安生(第十六、十七章)。

本书的编写,得到了江西财经大学梅国平博士的指导以及有关院校领导的支持与帮助,在此谨致谢意!

由于编者水平有限,难免存在缺点和谬误,敬请批评指正。

编者

2003年7月26日

目　　录

第一章　函数与极限

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象，是高等数学中最重要的概念之一．极限是高等数学的基本概念，是微积分学的理论基础．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

§1　函　　数

一、函数的概念

定义 1　设给定非空数集 D，如果按照某个对应法则，对于 D 中的每一个数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y = f(x)$．

数集 D 叫做函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 取数值 $x_0 \in D$，按照确定的对应法则 f 所得的 y_0 称为函数 f 在 x_0 处的函数值，记作 $y_0 = f(x_0)$．当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集为：

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域．

定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素．

通常函数有三种表示法：解析法、表格法和图象法．

在实际问题中，有时一个函数在定义域的不同范围内可用不同的解析式表示，我们称这样的函数为分段函数．

例 1　定义在 $[0,1]$ 上的狄利克雷(Dirichlet) 函数．

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

例 2　定义在 $[0,1]$ 上的黎曼(Riemann) 函数．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{当 } x = \dfrac{p}{q}\,(p\text{、}q \text{ 为正整数}, p\text{、}q \text{ 互质}), \\ 0, \text{当 } x = 0\text{、}1 \text{ 及无理数}. \end{cases}$$

例 3　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为 $[x]$，这样建立的也是一个分段函数，称为取整函数，记作 $y = [x]$，例如，$[\frac{3}{8}] = 0, [-\sqrt{3}] = -2, [e] = 2, [3] = 3$，它的图形如图 1－1．

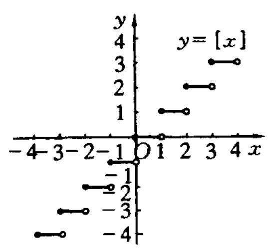

图 1－1

二、函数的几种特性

1．函数的奇偶性

定义 2　设函数 $y = f(x), x \in D$，其中 D 为对称于原点的数集(即当 $x \in D$ 时，则必有 $-x \in D$)．如果对于任意 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数．

由定义可知：函数 $y = x^3$ 和 $y = \tan x$ 都是奇函数．奇函数的图象关于原点对称(图 1－2)．函数 $y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 都是偶函数．偶函数的图象关于 y 轴对称(图 1－3)，而 $y = \sin x$

$+\cos x$ 是非奇非偶函数.

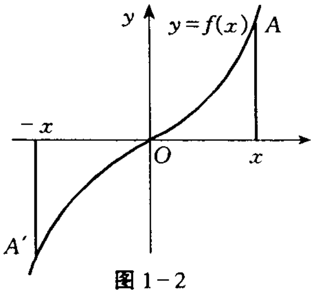

图 1－2

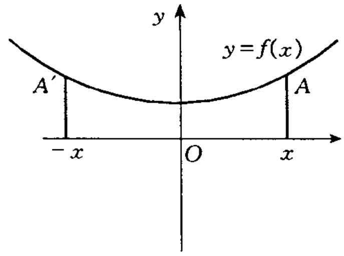

图 1－3

2．函数的单调性

定义 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的，I 叫做单调增区间(图 1－4)；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的，I 叫做单调减区间(图 1－5)．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调增区间和单调减区间统称为单调区间．

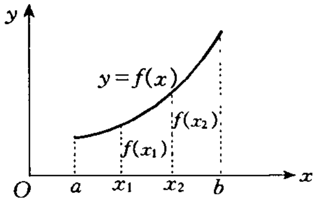

图 1－4

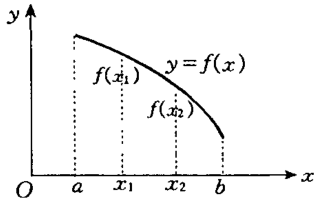

图 1－5

例 4 函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的．$(-\infty,0]$ 和 $[0,+\infty)$ 是它的单调区间，但在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数不是单调的．

3．函数的有界性

定义 4 设 $f(x)$ 是定义在数集 D 上的函数，若存在正数 M，使得对于一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，也称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数，否则称 $f(x)$ 为 D 上的无界函数．

例 5 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 在整个数轴上是有界的．函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界，但在区间 $(0,1)$ 内有界．

4．函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期函数的周期是指函数的最小正周期．

例 6 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数．

三、反函数

定义 6 设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 W，若对于数集 W 中的每个数 y，数集 D 中都有惟一的一个数 x 使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D，函数 $y=f(x)$ 与 $x=$

$f^{-1}(y)$ 二者的图象是相同的.

