中等师范学校
数学课本

代数与初等函数

第三册
（供三年制学校用）

人民教育出版社

中等师范学校数学课本

代数与初等函数

第三册

（供三年制学校用）

汤明任 方明一 周华辅 编

●

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京联华印刷厂印装

●

开本 787×1092 1/32 印张 8 字数 165,000

1988年1月第1版 1988年6月第1次印刷

印数 1-189,000

ISBN7-107-08060-1

G·755 定价 0.91 元

说　明

国家教育委员会(86)教师字008号文件《关于调整中等师范学校教学计划的通知》中规定:"每学年上课周数减少二周"、"三年制师范二年级数学的周课时减少一课时". 这样，三年制中等师范数学总课时数为364课时，与调整前的数学总课时相比，减少了56课时. 该《通知》又指出:"适应课时调整，对教学内容和教材作相应的安排","对原教材中一些不是小学教学急需又较艰深的，或与初中教学内容有重复的部分，在不变动课本体系的原则下作一些删减. ……数学将分别编写三年制师范和四年制师范使用的两套教材". 为此，我社受国家教育委员会的委托，组织部分同志重新编写了一套三年制中等师范学校数学课本，从1987年秋开始供应，1988年秋供齐(对四年制中等师范仍供应原数学课本).

这套数学课本是以原教育部1983年制订的《中等师范学校数学教学大纲(试行草案)》为依据，在现行的四年制中等师范学校数学课本的基础上编写的. 除保持原有特点外，对教学内容进行了调整，并力求更加突出师范特点.

这套数学课本共五册，包括《代数与初等函数》第一、二、三册，《几何》第一、二册.

各学校在使用这套数学课本时，可以根据具体情况，参照下表来开设数学科目和安排课时.

学　　期	周课时数	科　　目
一年级第一学期	4/2	代数与初等函数(一)/几何(一)
一年级第二学期	4/2	代数与初等函数(二)/几何(一)
二年级全学年	3/2	代数与初等函数(三)/几何(二)

本书为三年制中等师范学校数学课本(试用本)《代数与初等函数》第三册，内容包括数列与数学归纳法(约14课时)，极限与导数(约24课时)，排列、组合和二项式定理(约20课时)，概率(约14课时)，统计(约18课时)，供三年制中等师范学校三年级全学年使用.

本书由我室组织编写，初稿完成后，由周华辅统稿与加工，责任编辑是曾宪源，全书由吕学礼校订. 由于时间仓促，书中难免有错误和疏漏，欢迎广大教师和其他读者批评指正.

人民教育出版社数学室

1988年2月

目　录

第十一章　数列与数学归纳法

一　等差数列

11.1　数列

我们看下面的例子：

图 11-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层，自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4,5,6,7,8,9,10. \qquad (1)$$

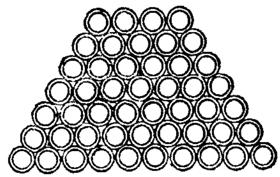

图　11-1

自然数 1,2,3,4,5,…的倒数排列成一列数：

$$1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\cdots. \qquad (2)$$

$\sqrt{2}$ 的精确到 1,0.1,0.01,0.001,…的不足近似值排列成一列数：

$$1,1.4,1.41,1.414,\cdots. \qquad (3)$$

-2和 2 无限交替出现所排列成的一列数：

$$-2,2,-2,2,-2,2,\cdots. \qquad (4)$$

在 $f(x)=9-3x$ 中，当自变量 x 依次取 1,2,3,4,5,6 所得的函数值排列成的一列数：

$$6,3,0,-3,-6,-9. \qquad (5)$$

象上面例子中，按一定次序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数叫做这个数列的**项**，在第一个位置上的数叫

做数列的第1项(首项)，在第二个位置上的数叫做数列的第2项,……，在第 n 个位置上的数(n 指自然数)叫做数列的第 n 项,……

对于上面的数列 (1)，每一项与它的项数有下面的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{项} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{项数} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

这就告诉我们：数列可看作一个定义域是自然数集（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)的函数当自变量从小到大依次取自然数时相应的一系列函数值. 如数列 (5) 就是定义域为集合$\{1,2,\cdots,6\}$的函数所对应的函数值.

数列的一般形式可以写成:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中a_n 是数列的第 n 项. 有时我们把上面的数列简记作$\{a_n\}$. 例如，把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作$\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

如果一个数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的对应关系可以用一个公式来表示，则这个公式叫做这个数列的**通项公式**. 例如数列(1)的通项公式是$a_n=n+3(n\leqslant7)$；数列(2)的通项公式是$a_n=\frac{1}{n}$；数列(5)的通项公式是$a_n=9-3n(n\leqslant6)$. 并不是每一个数列都有通项公式，如数列 (3) 就写不出通项公式来. 但是，如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用

1, 2, 3, …去代替公式中的 n, 就可以求出这个数列的各项.

