同伦方法及成本理论

王则柯　黎培兴
李志强　范江华　著

神奇的同伦方法:库恩多项式求根算法
算法的成本理论
单纯同伦方法的可行性
连续同伦方法的应用实例:多复变罗歇定理证明的同伦方法
同伦方法的经济学背景:一般经济均衡理论
同伦方法的传奇人物:斯梅尔、斯卡夫和李天岩

湖南教育出版社

同伦方法及成本理论

王则柯　黎培兴　李志强　范江华　著

湖　南　教　育　出　版　社

同伦方法与成本理论

王则柯　黎培兴　著
责任编辑：孟实华
湖南教育出版社出版发行
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷
787×1092毫米　32开　印张：8.25　字数：198000
1998年12月第1版　1998年12月第1次印刷
印数：1—1000
ISBN 7—5355—2590—3/G·2585
定价：10.60元

前　言

不动点算法，同伦算法或同伦方法，及其计算复杂性理论即成本理论，是70年代开始发展起来的互相关联的应用数学的新领域. 数理经济学的讨论，是这一发展的重要背景；以往最抽象的拓扑学，在这一领域返朴归真，驱散让人畏而远之的迷雾，展示其人见人爱的几何魅力. 在这一发展过程中，斯卡夫、库恩、伊夫斯、斯梅尔、李天岩等国际知名教授和我国一些学者，都作出了有声有色的贡献.

非常难得的是，这些新领域的进展，主要得益于新颖的思想，而不是依靠高深知识的堆砌. 本书的大部分内容，就是在中学数学的基础上，从最浅显最富启发的例子入手，一环扣一环，介绍不动点算法、同伦方法及其计算复杂性理论的主要进展. 除了科学内容本身之外，我们还着重发掘科学研究方法论的丰富内涵. 将来真正进入这些研究领域的读者终究不会很多，但是科学故事和科研方法的启迪，将使绝大多数读者终身受益.

这是一本关于科学新发展的科学普及著作. 由于这些领域的研究正方兴未艾，国外专家连大学本科水平的教科书都来不及写，更不必说比较通俗普及的著作了. 我们本身从事这些研

究，比较特别的是，我们也喜欢写科普的和通俗的文章和著作．我自己是学拓扑学出身的．拓扑学原来的具体方法的确比较难以把握，但是现在拓扑学能够在数理经济学等应用科学领域发挥那么大的作用，主要得益于它清晰简明的几何思想和整体处理问题的方式．这也是十几年来我和我的研究生能够在这些领域做出一些贡献的原因．

我们写这本书，还冀望读者分享我们研究工作的心得，那就是：拓扑学并非那么高深莫测，拓扑学提供生动朴素的和富于启发的几何思维．读者将会看到，同伦方法就是沿着曲线或者折线走，从一个房间走到另一个房间，而计算复杂性讨论就是数一下走过多少个房间．这样的讨论，不是很具体很有趣吗？

在这本书里，读者会看到许多人物故事．作为一本普及读物，我们有时候甚至觉得，对于不少读者来说，书中所写的科学研究中的人物故事，可能比书中介绍的具体的研究成果更有价值．这些人物故事，许多都出自我们个人之间的交往．这是从一个侧面了解科学研究的规律，了解科学家之成为科学家的珍贵记录．

我早期的一些研究生，都曾致力于不动点算法、同伦方法、计算复杂性理论以及相关的论题，他们是：高堂安、马建瓴、钟信、易艳春、朱政辉、史宏超、陈向新．他们对这本书有很多贡献，我们在此表示感谢．我们还感谢湖南教育出版社．我们的有关研究一直得到国家自然科学基金和国家教委博士学科点专项基金的资助，在此一并致谢．

王则柯，识于丁丑年夏

目　　录

一、神奇的同伦方法：库恩多项式求根算法

多项式的求根，是纯粹数学中最古老的问题之一，也是数值分析中最古老的问题之一．就纯粹数学而言，根与系数关系的韦达定理、三次方程的卡丹公式、高斯的代数基本定理、天才的阿贝尔和伽罗华的群论，都渊源于多项式的求根问题．就数值分析而言，任何一本数值分析教科书，有关各种多项式的求根方法已不胜枚举，而当今的计算数学学术刊物，有关多项式求根问题的新进展仍然屡见不鲜．