由于我们习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,而将函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 用 $y = f^{-1}(x)$ 表示.

如将函数 $y = f(x)$ 和反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象画在同一坐标平面上,则这两个图象关于直线 $y = x$ 是对称的(图 1 - 6).

由函数 $y = f(x)$ 求它的反函数的步骤是:由方程 $y = f(x)$ 解出 x,得到 $x = f^{-1}(y)$,将函数 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 分别换成 y 和 x,这样得到反函数 $y = f^{-1}(x)$,并须注明反函数的定义域.

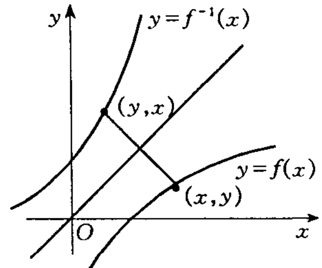

图 1-6

例 7 求函数 $y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ 反函数.

解 由 $y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ 可解得 $x = \ln(\dfrac{y}{1 - y})$,交换 x,y 的位置,即得所求的反函数 $y = \ln(\dfrac{x}{1 - x})$,其定义域为(0,1).

由定义还可以看出,严格单调函数必有反函数.

例 8 函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上没有反函数,但是函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格递增的,其值域为 $[0, +\infty)$,它的反函数是 $y = \sqrt{x}$,其定义域为 $[0, +\infty)$,值域为 $[0, +\infty)$. 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是严格递减的,其值域为 $[0, +\infty)$,它也有反函数 $y = -\sqrt{x}$,其定义域为 $[0, +\infty)$,值域为 $(-\infty, 0]$.

四、初等函数

1. 基本初等函数

我们在中学学习过的常数函数 $y = c$(c 为常数),幂函数 $y = x^\alpha$(α 为实数),指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$,对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$,三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$,反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数. 它们的图形和性质在这里就不作介绍了.

2. 复合函数

在实际问题中,常会遇到由几个较简单的函数组成较为复杂的函数. 例如,自由落体运动的动能 E 是速度 v 的函数

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \tag{1.1}$$

而速度 v 又是时间 t 的函数

$$v = gt \tag{1.2}$$

因此,若要研究作自由落体运动的物体的动能 E 与时间 t 的关系,就要把表达式 $v = gt$ 代入 $E = \frac{1}{2} m v^2$,这样我们就得到了由函数(1.1)和(1.2)复合而成的函数 $E = \frac{1}{2} m (gt)^2$,称为复合函数.

定义 7 设 $y = f(u)$,定义域为 U_1,函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 U_2,且 $U_2 \subseteq U_1$,那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数,我们称 y 为 x 的复合函数,记为 $y = f[\varphi(x)], x \in U_2$,其中 $y = f(u)$ 叫做外函数,$u = \varphi(x)$ 叫做内函数,u 叫做中间变量.

由复合函数的定义可知,函数 f 和 φ 能否构成复合函数的关键是内函数的值域一定要落在外函数的定义域中.

例 9 $y = f(u) = \sqrt{u}$,定义域 $D_f = [0, +\infty)$,

$u = \varphi(x) = 1 - x^2$,定义域 $D_\varphi = (-\infty, +\infty)$.

由于 $u = \varphi(x)$ 的值域 $R_\varphi = (-\infty, 1] \not\subset D_f$,故不能把中间变量代入,但如果为了要使复合函数有意义,必须把 R_φ 限制在$[0,1]$,为此必须限制 φ 的定义域为$[-1,1]$,此时 $R_\varphi \subset D_f$,于是得复合函数 $y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1,1]$.

