代数题解

（下　册）

龚宝和　王令九　编

山西人民出版社

代数题解

（下册）

龚[illegible]和 王[illegible]九 编

山西人民出版社

代数题解（下册）
龚宝和　王令九
*
山西人民出版社出版　（太原并州路七号）
山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/32　印张：$6\frac{1}{2}$　字数：144千字
1979年2月第1版　1979年8月太原第1次印刷
印数：1—300,000册
*
书号：7088·803　定价：0.47元

目　　录

第六章　指数与对数……………………………………（1）

第七章　极　值……………………………………………（46）

第八章　排列与组合………………………………………（100）

第九章　数列与极限………………………………………（118）

第十章　行列式……………………………………………（195）

第六章 指数与对数

386．化简：$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^{3}}{(0.1)^{-2}(a^{3}b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$．

解：原式$=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}\frac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}(a^{3}b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2\cdot 2^{3}}{10^{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$$

$$=\frac{4}{25}a^{0}b^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{25}b^{\frac{1}{2}}.$$

387．化简：$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^{2}}{a^{2}+2ab+b^{2}}\right)$

$$\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^{2}}{a^{2}-b^{2}}\right).$$

解：原式$=\frac{a(a+b)-a^{2}}{(a+b)^{2}}\div\frac{a(a-b)-a^{2}}{a^{2}-b^{2}}$

$$=\frac{ab}{(a+b)^{2}}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{-ab}$$

$$= -\frac{a-b}{a+b}$$

$$= \frac{b-a}{a+b}.$$

388．设$4^{2x-1}=4^{3x-4}$，求 x 的值．

解：这两个指数式的底数相同且不等于 1，因为一个幂值只对应一个指数值，所以 $2x-1=3x-4$，$\therefore x=3$．

389．设 $3^x=4^x$，求 x 的值．

解：因为底数不等于 1 的数，只有在指数是零时才能相等．故得 $x=0$．

390．计算：$\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\text{arc tg}1.5}\right)^{\sin 1170^\circ}+\log_{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

解：原式$=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\text{arctg}1.5}\right)^{\sin 90^\circ}+\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{-1}$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\text{arc tg}1.5}\right)^{1-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\text{arctg}1.5}\right)^{0}$$

$$=1$$

391．设 $\dfrac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\dfrac{y(z+x-y)}{\log_a y}$

$=\dfrac{z(x+y-z)}{\log_a z}$，试证 $y^z z^y=z^x x^z=x^y y^x$．

证明：令 $\dfrac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\dfrac{y(z+x-y)}{\log_a y}$

$$=\frac{z(x+y-z)}{\log_a z}=\frac{1}{r},$$

$\therefore\quad \log_a x=rx(y+z-x),$

$\log_a y=ry(z+x-y),$

$\log_a z=rz(x+y-z)$。

$\therefore\quad z\log_a y+y\log_a z$

$=x\log_a z+z\log_a x$

$=y\log_a x+x\log_a y$

$=2rxyz,$

$\therefore\quad \log_a y^z z^y=\log_a z^x x^z=\log_a x^y y^x$。

亦即 $\quad y^z z^y=z^x x^z=x^y y^x$。

392.求证：如果在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内上升（或下降）的函数$f(x)$能使恒等式

$$f(x)f(y)=f(x+y) \qquad (I)$$

成立，则$f(x)$是指数函数，即

$$f(x)=a^x,\qquad a>1,\ (\text{或}\ 0<a<1)\ .$$

证：按假设条件，等式是关于 x 及 y 的恒等式；

设$f(x)$是随便一个在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，而且具有性质 (I) 的函数。

命 $\quad f(1)=a$

由恒等式(I)，可证

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=f(x_1+x_2+\cdots+x_n) \qquad (1)$$

事实上，如果假定等式(I)对于$(n-1)$个数是对的，即

$$f(x_1)\ f(x_2)\ \cdots f(x_{n-1}) = f(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})$$