1．多项式方程求根的魔术植物栽培算法

1974 年 6 月，第一次不动点（fixed points）算法及应用国际会议在美国召开．欧洲、日本和美国的几十位数学家参加了这次会议．美国普林斯顿大学的库恩（Harold W．Kuhn）教授宣读了一篇用不动点算法解代数方程的论文[6]，引起大家很大的兴趣．

众所周知，伟大的数学家高斯在 1799 年首先证明了代数

基本定理：一个 n 次复系数代数方程有且仅有 n 个根. 可是，当时他的证明还不是构造性的，也就是说，只肯定根的存在，但没有同时告诉求解的方法. 近 200 年来，特别是电子计算机问世以来，人们已经发展了不少数值求根方法. 这些方法大致上属于同一类型：以迭代为特点. 有些方法还依赖于根的分布理论. 然而，库恩的方法却是别开生面的.

一个方形的培养皿，它的边缘上长着 n 个新芽（图 1.1）. 还有一个立体的大篱笆，越往上越密. 把篱笆放在培养皿上面，一个数学过程马上就要开始了. 随便你给出一个 n 次复系数多项式 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$，把 f 的信息传给大篱笆，于是培养皿上的 n 个新芽如同 n 条生长着的藤一样，很快地向上攀援，每条藤恰恰指向多项式 $f(z)$ 的一根，多项式 $f(z)$ 的 n 个根就全部找到了（图 1.2）.

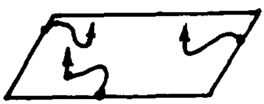

图 1.1　三个芽的库恩培养皿

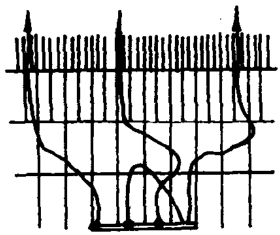

图 1.2　库恩的大篱笆和他的魔术植物

库恩算法探胜

这是数学还是园艺学？莫非是编神话？不，这是库恩那篇

严谨的数学论文的真实的几何形象.

让我们仔细看看，库恩的培养皿和大篱笆是怎样建造的；多项式 $f(z)$ 的信息是怎样传给大篱笆的；在这种信息的刺激下，n 条藤又是怎样攀援上去的.

大家知道，多项式 $f(z)$ 是复数域 C 上的一个复值函数，它的根就是复数平面 C 上使得 $f(z_0)=0$ 的那些点 z_0. 几何上，$w=f(z)$ 是复平面 C 到另一复平面 C' 之间的一个变换，它的根就是复平面 C 上被 f 变换到复平面 C' 的原点的那些点.

库恩把一系列复平面 C_{-1}，C_0，C_1，C_2，…，像摩天大楼面一样排好，在上面划线，把它们全部分割成三角形（图 1.3）. 从 C_0 开始，每向上一层，线的密度就增加一倍，并且除 C_{-1} 略有不同之外，其余各层的剖分规律完全相同. 库恩就是要用这些越来越细的三角形网格，使多项式的根就范.

相邻两层之间，按照一定的规则，连起许多直的斜的"钢筋"，把两层之间的空间全部划分成一个一个四面体. 图 1.4 展示了 C_{-1} 和 C_0 之间一个立方体的剖分情况，立方体被分割成 5 个四面体. 把这 5 个四面体分离开看看，就成了图 1.5. C_0 以上任两层 C_k 和 C_{k+1} 之间的一个立方体的剖分情况，则如图 1.6 所示. 这些剖分规则，是高度规律性的.

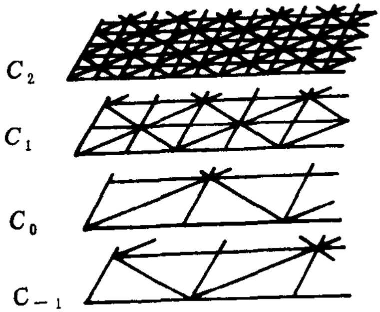

图 1.3

剖分以后，留下这些"钢筋骨架"，就是库恩的越往上越密的大篱笆（这时我们知道，图 1.2 的篱笆没有画出密密麻麻的对角斜线）.