复合函数也可由多个函数相继进行有限次复合而成.例如,$y = \ln\sqrt{3 + 2x^2}$ 就是由 $y = \ln u, u = \sqrt{v}, v = 3 + 2x^2$ 三个函数复合而成的.

3. 初等函数

定义 8 基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的且只用一个解析式表示的函数,叫做初等函数.例如,

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), y = 2x3^{\sqrt{1+x^2}} + 5$$

等等,都是初等函数.

凡不是初等函数皆称为非初等函数,如狄利克雷函数与黎曼函数都是非初等函数.

4. 双曲函数

在工程技术中常用到的双曲函数是

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$(图 1 - 7),

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$(图 1 - 8),

双曲正切函数 $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$(图 1 - 9).

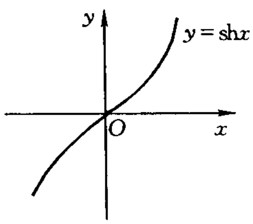

图 1 - 7

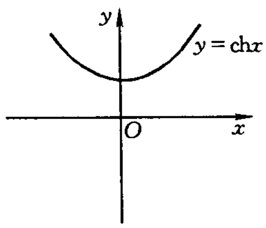

图 1 - 8

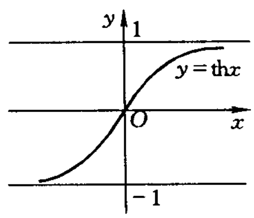

图 1 - 9

由双曲函数的定义,可以得到类似三角函数的一些简单性质:

(1) $\mathrm{sh}0 = 0, \mathrm{ch}0 = 1$;

(2) $\mathrm{sh}x$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数,$\mathrm{ch}x$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数;

(3) $\mathrm{sh}x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格递增函数, $\mathrm{ch}x$ 在$(-\infty, 0]$ 上是严格递减函数,在$[0, +\infty)$ 上是严格递增函数;

(4) $\mathrm{sh}x$ 和 $\mathrm{ch}x$ 满足关系式

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \mathrm{sh}2x = 2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x, \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$.

§2 数列的极限

按一定规律排列的一串数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为数列，简记作$\{x_n\}$.数列也可看作是定义在正整数集合上的函数

$$x_n = f(n) \quad (n = 1,2,\cdots)$$

x_n 称为数列的通项或一般项.

现在我们要研究的问题是：给定一个数列$\{x_n\}$，当项数 n 无限增大时，通项 x_n 的变化趋势是什么？

例 1　数列 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$

数列的通项为 $x_n = \frac{n+1}{n}$，当 n 无限增大时，$n+1$ 与 n 无限接近，x_n 趋向于确定的常数 1.

例 2　数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$

数列的通项为 $x_n = (-1)^{n+1}$，当 n 无限增大时，x_n 总在 1 和 -1 两个数值上跳跃，永远不会趋于一个固定的数.

例 3　数列 $2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$

数列的通项为 $x_n = 2n$，当 n 无限增大时，数列的通项 x_n 将随着 n 的增大而增至任意大.

上述三个数列，当 n 无限增大时的变化趋势各不相同，如果数列中 x_n 随着 n 的无限增大而趋于某一个确定的常数，我们就认为该数列以这个常数为极限.

定义 1　如当 n 无限增大时，数列$\{x_n\}$的通项 x_n 的值无限接近于一个确定的常数，则称当 n 趋于无穷大时，数列$\{x_n\}$以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A(n \to \infty)$$

如果一个数列有极限 A，我们就称这个数列是收敛数列，也称数列收敛于 A.否则就称它是发散数列.

由定义知，例 1 中的数列$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$是收敛的且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$.而例 2 和例 3 中的数列$\{(-1)^{n+1}\}$、$\{2n\}$都是发散的.

发散数列没有极限.

例 4　观察下列数列的变化趋势，并写出收敛数列的极限.

(1)$\{x_n\} = \left\{3 - \frac{1}{n^2}\right\}$；　(2)$\{x_n\} = \{-2\}$；　(3)$\{x_n\} = \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$.

