南开大学出版社

WF

微分方程数值方法

汤怀民　胡健伟　编著

微分方程数值方法

汤怀民　胡健伟　编著

南开大学出版社

微分方程数值方法

汤怀民　胡健伟　编著

南 开 大 学 出 版 社 出 版

（天津八里台南开大学校内）

邮政编码：300071　电话：702755

新 华 书 店 天 津 发 行 所 发 行

河 北 省 邮 电 印 刷 厂 印 刷

1990年1月第1版　　1990年1月第1次印刷

开本：850×1168 1/32　　印张：14.875插页4

字数：399千　　印数：1—1,500

ISBN7-310-00237-7/O·40　定价：3.90元

内 容 提 要

本书分为常微分方程数值方法、偏微分方程差分方法和有限元方法三部分，共七章。内容包括常微分方程初值问题的数值解法，椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程的差分方法，边值问题的变分原理、有限元方法的基本结构以及进一步讨论。

本书通过一些典型有效的方法阐明构造数值方法的基本思想，尽可能精确地叙述必要的基本概念，每章附有习题和小结，循序渐进，宜于教学。本书既可作为理工科本科生或研究生的教材，也可作为从事科学与工程计算的有关人员自学与进修的参考书。

前　　言

现代的科学、技术、工程中的大量数学模型都可以用微分方程来描述，很多近代自然科学的基本方程本身就是微分方程。从微积分理论形成以来，人们一直用微分方程来描述、解释或预见各种自然现象，不断地取得了显著的成效。不幸的是，绝大多数微分方程（特别是偏微分方程）定解问题的解不能以实用的解析形式来表示。这就产生了理论与应用的矛盾：一方面，人们列出了反映客观现象的各种微分方程，建立了大量实用的数学模型；另一方面，人们又无法得到这些方程的准确解以定量地描述客观过程。

随着电子计算机的出现和发展，解决上述矛盾的一门学科——微分方程的数值方法得到了前所未有的发展和应用。虽然常微分方程数值方法的历史可以追溯到十八世纪，一些偏微分方程的数值方法也在本世纪初得到研究，但是，它们发展成为一门理论上严谨、实用上有效的学科，还是本世纪五十年代以来的事。究其原因，除了其他学科和工程技术发展的需要，电子计算机的诞生是最重要的客观条件。

自从Galileo系统地引进实验方法和Newton奠定物理学的理论基础以来，近代的科学方法一直分为实验与理论两大方面。任何科学工具的创新，都能推动有关学科的发展，正如望远镜、显微镜带动了天文学、生物学和医学的发展。而电子计算机是一种延伸、强化人的思维和智能的工具，它的出现可以影响一切科学技术领域。它刚诞生时，著名的数学家 von Neumann 就深刻地指出这一新工具的巨大潜力和计算的方法作为一项第三种科学方法的发展前景。四十年来的历史证明了这位天才科学家的预言是正确的。计算机的飞速发展正把计算的方法推向人类科学活动的前沿，使它上升成为一

种重要的科学方法，特别是对科学的定量化起了重要的作用。

在科学的计算机化进程中，科学与工程计算作为一门工具性、方法性、边缘交叉性的新学科开始了自己的新发展。由于科学基本规律大多是通过微分方程来描述的，因此，科学与工程计算的主要任务就是求解形形色色的微分方程，特别是一些大规模、非线性、几何非规则性的方程。因此，今天需要掌握和应用微分方程数值方法的已不再限于有关专业的学生和专门从事科学与工程计算的人员。大量的力学、物理学、天文学方面的研究人员，航空、土木、船舶、机械、电机、地质勘探、油田开发、水文、原子能、电子、航天等领域的工程技术人员都已把这门学科作为自己领域的一种重要研究手段和方法。

还应该指出的是，人类的计算能力决不是单方面地依赖于电子计算机，还取决于计算方法的效率。例如，从五十年代到七十年代，计算机的运算速度提高了数千倍，但同一时期内，解决某些椭圆型方程的计算方法效率提高了近百万倍。又如，从六十年代中期至八十年代初，计算机速度提高了数百倍，而计算二维平均粘性流的数值方法效率提高近千倍。因此，数值方法的发展对于提高计算能力的贡献是与新一代计算机的研制同样重要的。