现在，在 C_{-1} 上取一个边长 2m 格的方块 Q_m，它的边缘（记作 ∂Q_m）上有 8m 个顶点.（顶点即网格三角形的顶点.）

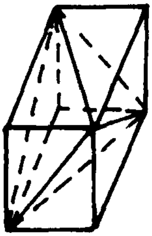

图 1.4

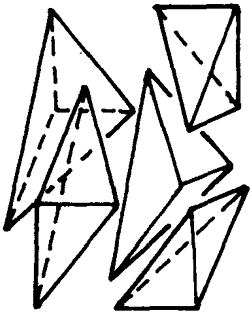

图 1.5

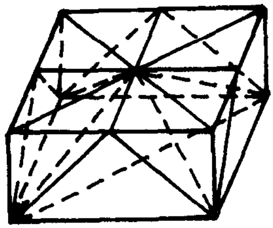

图 1.6

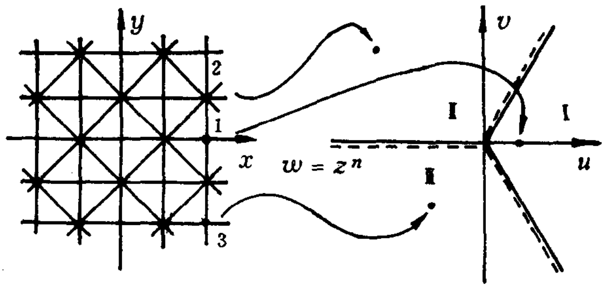

图 1.7　$m=2$（$n=3$）时的培养皿 Q_m 及标号

大家知道，对于每一个复数 z，它的 n 次幂 z^n 还是一个复数. 用三条射线把复平面 C' 分成相等的三个扇形部分Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ（图 1.7）. 如果一个顶点所代表的复数 z 的 n 次幂 $w=z^n$ 落在Ⅰ里，就给这个顶点标号 1；落在Ⅱ里，就标号 2；

落在Ⅲ里，就标号 3．这样，就可以把 C_{-1}上 Q_m 内的顶点全部按照幂函数 $w=z^n$ 标好号．

幂函数 $w=z^n$ 把 C 平面上绕原点一圈的正方形周界，变成 C' 平面上绕原点 n 圈的一条曲线．所以，当 m 较大（$m\geqslant 3n/2\pi$）时，∂Q_m 上的顶点，按照逆时针方向，只能循序渐进地标号，即相邻顶点标号只能有 1→1，1→2，2→2，2→3，3→3，3→1 六种情况，并且 1→2 的棱恰有 n 条，相应于 C'平面上的曲线由Ⅰ进入Ⅱ n 次（图 1.8）．库恩在这 n 个 1→2 棱的中点各栽一个芽，就成了他的培养皿．

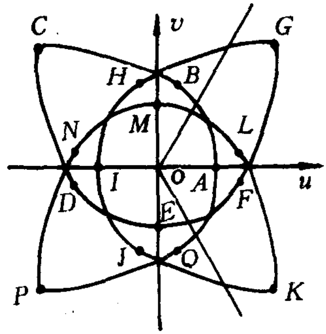

图 1.8

那么所给的多项式 $f(z)$ 的信息又怎样传给大篱笆呢？只要对 C_0 及 C_0 以上每一层面上每个顶点 z 算一下 $f(z)$，和上面一样，如 $f(z)$ 落在Ⅰ，z 就标号 1；如 $f(z)$ 落在Ⅱ，z 就标号 2；如 $f(z)$ 落在Ⅲ，z 就标号 3，这样一来，篱笆上的所有顶点都可以有一个标号 1 或 2 或 3．这些简单的 1，2，3 数字，就构成 f 的全部信息．我们注意，培养皿（在 C_{-1}上）是按照 $w=z^n$ 标号的，而大篱笆（C_0 以上）是按照 $w=f(z)$ 标号的，它们的信息是不同的．

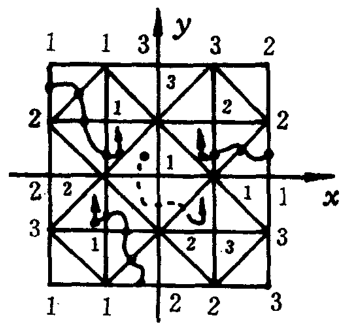

图 1.9 破土前藤的生长情况

现在，这 n 个芽怎样生长呢？看图 1.9，库恩规定，从 1→2 棱中点开始，向 Q_m 里钻，实行“遇到有 1，2 两个标号的棱就穿过去”的规则，寻找具有 1，2，3 三个标号的完全标号三角形．如果不遇到完全标号三角形，藤就要穿过去，而 Q_m 内三角形数目有限，所以每条藤一定会到达一个完全标号三角形（图 1.10，图 1.9）．到达完全标号三角形时，藤就抬头出土，开始向上攀延（图 1.11）．