则对于 n 个数可得：

$$f(x_1)\ f(x_2)\ \cdots f(x_n) = f(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})f(x_n)$$
$$= f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ .$$

既然当$n=2$时等式(I)是对的，那末，当n是任何$\geqslant 2$的自然数时，它也是对的。

在恒等式(I)中，命$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$（$n$是自然数），就得到

$$\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = f(1)\text{，于是}f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

按照所给的条件，对于x的任何实值，函数$f(x)$总有意义，所以对于任何自然数n，$\sqrt[n]{a}$必须有意义（在实数体内），于是

$$f(1)=a\geqslant 0$$

在恒等式（1）中，命$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{m}$（$m$是自然数），可得：

$$\left[f\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = \left[a^{\frac{1}{m}}\right]^n = a^{\frac{n}{m}} = f\left(\frac{n}{m}\right).$$

在（I）中，命$y=0$，则对于任一x，有

$$f(x)f(0)=f(x).$$

又因$f(x)$是上升（或下降）的，它不能恒等于零，所以

$$f(0)=1=a^0\ .$$

在(I)中，命$y=-x$，可得：

$$f(x)\ f(-x)=f(0)\text{，或}f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

因此，对于非负的有理数 $x=\frac{n}{m}$，

$$f\left(-\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}.$$

由此可知 $a>0$（这样，便排除了等式 $a=0$）。

按照上面既经确立的事实，可知，对于 x 的一切有理值，函数 $f(x)$ 的值等于 a^x，这就是说，在有理数集上，$f(x)$就是指数函数。$a>0$

393.解方程：$\left(\frac{5}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{8}{25}\right)^x=\frac{8}{125}$.

分析：遇到这类指数方程时，方程左边因指数相同，可将底数相乘化简，然后去解就很简便。

解：$\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{25}\right)^x=\frac{8}{125}$，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^3,$$

$\therefore\quad x=3$.

394.解方程：$5^{2x+6}-2\times5^{x+3}+1=0$.

解：　设$y=5^{x+3}$，$y^2=5^{2x+6}$，原方程变为：

$$y^2-2y+1=0,$$

$$(y-1)^2=0,$$

$$y-1=0,$$

$$y=1,$$

即 $\quad 5^{x+3}=1.$

$\therefore \quad x+3=0,$

$x=-3$（经验算此为原方程的根）。

注意：此类指数方程如设$y=5^x$，去解方程较麻烦，故解指数方程时，设辅助未知数是以解题方便为原则。

395. 解方程：$3^{2x+5}=3^{x+2}+2$.

解：$\because \quad 3^{2x+5}=3^5\cdot 3^{2x},$

$3^{x+2}=3^2\cdot 3^x.$

$\therefore$后方程可化为：

$$3^5\cdot 3^{2x}-3^2\cdot 3^x-2=0.$$

令 $t=3^x$。得二次方程

$$3^5t^2-3^2t-2=0$$

这个方程的根是实数且符号相反，大根满足条件 $t>0$，

$$t=\frac{3^2+\sqrt{3^4+8\times 3^5}}{2\times 3^5}=\frac{1}{9}.$$

由最简方程$3^x=\frac{1}{9}$，求得：$x=-2$.

396. 解方程：$\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=m$.

解：两边同乘以异于零的乘数a^x，

令 $a^x = t$，得二次方程：

$$t^2 - 2mt + 1 = 0$$

其根为：$t_1 = m - \sqrt{m^2 - 1}$与$t_2 = m + \sqrt{m^2 - 1}$

当$|m| < 1$时得虚根，当$m < -1$时，两根都是负的。当$m > 1$时，两根都是正的，且方程有两个相异的解是：

$x_1 = \log_a(m - \sqrt{m^2 - 1})$与$x_2 = \log_a(m + \sqrt{m^2 - 1})$。

当$m = 1$时，有一个解$x = 0$；

当$m < 1$时，没有解。

397．解方程：$\sqrt{9^{x(x-1)-\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3}$。

解：将两边写成3的方幂的形式，得：

$3^{x(x-1)-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}$，由此得：$x(x-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$。