解　(1) 当 n 依次取 $1,2,3,4,5,\cdots$ 等正整数时，数列$\left\{3 - \frac{1}{n^2}\right\}$的各项依次为

$$2,\frac{11}{4},\frac{26}{9},\frac{47}{16},\frac{74}{25},\cdots$$

从上面式子可看出，当 $n\to\infty$，$3 - \frac{1}{n^2} \to 3$，故有

$$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3.$$

(2) 这个数列的各项都是 -2，故有

$$\lim_{n\to\infty}(-2) = -2.$$

一般地，任何一个常数列$\{C\}$的极限就是这个常数本身，亦即

$$\lim_{n\to\infty} C = C(C \text{ 为常数}).$$

(3) 当 n 依次取 1,2,3,4,5,⋯ 等正整数时,数列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ 的各项依次为

$$1,0,-1,0,1,\cdots$$

从上式可以看出,当 $n\to\infty$ 时,$\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ 不能无限地趋近于一确定的常数 A. 因此数列 $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ 的极限不存在,即数列发散.

下面,我们不加证明地指出数列的一些重要性质.

定理 1.1　如果一个数列有极限,则此极限是唯一的.

定理 1.2　将一个数列添加或减少有限项,不影响其极限是否存在,也不影响其极限值(如果极限存在). 例如数列:

$$100,200,5000,2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots$$

$$\frac{11}{10},\frac{12}{11},\frac{13}{12},\frac{14}{13},\cdots$$

与数列 $\{\frac{n+1}{n}\}$ 一样都是极限为 1 的数列.

定理 1.3　有极限的数列一定有界,但有界数列不一定有极限.

例如数列 $\{\frac{n+1}{n}\}$, $\{(-1)^{n+1}\}$, $\{3-\frac{1}{n^2}\}$, $\{\sin\frac{n\pi}{2}\}$ 都是有界的,而数列 $\{2n\}$ 是无界的,从这些例子还可看出,有界数列不一定有极限,但是可以证明,有极限的数列必有界.

定理 1.4　单调有界数列必有极限.

利用定理 1.4 可以证明重要数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 收敛(证明从略),我们把它的极限记为 e,即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$$

其中 e 是介于 2 和 3 之间的一个无理数,它的值为 $e=2.718281828459\cdots$

定理 1.5　数列极限的四则运算法则

假定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n)=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$(若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$).

例 5　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n+3}{7n^2+3n-4}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+3}{7n^2+3n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-5\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}{7+3\frac{1}{n}-4\frac{1}{n^2}}=\frac{2-0+0}{7+0-0}=\frac{2}{7}.$$

例 6　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解　由 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

§3　函数的极限

对于函数的极限,根据自变量的变化过程分为以下两种情形:

一、$x\to\infty$ 时函数的极限

先看一个例子.

当 $|x|$ 无限增大(或称 x 趋向于无穷大,记作 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 无限地接近于0(图1-10).和数列极限一样,称常数0为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

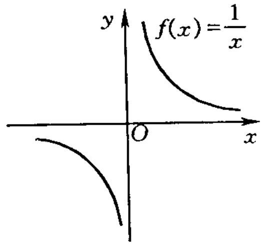

图1-10

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

定义1　设函数 $y=f(x)$,如果 $|x|$ 无限增大时,函数 $f(x)$ 无限趋近于某个固定的常数 A,则称当 x 趋于无穷大时,$f(x)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\text{ 或者 }f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

如果当 $x>0$,且 $|x|$ 无限增大,则可记 $x\to+\infty$;如果当 $x<0$,且 $|x|$ 无限增大,则可记 $x\to-\infty$.

定义2　设函数 $y=f(x)$,如果当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于某个固定的常数 A,则称当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时,$f(x)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A)$$

例如,由图1-11可以看出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$.

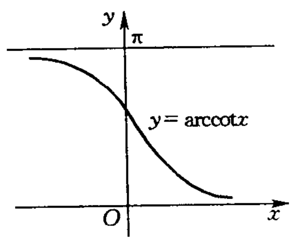

图1-11

由定义1可以得出,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

对于上面的函数 $f(x)=\operatorname{arccot}x$,由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

二、$x\to x_0$ 时函数的极限

例1　讨论当 $x\to1$ 时,函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

解　此函数在 $x=1$ 处无定义,但是当 $x\neq1$ 时,$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$,由图1-12不难看出,当 $x\to1(x\neq1)$ 时,函数 $f(x)$ 趋于2,我们称当 $x\to1$ 时,$f(x)$ 以2为极限.