本书是作为入门性质的教材而编写的，它不可能也不必要包罗万象。第一部分为常微分方程初值问题的数值方法，第二部分是求解偏微分方程的差分方法，第三部分是有限元方法。我们通过一些典型、常用、有效的数值方法来阐明构造数值方法的基本思想，以使读者了解如何在电子计算机上应用这些方法数值求解一个微分方程定解问题。另外，我们对数值方法中一些基本概念和基本理论（如方法的稳定性、收敛性、误差估计等）给出尽可能精确的叙述，使得对此感兴趣的读者在理论分析能力上得到一定的训练。对于只是关心如何使用数值方法的读者，最好也能粗读一下这方面的内容，因为这些理论对使用数值方法是有指导意义的。

按照我们的设想，本教材讲授时间大约需要100学时左右。凡是

学过微积分，并且对数值逼近、数值代数和微分方程的初步内容有所了解的读者都可以设法读懂。三大部分的内容基本上是独立的，每一部分的后面章节也有相对独立性。因此，读者可以酌情选学感兴趣的部分而不必从头读起。我们在每一章的末尾都写了该章的内容提要，并且对正文中未能深入讨论的某些内容作必要的补充，以利于读者自学。每一章后都配备了习题，以利于读者消化正文中的内容。还应当指出，为了培养读者的实际解题能力，应当结合正文安排一些实习，使读者应用学过的数值方法在计算机上算出数值结果，并对结果作出分析。

本书前两部分由汤怀民执笔，第三部分由胡健伟执笔。编写过程中南开大学计算数学教研室的同志们提出了许多宝贵的建议，计算数学及其应用软件专业的同学也对初稿提出了很多有益的意见，出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，谨向他们表示衷心的感谢。由于我们水平所限，书中一定有疏漏和不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一部分　常微分方程的数值解法

第二部分　偏微分方程的差分方法

第三部分 偏微分方程的有限元方法

第一部分　常微分方程的数值解法

本书开篇，我们首先讨论常微分方程定解问题的数值方法。常微分方程作为微分方程的基本类型之一，是生产和科学发展的得力助手和工具。自然界与工程技术中的很多现象，其数学表述归结为常微分方程定解问题。很多偏微分方程问题也可以化为常微分方程问题来近似求解。因此，常微分方程的数值解法是微分方程数值分析的基础内容。由于生产和技术需要的推动，经过长时间的发展，特别是电子计算机诞生以来的大发展，常微分方程定解问题的数值解法是比较成熟的，理论是比较完善的，数值分析工作者构造了许多有实用价值的方法，并且形成了计算机软件。

常微分方程数值解法主要分为两大部分，初值问题与边值问题的数值方法。本部分限于讨论初值问题，而不涉及边值问题。因为这部分内容的典型问题与椭圆型方程边值问题具有某些相近性，我们将它放到第二部分第二章内讨论。

第1章 常微分方程初值问题

本章讨论一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(t,\ u),\\ u(t_0)=u_0\end{cases}\tag{1.0.1}$$

的求解问题，其中 f 为 t 和 u 的已知函数，u_0为给定的初值。为此，我们做如下基本假设：设函数$f(t,\ u)$在区域：$t_0\leqslant t\leqslant T$，$|u|<\infty$内连续，并且关于$u$满足Lipschitz条件，亦即，存在常数$L$（以后称为Lipschitz常数），对所有$t\in[t_0,\ T]$和$u_1,u_2$，有

$$|f(t,\ u_1)-f(t,\ u_2)|\leqslant L\,|u_1-u_2|.$$

由常微分方程理论，在上述基本假设下，初值问题（1.0.1）在区间$[t_0,\ T]$上有唯一解$u(t)$，并且$u(t)$为连续可微的。进而，解函数$u(t)$连续地依赖于初值及右端。

在常微分方程理论中，已对某些类型的初值问题（1.0.1），提出了一些求解方法。但都满足不了生产实践与科学技术发展的需要。本章着重讨论初值问题（1.0.1）的数值解法，它是一种具有实用价值的方法。

什么是数值解法？它是一种离散化方法，利用这种方法，可以在一系列离散点t_1，t_2，…，t_N上求出未知函数$u(t)$之值$u(t_1)$，$u(t_2)$，…，$u(t_N)$的近似值u_1，u_2，…，u_N。自变量t的离散值t_1，t_2，…，t_N是事先取定的，t_j称为节点，通常取成等距的，即$t_1=t_0+h$，$t_2=t_0+2h$，…，$t_N=t_0+Nh$，其中$h>0$称为步长，必要时，可以改变它的大小。而u_1，u_2，…，u_N通常称为初值问题的一个数值解。

