大学公共平台核心课程

系列教材

GONGCHENG SHUXUE

工程数学

李 政 主编

东南大学出版社

大学公共平台核心课程系列教材

工 程 数 学

主　编：李　政

副主编：陈卫忠　吴长楠

陈　剑

东 南 大 学 出 版 社

·南京·

内容提要

本书是按照国家高等职业、高等专科教育工程类、经济类各专业应用高等数学教学基本要求而编写的。全书分为五大模块共17章，主要内容包括：线性代数、概率统计、复变函数、积分变换和数学建模等。针对高职、高专学生的特点，本书在叙述上力求通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于学生自学。将传统的教学内容与数学建模的方法结合起来是本书的一大特色，本书专门用一编的篇幅，通过一些典型的案例，简要介绍了数学建模的基本内容和数学方法，注重了对学生应用能力的训练和培养，增强了学生的学习兴趣。

本书是高职、高专院校应用高等数学系列教材之一，也可作为职工大学、广播电视大学同类课程的教材，在选用时可根据各专业的不同需要选讲相应的内容。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/李政主编. 一南京：东南大学出版社，2005.8
(大学公共平台核心课程系列教材)
ISBN 7—5641—0066—4

Ⅰ. 工... Ⅱ. 李... Ⅲ. 工程数学-高等学校-教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 060670 号

工程数学

主　编	李　政		
选题总策划 整体设计	李　玉	责任印制	张文礼
责任编辑	朱经邦	封面设计	康　靖

出版发行	东南大学出版社
社　址	南京四牌楼2号
邮　编	210096
经　销	江苏省新华书店

印　刷	南京京新印刷厂
开　本	700mm×1000mm　1/16
印　张	20.5
字　数	490千字
版　次	2005年8月第1版第1次印刷
印　数	1—4000册
定　价	35.00元

(凡因印装质量问题，可直接向读者服务部调换。电话：025－83792328)

大学公共平台核心课程系列教材编委会名单

出版说明

教材建设是高等学校基本建设之一,教学改革的种种设想和试验,大多要通过教材建设来具体体现,教材建设反过来又推动和促进教学改革,两者间的关系是相辅相成的。因此,高质量的教材是培养高质量优秀人才的基本保证,发展高等教育,提高教育质量必须建设高质量的教材。目前,由东南大学出版社出版发行的"大学公共平台核心课程"系列教材,是以科学的教育发展观来统领教材编写体系,立足于大学生综合素质的提高,注重大学生创造性思维与创新能力的培养、有较强适用性的公共平台核心课程教材。本套教材第一辑将出版《应用微积分》、《工程数学》、《体育与健康》、《体育欣赏》、《经济学基础》共五种,以后还将陆续出版其他教材。

"大学公共平台核心课程"教材的编写基于以下几方面的考虑:一是学生综合素质的提高。加强基础,拓宽知识,培养能力,激励个性,提高综合素质,这也是目前高等教育整体改革的重要步骤,教材编写将重视人才培养模式调整和改革,为学生融会中外、贯通古今,掌握现代科学向交叉科学和边缘科学发展的理论奠定良好的基础。二是学生创新精神的培养。江泽民同志提出:"创新是不断进步的灵魂……创新,很根本的一条就是要靠教育,靠人才。""大学公共平台核心课程"教材编写将最大限度地反映教学内容和课程体系改革的成果,成为适合创造性人才培养的教材,体现教育思想和教育观念的转变,根据科技进步和社会发展的最新成果不断地充实和更新教学内容。我们坚信,教材的先进性是人才培养创造性的基本前提,站在知识最高点才具有高瞻远瞩的眼光与勇于创新的信心。三是教材的精品意识。"大学公共平台核心课程"教材的编写准确把握精品的科学内涵,不仅要求教材的高质量和高水平,还必须能够体现教材的先进性、实用性,并且能够提供全方位的人性化的服务。"大学公共平台核心课程"教材的编写力求达到思想性、科学性和方法论相统一;先进性和基础性相统一;综合性和针对性相统一;教材建设与教学改革相统一。