而$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$，

$$(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{3}{2}.$$

398．解方程：$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$。

解：将方程写成2与3的方幂：

$$2^{2x} - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot 3^x - \frac{2^{2x}}{2}.$$

由此：$2^{2x}+\frac{2^{2x}}{2}=\sqrt{3}\,3^{x}+\sqrt{\frac{3^{x}}{3}}$，

$$\frac{3}{2}(2^{2x})=\sqrt{\frac{4}{3}}(3^{x}),$$

$$3\sqrt{3}\times 2^{2x}=8\times 3^{x},$$

两边取对数，（对任意底）得：

$$\frac{3}{2}\log 3+2x\log 2=3\log 2+x\log 3,$$

$$(2\log 2-\log 3)x=3\log 2-\frac{3}{2}\log 3,$$

$$x=\frac{3\log 2-\frac{3}{2}\log 3}{2\log 2-\log 3}$$

$$=\frac{3(\log 2-\frac{1}{2}\log 3)}{2(\log 2-\frac{1}{2}\log 3)}=\frac{3}{2}.$$

399.解方程：$a^{b^{x}}=C$，此处$C>0$，a与b是不等于1的正数。

解：将上式写成对数式，得：$b^{x}=\log_a C$。

假如$\log_a C\leqslant 0$，也就是说假如，

$$C\begin{cases}\leqslant 1, & 当a>1,\\ \geqslant 1, & 当a<1.\end{cases}$$

则方程没有解。

若当$a>1$时，$C>1$，或当$a<1$时，$C<1$，则方程有唯一解：

$x=\log_b[\log_a C]$。

400.解方程： $\sqrt[4]{7^x}=\sqrt[5]{343}$。

解：原方程可化为$7^{\frac{x}{4}}=7^{\frac{3}{5}}$。

因底是不等于1的正数，据底相等幂相等则指数必相等。可得：

$$\frac{x}{4}=\frac{3}{5},\qquad 5x=12,\qquad x=\frac{12}{5}.$$

401.解方程：$\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$。

解：原方程可化为$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{3}{2}\right)^{3x-3}=\frac{2}{3}$。

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+3}=\frac{2}{3},\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-x+3}=\frac{2}{3},$$

因底是不等于的正数，故$-x+3=1$，$x=2$。

402.解方程：$2^x\cdot 5^x=0.1\times(10^{x-1})^5$。

解：原方程可化为$(10)^x=\frac{1}{10}\times 10^{5x-5}$，

$$(10)^x=10^{5x-6}.$$

因底是不等于1的正数，故，$x=5x-6$，$x=\frac{3}{2}$。

403.解方程：$x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$。

解：原方程可变为$x^{\sqrt{x}}=x^{\frac{x}{2}}$。

当$x\neq 1$。则有$\sqrt{x}=\frac{x}{2}$，

$$\sqrt{x}-\frac{x}{2}=0,\quad \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=0,$$