本章§1.1将以最简单的数值方法为例，说明数值解法中的基本概念和主要讨论的问题。§1.2讨论最常用的单步方法——Runge-Kutta法，并相应研究它的理论问题。§1.3导出另一类重要方法——线性多步方法，同时讨论它的使用。§1.4讨论线性差分方程的基本性质，它是本章以后各节对数值方法进行理论分析的工具。§1.5对一般多步方法（包括单步方法及线性多步方法)进行理论分析，讨论它们的收敛性问题，并给出相应的充要条件.§1.6讨论舍入误差对数值解的影响，分析数值方法的绝对稳定性质。§1.7把前述各节的结果推广到一阶微分方程组的情形，并简介一类具有特殊性质的方程——刚性（stiff）方程的数值求解问题。

§1.1 基本概念 Euler 法与梯形法

本节通过Euler法及梯形法的讨论，说明常微分方程数值解法中的一些基本概念与主要研究的问题。

§1.1.1 Euler法

Euler法是最简单的数值方法。考虑初值问题（1.0.1）。由于$u(t_0)=u_0$是已知的，可以算出$u'(t_0)=f(t_0, u_0)$。设$t_1=t_0+h$，当h充分小时，则近似地有

$$\frac{u(t_1)-u(t_0)}{h}\approx u'(t_0)=f(t_0, u_0),$$

从而可取

$$u_1=u_0+hf(t_0, u_0)$$

作为$u(t_1)$的近似值。类似地，利用u_1及$f(t_1, u_1)$又可算出$u(t_2)=u(t_0+2h)$的近似值

$$u_2=u_1+hf(t_1, u_1).$$

一般地，在任意节点$t_{n+1}=t_0+(n+1)h$处，$u(t_{n+1})$的近似值由下式给出：

$$u_{n+1}=u_n+hf(t_n, u_n). \tag{1.1.1}$$

这就是Euler法的计算公式。

显然，近似值u_n依赖于步长h，换言之，由不同的h_1及h_2，算出的近似值$u_n(h_1)$及$u_n(h_2)$是不同的。为简化记号，在不致于混淆的情况下，仍用u_n表示近似值$u_n(h)$。

Euler法的几何意义是十分清楚的：在这种方法中，实际上是用一条过(t_0,u_0)的折线来近似替代过(t_0,u_0)的积分曲线，如图1.1所示。因此，这种方法又称为折线法。

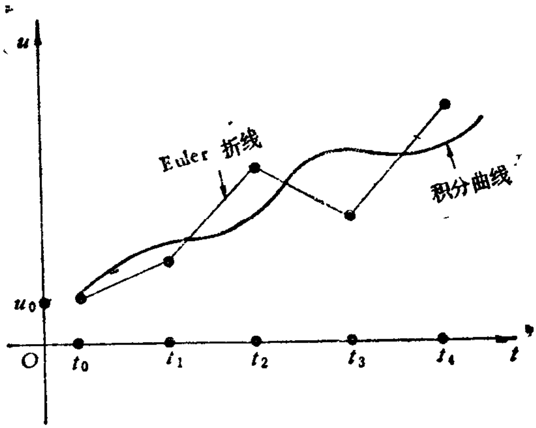

图 1.1

为考察由Euler法提供的数值解是否具有实用价值，首先应该知道，当步长h取得充分小时，所得数值解u_n能否足够精确地逼近初值问题（1.0.1）的真解$u(t_n)$。这是所谓收敛性问题。其次，还必须估计数值解与真解之间的误差，以便在实际计算中根据精度要求确定计算方案。

在Euler法中，数值解的误差首先是由差商代替导数引起的，这种近似替代所产生的误差称为截断误差。其次，计算过程中还会由于数值的舍入产生另一种误差——舍入误差。由于Euler法是一种步进方法，显然，只有当最初产生的误差在以后各步的计算中不会无限制扩大时，换言之，只有当（1.1.1）的解对初值具有某种连续相依性质时，方法才具有实用价值。这种性质称为稳定性问