随着经济的发展，社会分工也在发生变化，专业交叉、职业渗透现象引起高校的重视，因而，对复合型人才的培养与需求，成为高校及用人单位普遍关注的热点问题。为提高人才竞争力，强化学生的综合素质培养，基础课教学正在加强，文理之间的学科交融越来越多，人才关键(核心)能力的培养引起教育工作者的高度重视。“大学公共平台核心课程”教材，重在加强学生基础课教学，关注人文教学，将人才综合素质的发展与提高为己任，真正实现德智体全面发展与人的个性化的统一，人文精神与科学素质的统一，文化传授与文化的选择、创新的统一，注重学生创造性思维与创新能力的培养和挖掘。“大学公共平台核心课程”教材的编写，同时着眼于具有高等教育水平的知识、技术能力及反映这些知识、技术能力内涵的理论知识的目标系统；有完成理论教学、具有高等教育特色的教学方法和达到知识、技术能力目标的训练方法；教材内容紧随科学技术、经济发展变化。在教材编写过程中，既吸收了目前最新的基础理论观点和实践、实验成果，又注意淘汰陈旧的知识、技术内容，保持教材的先进性。

“大学公共平台核心课程”教材编写将适应教材国际化、多样化、个性化发展趋势，用最先进的教学内容来武装学生，缩小与发达国家高等教育之间的差距。因此，“大学公共平台核心课程”教材的编写过程是动态的，随着教育、教学改革的深入发展，我们将关注国内外学术发展前沿、跟踪学科发展步调来不断地修订教材内容，保持教材内容的新鲜和知识的先进性。除纸质教材外，还将开发音像媒体、网络课件、CAI课件、教学素材库、电子教案、试题库及考试系统和多媒体教学软件等教材，将各种相互作用、相互联系的媒体和资源有机地整合在一起，形成立体化教材。

“大学公共平台核心课程”教材的编写还处于探索阶段，随着一些新课程的开发、新教材的编写，“大学公共平台核心课程”教材的体系将不断完善，我们愿意为全国高校学生提供更多的精品教材。

大学公共平台核心课程系列教材编委会

2005年5月

Preface 前言

21世纪科学技术的发展使得科技及其他领域的应用问题更趋数学化，更注重数学科学的综合应用，数学各学科的传统界限更加模糊。如何适应这种变化，是摆在我们每个数学教育工作者面前的课题。正是为了适应我国高等教育的迅猛发展，满足新时期教育改革对数学教学的要求，本着百花齐放的愿望，依照教育部颁布的高等学校工程专科数学教学大纲，我们编写了这本教材。

在本书的编写过程中，我们本着"以应用为目的，以必须、够用为度"的原则，着重数学方法的介绍，注意从实际问题中引入概念，尽量减少理论推导和证明，注重培养学生的基本运算能力、分析问题和解决问题的能力。本书试图在新颖性和时代感上有所突破，并进行了一些新的尝试，主要有以下特点：

1. 内容模块化。本书将其主要内容设置为五大模块：线性代数、概率统计、复变函数、积分变换以及数学建模。五大模块基本涵盖了高等学校工程专科除微积分外的其他应用数学内容，各模块之间既相互独立又相互衔接为一体，便于高等学校工程专科、经济学科各专业根据本专业实际需求组合相应的模块进行教学，使工程应用数学内容成为一有机整体。

2. 增加了数学建模的内容。数学建模教学与竞赛的开展对数学课程的教学改革和高素质的人才培养起到了巨大的推动作用，将数学建模和数学实验的内容引入课堂，不失为在不打乱正常教学秩序下，数学教学体系、内容和方法改革的一项有益试验，顺应了时代发展的潮流。本书简要介绍了数学建模的由来，并用了相当篇幅结合数学实验的应用，通过精心挑选的典型案例介绍了数学建模的基本内容和数学方法，将传统的教学内容与数学建模结合起来，尽量使各门课程渗透、融入到