由$\sqrt{x}=0$，得：$x=0$；

或 $1-\frac{\sqrt{x}}{2}=0$，得：$x=4$。

$\because$ $x>0$，$\therefore$将$x=0$舍去。

当$x=1$时，$1^{\sqrt{1}}=1^{\frac{1}{2}}$，

即$x=1$也是原方程的根。

故$x=4$或$x=1$均是原方程的根。

404.解方程：$3^{2y+5}=5\times 3^{y+2}-2$。

解：由原方程，得：

$3\times 3^{2(y+2)}-5\times 3^{y+2}+2=0$。

设 $3^{y+2}=Z$。

则有 $3Z^2-5Z+2=0$。

解得：$Z=\frac{2}{3}$ 或 $Z=1$。

由 $3^{y+2}=\frac{2}{3}$，得：$y+2=\log_3\frac{2}{3}$。

$\therefore$ $y_1=\left(\log_3\frac{2}{3}\right)-2=\left(\log_3 2\right)-3$。

由 $3^{y+2}=1=3^0$，得：$y+2=0$。

$\therefore\quad y_2=-2$。

405.解方程：$(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}$

$$=(a-b)^{2x}(a+b)^{-2},\ (a>b>0).$$

解：$(a+b)^{2(x-1)}(a-b)^{2(x-1)}=(a-b)^{2x}(a+b)^{-2}$，

$$\frac{(a+b)^{2(x-1)}}{(a+b)^{-2}}=\frac{(a-b)^{2x}}{(a-b)^{2x-2}},$$

$$(a+b)^{2x}=(a-b)^2,$$

$$(a+b)^x=a-b.$$

两边取常用对数，

$$x\lg(a+b)=\lg(a-b),$$

$$\therefore\quad x=\frac{\lg(a-b)}{\lg(a+b)}.$$

406.解方程：$7^{2x-1}-3^{3x-2}=7^{2x+1}-3^{3x+2}$。

解：原方程可化为

$$\frac{1}{7}\times7^{2x}-\frac{1}{9}\times3^{3x}=7\times7^{2x}-9\times3^{3x}.$$

移项 $\left(9-\frac{1}{9}\right)\cdot3^{3x}=\left(7-\frac{1}{7}\right)\cdot7^{2x}$，

即 $\frac{80}{9}\times3^{3x}=\frac{48}{7}\times7^{2x}$，

$$\frac{5}{9}\times3^{3x}=\frac{3}{7}\times7^{2x},$$

$$\left(\frac{27}{49}\right)^x=\frac{3}{7}\div\frac{5}{9},\quad \left(\frac{27}{49}\right)^x=\frac{27}{35}.$$

两边取常用对数：

$$x(\lg 27-\lg 49)=\lg 27-\lg 35,$$

$$x=\frac{\lg 27-\lg 35}{\lg 27-\lg 49}\approx\frac{1.4314-1.5441}{1.4314-1.6902}$$

$$=\frac{0.1127}{0.2588}\approx 0.435.$$

407.解方程：$3^{x+1}+9^x-18=0$。

解：原方程可化为$3\cdot 3^x+3^{2x}-18=0$,

令　$3^x=u$，得：$u^2+3u-18=0$,

$(u+6)(u-3)=0$,

$\therefore$　$u=-6$，$u=3$。

但因　$3^x>0$故$u=-6$应舍去，

$u=3$，$3^x=3$，而$x=1$。

408.解方程：$5^{x+1}=3^{x^2-1}$。

解：两边取常用对数：

$(x+1)\lg 5=(x^2-1)\lg 3$,

$(x^2-1)\lg 3-(x+1)\lg 5=0$,

$(x+1)[(x-1)\lg 3-\lg 5]=0$,

$$\therefore\quad \begin{cases} x_1=-1,\\ x_2=1+\dfrac{\lg 5}{\lg 3}\approx 2.46. \end{cases}$$

409.解方程：　$2^{1-x}-33\times 2^{-\frac{x}{2}-2}+1=0$。

解：原方程可化为：

$$2^{-(x+4)+5}-33\times 2^{-\frac{x+4}{2}}+1=0。$$

令 $\qquad 2^{-\frac{x+4}{2}}=u$,

得：$32u^2-33u+1=0$，$(32u-1)(u-1)=0$,

$$u=\frac{1}{32}, \qquad u=1。$$

当$u=\frac{1}{32}$, $\qquad 2^{-\frac{x+4}{2}}=\frac{1}{32}=2^{-5}$,

$$-\frac{x+4}{2}=-5,$$

$\therefore \qquad x=6。$

当$u=1$, $\qquad 2^{-\frac{x+4}{2}}=1=2^0$

$$x+4=0,$$

$\therefore \qquad x=-4。$

410．解方程：$x^{3x}=x^{x-1}$。

解：未知数的允许值集合是$x>0$。$x=1$，显然是原方程的根；

当x是不等于1的正数，则

$$3x=x-1 \quad x=-\frac{1}{2}$$

但因$x=-\frac{1}{2}$是负数，不属于函数：x^{3x}及函数x^{x-1}的