大学数学课程与教学研究丛书

复变函数

FUBIAN HANSHU

林长胜 / 编著

FB
HS

四川大学出版社

复变函数

FUBIAN HANSHU

林长胜 / 编著

四川大学出版社

责任编辑:王　锋
责任校对:李桂兰
封面设计:罗　光
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

复变函数／林长胜编著．—成都：四川大学出版社，2004.12
(大学数学课程与教学研究丛书／赵焕光,林长胜主编)
ISBN 7-5614-2966-5

Ⅰ.复…　Ⅱ.林…　Ⅲ.复变函数-教学研究-高等学校　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 119179 号

书　名　复变函数

编 著	林长胜
出 版	四川大学出版社
地 址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发 行	四川大学出版社
印 刷	华西医科大学印刷厂
开 本	850mm×1168mm　1/32
印 张	6.625
字 数	160 千字
版 次	2004 年 12 月第 1 版
印 次	2005 年 3 月第 2 次印刷
印 数	1 001～3 000 册
定 价	20.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

复变函数的研究始于18世纪，法国数学家达朗贝尔在他的一篇流体力学论文中首先涉及了对复函数的研究. 瑞士大数学家欧拉从1776年到1783年，写出了一系列论文，讨论如何利用复函数去计算实积分的值. 法国数学家拉普拉斯在从1782年到1812年发表的一系列论文中，也像欧拉一样，通过把实积分转换为复积分的途径来计算实积分. 在他们的工作中有一个本质的局限，即依靠把$f(x+\mathrm{i}y)$的实虚部分开来进行讨论，因此他们的工作还不足以说明复变函数作为一门学科的诞生，但数学史上通常把他们三人称作是复变函数论的前驱.

19世纪是复变函数论全面兴起并创立的时期. 柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯是复变函数论的三个主要奠基人. 他们三人分别从分析的角度(微分和积分)、几何的角度(保形映射)、算术的角度(幂级数)对复变函数进行研究. 是他们杰出的工作汇集在一起，才使得复变函数论成为一个重要的数学分支.

20世纪是复变函数论大发展的时期. 复变函数论随着它的研究领域不断扩大而发展成为一门内容极为丰富、应用极为广泛的庞大数学学科. 复变函数的研究在其解析性质、映射性质、多值性质、函数空间以及多复变诸多方面，都取得了重要的成果. 这些问题中，有些是在复变函数论本身发展中提出的，有些是由实际问题或其他学科提出的.

从理论体系上来说，复变函数是在充分运用数学分析知识的前提下，把有关实函数的连续、微分、积分、级数等理论延续拓广到复函数情形. 然而这种延拓并非简单的平移，而是根据复数的特性，以及在此情形下出现的新问题(诸如复数辐角的多值性，解析函数实虚部的相互制约性，解析变换的保角性等)，经过严密系统的讨论研究，建立起自身的理论体系，创立了复变函数独特的思想方法，得到了一些在实函数情形下所没有的新结果(如解析函数的无穷可微性，解析函数零点的孤立性，非常数整函数的无界性等). 这些理论反过来又为解决实分析中的某些问题提供了有力的工具(如实积分的计算，幂级数收敛半径与奇点分布的关系，函数零点的分布等). 在其他数学分支中(如数论、代数、方程、概率论等)，复变函数论也是常用的重要工具.

在应用方面，复变函数已被广泛应用于物理学、天文学的研究，而它在流体力学、电学、机翼理论方面的应用，更是直接体现了复变函数论方法在解决实际问题中的重要性. 由此可见，复变函数论不仅是提高学生数学素质的基础性课程，而且是解决实际问题的一门应用性课程.

复变函数的基本理论和方法，通常包括以下四个方面：

(1)解析函数概念与C－R条件，包括解析性条件，初等解析函数及其基本性质.

(2)柯西积分理论，包括柯西积分定理，柯西积分公式(解析函数及其各阶导数的积分表示)，解析函数的无穷可微性，最大模原理.