Preface 前言

其中，使数学建模的内容贴近生活、通俗易懂，激发学生的学习兴趣。

本书由线性代数、概率统计、复变函数、积分变换和数学建模等五大模块共17章组成，主要包括：行列式与矩阵、线性方程组、相似矩阵与二次型、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、抽样与抽样分布、参数估计与假设检验、一元线性回归、复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、傅立叶变换、拉普拉斯变换以及数学建模简介等内容，由李政任主编，陈卫忠、吴长楠、陈剑任副主编，参加编写的有：陈剑（第1章，第2章，第3章），王丽华（第4章，第5章），李政（第6章，第7章），陈卫忠（第8章），陆卫丰（第9章，第10章，第11章），吴长楠（第12章，第13章，第14章，第15章），王庆（第16章，第17章）；陆卫丰、王庆绘制了本书的大部分图形。全书最后由主编和副主编修改定稿。

本书的编写与出版，得到了东南大学出版社的大力支持和帮助，一些同行专家也提出了许多有益的建议，在此一并致谢。

限于编者水平，书中谬误之处难免存在，衷心欢迎使用本书的老师、同学和读者们批评指正。

编　者

2005年6月

目录

Contents

1 行列式与矩阵

行列式与矩阵是线性代数中的两个基本概念，是求解线性方程组的重要工具. 矩阵论的方法广泛运用于现代管理科学、自然科学、工程技术等各个领域. 本章通过介绍二阶、三阶行列式，引出 n 阶行列式的定义，通过实际问题引出矩阵的定义，并在此基础上分别介绍行列式和矩阵的性质及运算法则，介绍矩阵的初等行变换、矩阵的秩及逆矩阵.

1.1 行列式

1.1.1 行列式的概念

1) 二阶与三阶行列式

先来看一个引例:

例 1 解二元一次线性方程组 $\begin{cases}2x-3y=5\\ x+2y=-1\end{cases}$.

解 将第一个方程记为 ① 式，第二个方程记为 ② 式.

①$\times 2-$②$\times(-3)$ 得 $(2\times2-1\times(-3))x=5\times2-(-1)\times(-3)$,

①$\times 1-$②$\times 2$ 得 $(-3\times1-2\times2)y=5\times1-(-1)\times2$,

所以，方程组的解为 $x=\dfrac{5\times2-(-1)\times(-3)}{2\times2-(-3)\times1}=1, y=\dfrac{2\times(-1)-1\times5}{2\times2-(-3)\times1}=-1$.

一般地，我们可用初等代数里的加减消元法解一个二元一次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$.

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.1.1}$$

上式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得，为了便于记忆，考虑到 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 和方程组中变量 x_1,x_2 系数的位置关系 $\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{matrix}$，作如下定义:

定义 1.1 把表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 记作 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，称为二阶行列式，即 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 叫做行列式的**元素**，这里共有 2^2 个元素；横排叫做**行**，纵排叫做**列**，这里共有两行两列；元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列. 例如：元素 a_{21} 位于第 2 行、第 1 列.

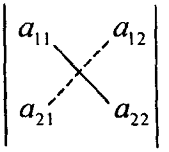

图 1.1

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆（参看图 1.1）.

把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，那么，二阶行列式的值便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差. 例如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2$.

于是，$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. 若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，（1.1.1）式可写成 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$. 这里的分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式（称为系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 后所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 后所得的二阶行列式. 例 1 中，$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7$，$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=7$，$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-7$，于是，$x=\dfrac{D_x}{D}=1$，$y=\dfrac{D_y}{D}=-1$.

类似地，我们有三阶行列式的定义如下：

定义 1.2 设有 3^2 个数排成 3 行 3 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$，记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.1.2)$$

称（1.1.2）式的左端为**三阶行列式**，右端为**三阶行列式的计算式**. 三阶行列式的计算式共有六项，其中三项带“+”号，三项带“−”号，每项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积. 同样用对角线法则来记忆，把构成每一项的三个元素分别用实线和虚线按图1.2所示的方式连接起来，称 a_{11} 到 a_{22} 再到 a_{33} 的实连线为**主对角线**，a_{13} 到 a_{22} 再到 a_{31} 的虚连线称为**副对角线**，用实线连接的三个元素之积带“+”号，用虚线连接的三个元素之积带“−”号. 例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\times 5\times(-1)+4\times(-2)\times 3 +2\times 6\times 0-3\times 5\times 0-6\times(-2)\times 1-2\times 4\times(-1)=-9.$$