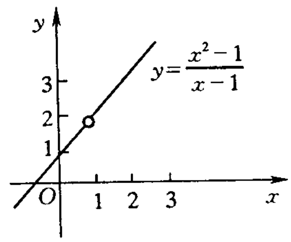

图1-12

一般地,我们给出如下关于函数 $f(x)$ 极限的定义:

定义3　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近(点 x_0 可以除外)有定义,如当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$.则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{,或者 }f(x)\to A(x\to x_0)$$

若自变量 x 趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 没有一个固定的变化趋势,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有极限.

如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时,极限不存在(见图 1-10).

上述 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限概念中,x 是既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 但有时只考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0(即 $x<x_0$,记作 $x\to x_0^-$)的情形. 或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0(即 $x>x_0$,记作 $x\to x_0^+$)的情形. 这就产生了左极限和右极限的概念.

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域内有定义,若当 x 从 x_0 的左(右)侧趋于 x_0 时,$f(x)$ 趋于 A,则称 $f(x)$ 当 x 从 x_0 的左(右)侧趋于 x_0 时收敛于 A,且称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左(右)极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\quad\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right)$$

或 $f(x_0-0)=A$ $(f(x_0+0)=A)$

由定义 3、定义 4 不难得出如下结论:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 2 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$

讨论当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是否存在极限

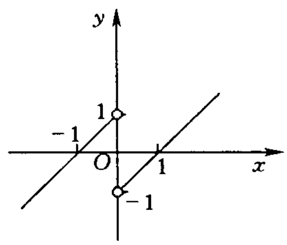

图 1-13

解 作函数的图象(图 1-13),根据单侧极限的定义可得:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 故当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 的极限不存在.

三、极限的运算法则

定理 1.6 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则有如下的运算法则:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=kA$ (k 为常数);

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)/\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A/B$ $(B\neq 0)$.

其中法则(1)、(3)还可以推广到有限个具有极限的函数的和与积的情况,上述极限法则对于 $x\to\infty$ 的情形也都是成立的.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$.

解 因为分母的极限为 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}4=2^2-4=0$,所以不能直接应用四则运算法则,但在 $x\to 2$ 的过程中,允许 $x\neq 2$,因此可约去分子分母的公因式再求极限,则得

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-3}{3x^2-5x+2}$.

解　先用 x^2 除分子与分母，再求极限得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-3}{3x^2-5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$（其中 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m、n 各为正整数）.

解　当 $n\to\infty$ 时，分子分母的极限都不存在，所以不能直接应用极限运算法则，现将 x^m 同除分子和分母可将分式变形得：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\cdots+a_n\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\cdots+b_m\dfrac{1}{x^m}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\ (\text{发散}).\end{cases}$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解　当 $x\to 1$ 时，上式两项均为无穷大，所以不能用差的运算法则，此时可先通分，再求极限

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{(1+x)(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}.$$

四、函数极限存在的判别法，两个重要极限

定理 1.7　（追敛定理）设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内（x_0 可除外）满足条件 $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

例 7　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n!}{n+2}$.

解　由于 $0\leqslant\left|\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n!}{n+2}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+2}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{-\frac{2}{3}}}{1+\dfrac{2}{n}}=0$.

由追敛定理，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}\sin n!}{n+2}=0$.

利用函数极限的追敛定理可以证明两个重要极限.

定理 1.8　极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

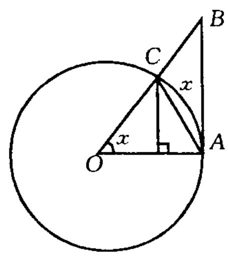

图 1－14

证　如图 1－14 作一单位圆. 设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，由中学平面几何知识可知，扇形 OAC 必大于三角形 OAC，又小于三角形 OAB 的面积，从而有

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即　$\sin x<x<\tan x$. 用 $\sin x$ 除上式，得 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$，或 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$ (1.3)