(3)魏尔斯特拉斯级数理论，包括解析函数的(双边)幂级数展开，唯一性定理，孤立奇点特征理论，残数理论.

(4)黎曼保形变换理论，包括解析变换的保形性，线性变换及其性质，区域之间保形变换的存在性与唯一性，边界对应原理.

其中第一部分是基础性知识，其余三部分是从各个不同的角度讨论解析函数的性质及其应用，它们各具特色又有密切联系，由此构成了复分析的理论框架. 在编写本书时，我们尽可能地让这一框架变得清晰，以利于读者掌握复变函数理论的思维特征和基本方法.

林长胜

2004 年 9 月于温州

目　　录

第 1 章　复数与复变函数……………………………… 1
1.1　复　数 ……………………………………………… 1
1.1.1　复数的概念与运算 ……………………………… 1
1.1.2　复数的几何意义 ………………………………… 2
1.1.3　复数的模与辐角 ………………………………… 4
1.1.4　复数的各种表示 ………………………………… 4
1.1.5　复数的乘幂与方根 ……………………………… 5
1.1.6　范　例 …………………………………………… 6
1.1.7　问题与探索 ……………………………………… 7
1.2　复平面上的点集 …………………………………… 9
1.2.1　平面点集的基本概念 …………………………… 9
1.2.2　复平面上的曲线 ………………………………… 10
1.2.3　区域的连通性 …………………………………… 11
1.2.4　点列及其收敛性 ………………………………… 11
1.2.5　范　例 …………………………………………… 11
1.2.6　问题与探索 ……………………………………… 13
1.3　无穷远点与复球面 ………………………………… 13
1.3.1　概念的引入 ……………………………………… 14
1.3.2　关于 $\mathbf{C}_\infty$ 的若干注释 ………………………… 14
1.3.3　问题与探索 ……………………………………… 15
1.4　复变函数 …………………………………………… 15
1.4.1　复变函数的概念 ………………………………… 16
1.4.2　复变函数的表示方法 …………………………… 16

1.4.3 极限与连续 …… 17
1.4.4 范 例 …… 18
1.4.5 问题与探索 …… 18
1.5 背景与历史注记 …… 19

第2章 解析函数 …… 23
2.1 解析函数概念与C—R条件 …… 23
2.1.1 基本概念 …… 23
2.1.2 柯西—黎曼（Cauchy—Reimann）条件 …… 24
2.1.3 范 例 …… 26
2.1.4 问题与探索 …… 27
2.2 初等单值解析函数 …… 28
2.2.1 正整次幂函数 $\omega=z^n$（n 为正整数） …… 28
2.2.2 指数函数 $\omega=e^z$ …… 29
2.2.3 三角函数 …… 29
2.2.4 范 例 …… 30
2.2.5 问题与探索 …… 31
2.3 初等多值函数 …… 32
2.3.1 辐角函数 $\omega=\mathrm{Arg}z$（$z\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$） …… 32
2.3.2 对数函数 …… 34
2.3.3 幂函数 …… 36
2.3.4 一般指数函数和反三角函数 …… 38
2.3.5 范 例 …… 38
2.3.6 问题与探索 …… 40
2.4 背景与历史注记 …… 41

第3章 复变函数积分 …… 46
3.1 复积分概念与性质 …… 46

3.1.1 复积分概念 …………………………………… 46
3.1.2 复积分的存在性与计算方法 ……………… 47
3.1.3 复积分的性质 ……………………………… 47
3.1.4 范　例 ……………………………………… 48
3.1.5 问题与探索 ………………………………… 50
3.2 柯西积分定理 ………………………………… 51
3.2.1 定理的建立 ………………………………… 51
3.2.2 柯西定理的推广 …………………………… 52
3.2.3 原函数的存在性及其表示 ………………… 53
3.2.4 范　例 ……………………………………… 53
3.2.5 问题与探索 ………………………………… 54
3.3 柯西积分公式 ………………………………… 55
3.3.1 公式的引入 ………………………………… 56
3.3.2 公式的应用 ………………………………… 56
3.3.3 解析函数与调和函数的关系 ……………… 59
3.3.4 范　例 ……………………………………… 60
3.3.5 问题与探索 ………………………………… 62
3.4 背景与历史注记 ……………………………… 63