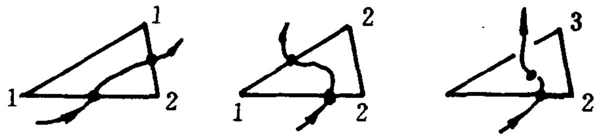

图 1.10　藤在 Q_m 内的生长

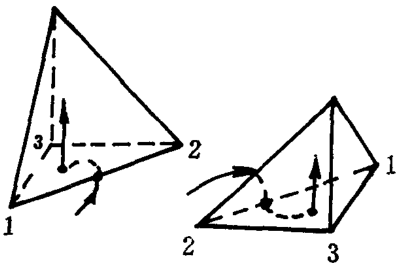

图 1.11　破土抬头

向上攀延的规则是：遇到四面体的完全标号三角形的侧面，就穿过去，进入另一个四面体．这样，一条藤通过一个完全标号三角形进入一个四面体，那么不论第四个顶点如何标号，它总可通过另一完全标号三角形穿出去（图 1.12）．所以，藤的生长是无止境的．

已经出土的藤，会不会又钻入泥土（回到 C_{-1}）呢？可能的．库恩规定，重新入土后，仍按“遇 1→2 棱穿过去”的规则生长，又总可找到另一完全标号三角形，再次抬头出土．图 1.9 中虚线的一段，就是重新入土而又重新出土的一段．

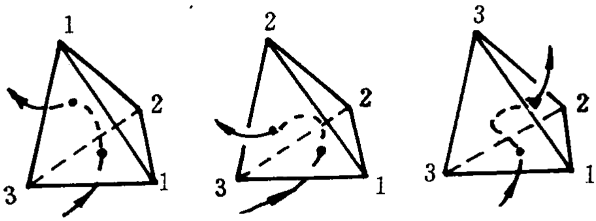

图 1.12　不论第 4 顶点如何标号，总可穿过

不难证明，除了有限的曲折往返外，n 条藤都要不断向上伸延，不交叉，不分叉，每条藤指向 $f(z)$ 的一个根.

方法确实妙，但每条藤指向多项式的一个根还要说明一下. 我们回过头来看看，复平面 $C_k(k \geqslant 0)$ 上，完全标号三角形是什么意思. 根据标号规则，它的三个顶点经过变换 f 之后分别落在Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三部分，所以，变换后的三点包围着原点（图 1.13）. 因此，我们有理由期望这个完全标号三角形内有一点 $\bar{z}$，被 f 变换到 C' 平面的原点：$f(\bar{z}) = 0$. 事实上，当 k 较大时，完全标号三角形内有根的猜想，在略加修改之后，是成立的.

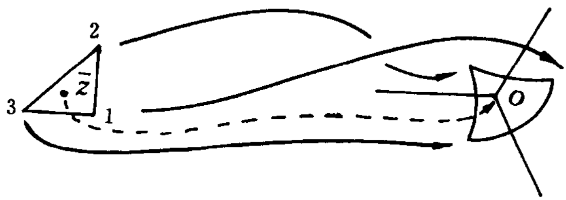

图 1.13　完全标号三角形内可望有一个根

既然藤在完全标号三角形内穿行，完全标号三角形内有根，所以藤与多项式的根的距离不超过三角形的尺度．但三角形就是大篱笆的网眼，越向上网眼越小，所以这些藤与多项式的根就不得不越来越靠近．取极限，这 n 条藤就捕捉住多项式的全部 n 个根．