一个数列中,如果在某一项的后面不再有任何项,这个数列叫做**有穷数列**;如果在任何一项的后面还有跟随着的项,这个数列叫做**无穷数列**. 上面的数列(1)和(5)是有穷数列, 数列(2),(3),(4)都是无穷数列.

例 1 根据通项公式,求出下面各数列的前 5 项:

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$; (2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解: (1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$, 得到数列的前 5 项为:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$, 得到数列的前 5 项为:

$$-1,2,-3,4,-5.$$

例 2 写出数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $1,3,5,7$;

(2) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1\cdot2},\frac{1}{2\cdot3},-\frac{1}{3\cdot4},\frac{1}{4\cdot5}$.

解: (1) 数列的前 4 项 1, 3, 5, 7 都是对应的项数的 2 倍减去 1, 所以这个数列的一个通项公式是:

$$a_n=2n-1;$$

(2) 数列的前 4 项 $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$ 的分母都

等于对应的项数加上 1，分子都等于分母的平方减去 1，所以这个数列的一个通项公式是：

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1};$$

（3）数列的前 4 项$-\frac{1}{1\cdot 2},\frac{1}{2\cdot 3},-\frac{1}{3\cdot 4},\frac{1}{4\cdot 5}$的绝对值都等于项数与项数加上1的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以这个数列的一个通项公式是：

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

例 3　一个数列的第一项是 1，以后各项由公式

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$$

给出，写出这个数列的前 5 项.

解：　$a_1=1$，

$$a_2=a_1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=a_2+\frac{1}{a_2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

$$a_4=a_3+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=\frac{29}{10},$$

$$a_5=a_4+\frac{1}{a_4}=\frac{29}{10}+\frac{10}{29}=\frac{941}{290},$$

所以，这个数列的前 5 项是：$1,2,\frac{5}{2},\frac{29}{10},\frac{941}{290}$.

练　习

1. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项，并写出

第 7 项与第 10 项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

2. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数.

(1) 2, 4, 6, 8;

(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

3. 观察下面数列的特点，据此在框内填上适当的数，并写出它们的一个通项公式：

(1) 2, 4, $\boxed{}$, 8, 10, $\boxed{}$, 14;

(2) 2, 4, $\boxed{}$, 16, 32, $\boxed{}$, 128;

(3) $\boxed{}$, 4, 9, 16, 25, $\boxed{}$, 49;

(4) $\boxed{}$, 4, 3, 2, 1, $\boxed{}$, -1, $\boxed{}$;

(5) 1, $\sqrt{2}$, $\boxed{}$, 2, $\sqrt{5}$, $\boxed{}$, $\sqrt{7}$.

4. 写出下面数列的前 5 项：

(1) $a_1=5, a_{n+1}=a_n+3$;

(2) $a_1=2, a_{n+1}=2a_n$;

(3) $a_1=3, a_2=6, a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$;

(4) $a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{a_n}$.

11.2 等差数列及其通项公式

上一节中我们提到过数列:

$$4,5,6,7,8,9,10. \tag{1}$$

又如数列:

$$2,4,6,8,10,12,14; \tag{2}$$

$$1,4,7,10,13,16; \tag{3}$$

$$2+\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3}, 2+3\sqrt{3}, 2+4\sqrt{3}, \cdots. \tag{4}$$

这些数列有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与它的前一项之差都是相等的.

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**. 这个常数叫做等差数列的**公差**,公差通常用字母 d 表示.

例如,数列

$$1,3,5,7,\cdots$$

是等差数列，它的公差是 2.

又如，数列

$$0,-5,-10,-15,\cdots$$

也是等差数列,它的公差是-5.

特别地,数列

$$3,3,3,3,\cdots$$

是公差为 0 的等差数列．公差为 0 的数列叫做常数列．

如果数列：$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$是等差数列，它的公差是$d$，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

由此可知，等差数列的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

即等差数列从第 2 项起，每一项都等于第 1 项加上公差的若干倍，这个倍数等于这一项的项数减 1 的差．

例 1　求等差数列 8，5，2，…的第 20 项．

解：$\because$ $a_1 = 8, d = 5 - 8 = -3, n = 20,$

$\therefore$ $a_{20} = 8 + (20-1) \times (-3) = -49.$

例 2　等差数列$-5, -9, -13, \cdots$的第几项是-401？

解：$\because$ $a_1 = -5, d = -9 - (-5) = -4, a_n = -401.$

$\therefore$ $$-401 = -5 + (n-1) \times (-4),$$

解得

$$n = 100.$$

答：这个数列的第 100 项是-401．

例 3　梯子的最高一级宽 33cm，最低一级宽 110cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列．计算中间各级的宽．

解：$\because$ $a_1 = 33, a_{12} = 110, n = 12,$

$\therefore$ $$a_{12} = a_1 + (12-1)d,$$

即 $$110=33+11d,$$
解得
$$d=7.$$

因此，

$$a_2=33+7=40,$$
$$a_3=40+7=47,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽(单位：cm)从上到下依次是40，47，54，61，68，75，82，89，96，103.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A，使 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出，在一个等差数列中，从第2项起，每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.