第4章 复级数理论 ……………………………… 68
4.1 复级数概念和性质 …………………………… 68
4.1.1 数项级数及其敛散性 ……………………… 68
4.1.2 函数项级数及其一致收敛性 ……………… 69
4.1.3 幂级数 ……………………………………… 71
4.1.4 范　例 ……………………………………… 72
4.1.5 问题与探索 ………………………………… 73
4.2 解析函数的泰勒展式与唯一性定理 ………… 74
4.2.1 泰勒（Taylor）定理 ……………………… 74

4.2.2 零点及其阶 ………………………………… 76
4.2.3 唯一性定理 ………………………………… 76
4.2.4 范 例 ………………………………… 77
4.2.5 问题与探索 ………………………………… 79
4.3 解析函数的罗朗展式与孤立奇点 ………………… 80
4.3.1 双边幂级数及其性质 ……………………… 81
4.3.2 罗朗定理 ………………………………… 82
4.3.3 孤立奇点及其类型分析 …………………… 83
4.3.4 范 例 ………………………………… 86
4.3.5 问题与探索 ………………………………… 88
4.4 整函数与亚纯函数 ………………………………… 89
4.4.1 解析函数在点∞的性质 …………………… 89
4.4.2 整函数及其分类 …………………………… 91
4.4.3 亚纯函数及其类型 ………………………… 91
4.4.4 范 例 ………………………………… 92
4.4.5 问题与探索 ………………………………… 94
4.5 背景与历史注记 ………………………………… 95

第5章 残数理论及其应用 ………………………………… 99
5.1 残 数 ………………………………………… 99
5.1.1 残数概念及残数定理 ……………………… 99
5.1.2 残数的计算 ………………………………… 101
5.1.3 无穷远点的残数 …………………………… 102
5.1.4 范 例 ………………………………… 103
5.1.5 问题与探索 ………………………………… 105
5.2 应用残数计算实积分 ……………………………… 107
5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$ 型积分 ……………… 107

5.2.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ 型积分 …… 108
5.2.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$ 型积分 …… 108
5.2.4 范　例 …… 109
5.2.5 问题与探索 …… 113
5.3 辐角原理与儒歇定理 …… 114
5.3.1 辐角原理 …… 114
5.3.2 儒歇定理及其应用 …… 116
5.3.3 范　例 …… 118
5.3.4 问题与探索 …… 120
5.4 背景与历史注记 …… 121

第 6 章　保形变换 …… 124
6.1 解析变换的几何特性与保形变换概念 …… 124
6.1.1 解析变换的若干性质 …… 124
6.1.2 导数的几何意义与保形变换概念 …… 126
6.1.3 范　例 …… 128
6.1.4 问题与探索 …… 130
6.2 线性变换 …… 131
6.2.1 线性变换及其分解 …… 131
6.2.2 线性变换的四个保持性质 …… 133
6.2.3 三个重要的线性变换 …… 136
6.2.4 范　例 …… 138
6.2.5 问题与探索 …… 140
6.3 若干初等变换及其应用 …… 141
6.3.1 初等函数构成的保形变换 …… 142
6.3.2 初等变换的应用举例 …… 143

6.3.3 问题与探索 …………………………………… 145
6.4 黎曼存在定理与边界对应定理 …………………… 146
6.4.1 黎曼存在及唯一性定理 ………………………… 146
6.4.2 边界对应定理 …………………………………… 147
6.5 背景与历史注记 …………………………………… 149

附录 问题与探索参考解答…………………………………… 153
参考文献…………………………………………………… 197

第 1 章　复数与复变函数

复变函数论是在复数范围内讨论函数的分析性质，即复数域上的微积分. 于是，我们面临的首要问题就是：什么是复数？复数具有怎样的运算和性质？本章首先讨论这些问题，并在此基础上引进复变函数及其连续性的概念. 虽然其中的不少内容在中学里已经学过，或是实分析的平行推广，但通过系统地回顾予以深化提高，或以复数的观点予以重新表述，意在勾勒出讨论复数问题的思维特征，这对于以后的学习十分重要.