库恩算法经济吗？

这种方法计算量会不会太大？前面说过 f 的信息要传给大篱笆．若对篱笆上每个顶点都算一下 $f(z)$，这还了得？不必担心，我们的藤是会自动搜索目标的，只有藤经过的那些顶点，才需要把 $f(z)$ 真的算一下．这些藤在最下若干层时，由于 C_{-1} 用 $w=z^n$ 标号，C_0 以上用 $w=f(z)$ 标号，变动十分剧烈，是一个从 z^n 向 $f(z)$ 调整的阶段．但以后，就几乎笔直向上生长，很快就达到很高的精度（参看图 1.2）．图 1.14 是计算机追踪某个多项式的一个根的计算点列从找到完全标号三角形起的一段，我们看到，经过最初的曲折摸索之后，计算点列很快就捕捉住多项式根的所在，并迅速向上发展，亦即向精度发展．C_4 以后，计算精度就不是我们这个图所能表示的了．我们所说的藤，就在这座由四面体堆砌成的玲珑宝塔中穿行．所谓藤的生长攀延，就是计算点列的伸延．

我们还看到，不管具体的 n 次多项式 $f(z)$ 是怎样的，只要 n 相同，Q_m 就都是由 $w=z^n$ 标号的，也就是说，出发点是规范化的．这在计算实施方面，也是颇有意义的．

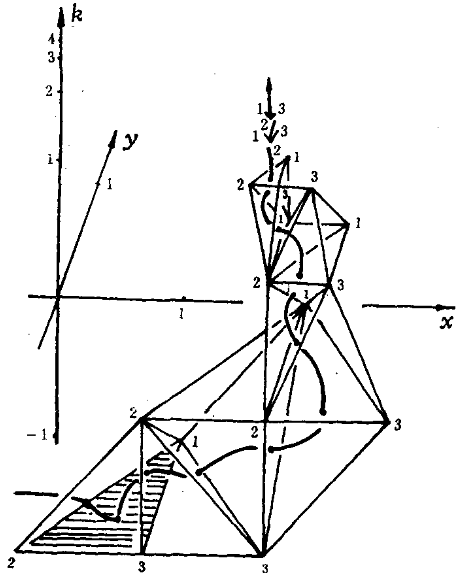

图 1.14　一个计算实例，塔上标号引导计算．藤在塔内穿行．

库恩算法的内涵

库恩的方法，构思新颖，几何形象十分鲜明．数学是抽象的，但它一定是枯燥的吗？否．抽象中有具体，枯燥的外表下有着生动丰富的内容．库恩的例子就是又一个有力的证明．

现在我们回到文章的开头．“不动点”是什么意思呢？

我们知道，一个函数就是数域之间的一个变换．如果 $g(x)=x$，即 x 通过变换 g 仍变为它自己，没有动，x 就叫

做 g 的一个不动点．数学中许多问题都可作为不动点问题来处理．例如，求一个方程 $f(x)=0$ 的根，就可以化成求 $g(x)=f(x)+x$ 的不动点，这是因为 $g(x)=x$ 等价于 $f(x)=0$.

不动点理论是拓扑学的一个分支．早在 60 年代，中国青年数学家姜伯驹、石根华在江泽涵教授的指导下，曾经对这一理论作出贡献．关于不动点的存在，最早是 1912 年布劳维尔（L. E. Brouwer）证明了著名的定理：球体到自身的连续映射至少有一个不动点．从那时起，不动点定理不仅在纯粹数学中是重要的，而且成为证明一大类应用数学问题解的存在性的有力工具．但是直到 60 年代初，还没有一种有效的算法能具体求出不动点，因而往往不能求出那些应用数学问题的解．

1967 年，美国耶鲁大学的赫伯特·斯卡夫（Herbert E. Scarf）教授作出突破，提出一种以有限点列的计算逼近不动点的算法．自此以后，不动点算法作为一种有效的计算方法迅速而广泛地发展起来，取得了一系列成果，为拓扑学思想应用于实际问题开拓了一个新方向，为一系列应用数学问题提供了新的解法．值得注意的是不动点算法是在求解的同时解决解的存在性问题的．即如库恩的例子，实际上同时就是代数基本定理的一个构造性的新证明．

不动点算法的要点，一是“剖分”，如同库恩建造大篱笆要将平面分割成三角形、将空间分割为四面体等所谓“单纯形”，剖分是计算的基础．二是“轮回”（Pivoting），也称转轴，在库恩的例子中，这种轮回是通过对单纯形顶点的适当的标号法来实现的，凭标号引导“藤”的生长，即引导计算点列的伸延．“剖分”和“轮回”计算，是组合拓扑的典型方法．