练　习

1. (1) 求等差数列 $3, 7, 11, \cdots$ 的第 4，7，10 项；
   (2) 求等差数列 $10, 8, 6, \cdots$ 的第 20 项；
   (3) 求等差数列 $2, 9, 16, \cdots$ 的第 n 项；
   (4) 求等差数列 $0, -3\frac{1}{2}, -7, \cdots$ 的第 $n+1$ 项.
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) 已知 $d=-\frac{1}{3}, a_7=8$, 求 a_1;

(2) 已知 $a_1=12, a_6=27$, 求 d;

(3) 已知 $a_1=3, a_n=21, d=2$, 求 n;

(4) 已知 $a_4=10, a_7=19$, 求 a_1 与 d.

11.3 等差数列前 n 项的和

在实际生活中，我们常常遇到要求等差数列前 n 项和的问题，如求图 11-1 所示的钢管总数就是一例. 当然，逐项相加可以算出结果，但是当项数很多时，计算起来比较麻烦，所以有必要推导等差数列前 n 项和的公式.

为了求出图 11-1 所示的钢管总数，我们设想在这堆钢管的旁边，如图 11-2 那样倒放着同样的一堆钢管. 这样，每层的钢管数都相等，即：

$$4+10=5+9=6+8=\cdots\cdots=10+4.$$

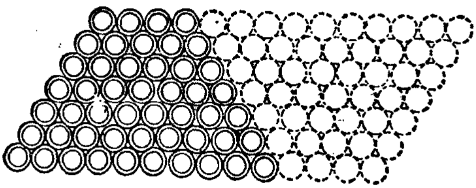

图 11-2

由于共有 7 层，两堆钢管总数是 $(4+10)\times7$，因此，所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

它的前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d]. \quad (1)$$

同理，把各项的次序反过来，S_n 又可以写成

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d]. \quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{n\text{ 个}}$$

$$= n(a_1 + a_n),$$

由此得到等差数列的前 n 项的和的公式

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.}$$

即等差数列前 n 项的和，等于第 1 项与第 n 项的和的一半的 n 倍.

在小学数学中，我们常利用这个方法进行速算，如 $1+2+3+\cdots+100 = (1+100) \times \frac{100}{2} = 5050.$

因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.}$$

例 1 在小于 100 的正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？并求它们的和.

解：在小于 100 的正整数的集合中，以下各数是 7 的倍数：

$$7,7\times2,7\times3,7\times4,\cdots,7\times14.$$

显然，这个数列共有 14 项，并且是一个等差数列，其中$a_1=7$，$a_{14}=7\times14$. 因此

$$S_{14}=\frac{14\times(7+7\times14)}{2}=735.$$

答：在小于 100 的正整数的集合中有 14 个数是 7 的倍数，它们的和等于 735.

例 2 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3:4:5.

证明：设三条边的长从小到大排列，它们可以表示为 $a-d,a,\ a+d$，这里 $a-d>0,\ d>0$. 由于它们是直角三角形的三条边的长，根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d.$$

于是这三条边的长分别是 $3d,4d,5d$.

因此，这三条边的长的比是 3:4:5.

例 3 等差数列的第 4 项等于 9，第 9 项等于 -6，求这个数列前几项的和刚好等于 54？

解：已知 $a_4=9,a_9=-6$，由题意可得

$$\begin{cases}a_1+3d=9,\\a_1+8d=-6.\end{cases}$$

解得

$$d=-3,\ a_1=18.$$

由求和公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2},$$

得

$$54=18n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-3),$$

即 $$n^2-13n+36=0.$$

解得

$$n_1=4,\ n_2=9.$$

答：这个数列前 4 项或者前 9 项的和都等于 54.

练 习

1. 根据下列各组条件，求相应的等差数列$\{a_n\}$的S_n:

(1) $a_1=5, a_n=95, n=10$;

(2) $a_1=100, d=-2, n=50$;

(3) $a_1=\frac{2}{3}, a_n=-\frac{3}{2}, n=14$;

(4) $a_1=14.5, d=0.7, a_n=32$.

2. 计算:

(1) $5+10+15+\cdots+1000$;

(2) $3+3\times2+3\times3+\cdots+3\times100$.

3. 求自然数列中前n个偶数的和。

习 题 一

1. 已知各数列的前 4 项，分别将它们的一个通项公式填在