1.1　复　数

本节要对中学里所学的复数知识予以系统地回顾，主要内容有复数(域)及其几何意义，复数的各种表示和运算.

1.1.1　复数的概念与运算

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数，称为复数，其中 i(也记作 $\sqrt{-1}$)满足条件：$\mathrm{i}^2=-1$，称为虚数单位；x，y 都是实数，分别称为复数 z 的实部和虚部，并记作 $x=\mathrm{Re}\, z$，$y=\mathrm{Im}\, z$.

当 $\mathrm{Im}\, z=0$ 时，称 $z=x$ 为实数；当 $\mathrm{Im}\, z\neq 0$ 时，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为虚数；当 $\mathrm{Re}\, z=0$，$\mathrm{Im}\, z\neq 0$ 时，称 $z=\mathrm{i}y$ 为纯虚数. 特别把复数零记为 $0=0+\mathrm{i}0$.

两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 因此，

一个复数实质上是由一对有序的实数唯一确定.

对 $z=x+\mathrm{i}y$，记 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y=x+\mathrm{i}(-y)$，称为 z 的共轭复数. 显然$\overline{\overline{z}}=z$，即 z 与$\overline{z}$互为共轭复数.

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，它们的四则运算定义为：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

当 $z_2\neq 0$ 时，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

易知，引入上述四则运算后，全体复数组成一个域，称为复数域，记为 **C**.

注 显然，作为一个域来说，**C** 不是有序域，从而任意两个复数不能像实数那样比较大小. 因此，复数之间没有大小(序)关系.

又由四则运算的定义容易得到：

$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

$\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$，$\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

1.1.2 复数的几何意义

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数(x, y)唯一确定，这使我们很自然地联想到它与平面上点的关系. 给定一个平面直角坐标系 XOY，我们用横坐标为 x，纵坐标为 y 的点 $p(x, y)$表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，显然，这是一一对应关系(可以证明这是一个域同构). 因此，复数也可看成是平面上的点，复数全体构成了整个平面，称这样的平面为复平面，仍记作 **C**. 其中横轴称为实轴，纵轴称为虚轴.

点 $p(x, y)$也可以看作是向量$\overrightarrow{op}$，所以复数也与平面上的向

量构成一一对应(复数零对应零向量，向量$\overrightarrow{op}$平移所得的向量都被视为同一复数$z=x+\mathrm{i}y$).

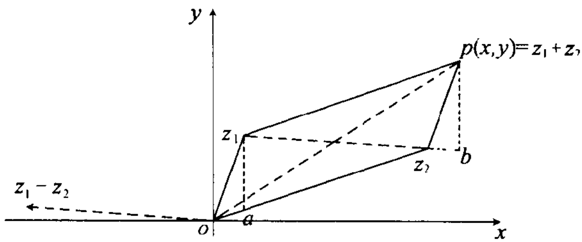

图1—1

设$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，向量$\overrightarrow{oz_1}$与$\overrightarrow{oz_2}$互不平行，如图1—1所示，作出以$\overrightarrow{oz_1}$，$\overrightarrow{oz_2}$为邻边的平行四边形$\square z_1oz_2p$. 由于$\triangle oaz_1\cong\triangle z_2bp$，所以$x=x_1+x_2$，$y=y_1+y_2$，即对角线$\overrightarrow{op}$的终点所表示的复数为$z_1+z_2$，用向量表示就是$\overrightarrow{op}=z_1+z_2$.

我们也可以用另一种方法作出z_1+z_2. 注意到$\overrightarrow{z_2p}=\overrightarrow{oz_1}=z_1$，所以只要从$\overrightarrow{oz_2}$的终点出发作与$\overrightarrow{oz_1}$相等的向量，则得到的终点就是$z_1+z_2$. 显然，当$\overrightarrow{oz_1}/\!/\overrightarrow{oz_2}$时，这一方法也是正确的.

由于$z_1=(z_1-z_2)+z_2$，故按上述方法即知对角线向量$\overrightarrow{z_2z_1}$所表示的复数就是z_1-z_2.

因此，按向量观点，$z_1\pm z_2$就是以$\overrightarrow{oz_1}$，$\overrightarrow{oz_2}$为邻边的平行四边形的两条对角线向量，其中从原点出发的对角线向量表示复数z_1+z_2，从z_2出发的对角线向量表示复数z_1-z_2.

以上我们说明了复数和、差的几何意义. 由此可知，建立了复数与平面向量之间的对应关系后，复数的加减法与向量的加减法能够保持一致.

复数几何意义的建立，使复数的实际意义更加明确(事实上，复数的加减法与力的合成和分解是一致的)，并使复数在几何学、三角学中发挥了重要作用.

注 因为把由$\overrightarrow{op}$平移所得的向量都看作是同一向量，所以向量$\overrightarrow{AB}$所表示的复数与其终点 B 所表示的复数一般是不同的. 当且仅当起点 A 为原点时，两者所表示的复数才一致.

1.1.3 复数的模与辐角

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 对应于向量$\overrightarrow{oz}$，我们把$\overrightarrow{oz}$的长度称为 z 的模，记为$|z|$，显然$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. 当 $z\neq 0$ 时，我们把从正实轴到向量$\overrightarrow{oz}$的夹角称为 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}\, z$，并规定：按逆时针形成的角度为正，按顺时针形成的角度为负. 显然，$\mathrm{Arg}\, z$ 是多值，其中任意两个值之间相差 2π 的整数倍. 我们把取值于$(-\pi, \pi]$的辐角，称为 z 的辐角主值，记作 $\arg z$，易知：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0,\ y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\end{cases}\quad \mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$$

注 复数零的辐角没有意义.

1.1.4 复数的各种表示

记$|z|=r$，$\mathrm{Arg}\, z=\theta$，则有 $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，称之为复数的三角表示. 设

$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，

那么有

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2))(z_2\neq 0).$$

引入记号 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta(\theta\in\mathbf{R})$，则有 $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$，并且有 $z=x+iy=re^{i\theta}$，称之为复数 z 的指数表示.

注 ①以后称 $z=x+iy$ 为复数的直角(代数)表示.

②等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 也称为欧拉公式. 显然 $|e^{i\theta}|=1$，故 $e^{i\theta}$ 也称为单位复数.

利用复数的各种表示可以证明下列关于模和辐角的性质：

(1) $\max(|\mathrm{Re}\ z|,|\mathrm{Im}\ z|)\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|$，

(2) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，

(3) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$|z|^2=z\cdot\overline{z}$，

(4) $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\ z_1+\mathrm{Arg}\ z_2$，$\mathrm{Arg}\ \frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2$，$\mathrm{Arg}\ \overline{z}=-\mathrm{Arg}\ z$.

注 等式(3)和(4)同时也说明了复数乘法与除法的几何意义. 此外，(4)中的三个等式应理解为两个集合相等.

1.1.5 复数的乘幂与方根

对正整数 n，规定 z^n 为 n 个 z 相乘. 设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^ne^{in\theta}$，$r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，特别当 $r=1$ 时，得到 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，我们称其为棣莫弗公式.

设 $z=re^{i\theta}\neq 0$，如果有复数 w 使 $w^n=z$，则称 w 为 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$.