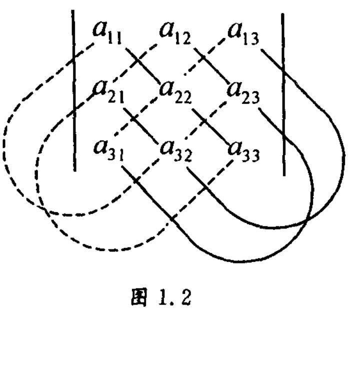

图 1.2

我们把三阶行列式记作 D，并将其计算式整理为：$D=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$ 根据二阶行列式的定义，

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.1.3)$$

这里,分别与 a_{11}、a_{12}、a_{13} 相乘的三个二阶行列式是在 D 中分别划去 a_{11}、a_{12}、a_{13} 所在的行和列后剩下的元素保持原有相对位置所组成的.

D 的计算式还可以整理为:

$$\begin{aligned} D &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \\ &= a_{21}\left(-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) \end{aligned} \qquad (1.1.4)$$

同样,这里分别与 a_{21}、a_{22}、a_{23} 相乘的三个二阶行列式是在 D 中分别划去 a_{21}、a_{22}、a_{23} 所在的行和列后剩下的元素保持原有相对位置所组成的.

三阶行列式的计算式可以按任意行或列整理为上述形式.

例 2 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $D = 1\times\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 7 - 2\times(-4) + 3\times(-8)$
$= -9$.

三阶行列式和二阶行列式一样代表的是一个数值,且它可转化为二阶行列式的计算得到.下面我们将上述结果推广,引入 n 阶行列式的定义.

2) n 阶行列式

定义 1.3 设有 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$, 称

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **为 n 阶行列式,简记作 $\det(a_{ij})$. n 阶行列式代表的是一个数值.**

特别地,我们规定一阶行列式:$|a| = a$.

为了探讨 n 阶行列式代表的数值如何计算得到,参照三阶行列式的计算式,先给出如下定义:

定义 1.4 在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素保持原有相对位置所组成的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$ 叫做元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，而把 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，这里 (-1) 的幂指数是元素 a_{ij} 的两个下标之和.

例如：四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 7 & 8 \\ 10 & -2 & -7 & 0 \end{vmatrix}$ 中元素 $a_{33}=7$ 的余子式为 $M_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 10 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-6$，代数余子式为 $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 10 & -2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}(-6)=-6$.

又如：二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$ 中元素 $a_{12}=-2$ 的余子式为 $M_{12}=|-4|=-4$，代数余子式为 $A_{12}=(-1)^{1+2}(-4)=4$.

在三阶行列式中，我们可以看到，$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，$A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. 根据(1.1.3)式，三阶行列式 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$. 同样地，根据(1.1.4)式，$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$.

将此结果推广到 n 阶行列式，可得到如下结论：

n 阶行列式等于任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,3,\cdots,n);$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,3,\cdots,n).$$

若行列式等于它的第 i 行(或第 j 列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，我们就称行列式按第 i 行(或第 j 列)展开.

例如：有 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，将其按第 2 行展开，可得

$$D=-3\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -9 & 2 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}+7\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -5 & 2\\5 & -9 & 7\\4 & -6 & 2\end{vmatrix}+4\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\5 & -9 & 2\\4 & -6 & 1\end{vmatrix};$$

将其按第 4 列展开，可得

$$D=2\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}-3 & 7 & -1\\5 & -9 & 2\\4 & -6 & 1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\5 & -9 & 2\\4 & -6 & 1\end{vmatrix}$$

$$+7\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\-3 & 7 & -1\\4 & -6 & 1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\-3 & 7 & -1\\5 & -9 & 2\end{vmatrix}.$$

例 3 用按列展开法计算例 2 中的三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\0 & -2 & -1\end{vmatrix}$.

解 将其按第 2 列展开，得 $D=2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\0 & -1\end{vmatrix}+5\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{vmatrix}$

$+(-2)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=-2\times(-4)+5\times(-1)+2\times(-6)=-9.$

例 4 计算 4 阶对角行列式(不在对角线上的元素均为零的行列式)

$$D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0 & 0\\0 & 0 & \lambda_3 & 0\\0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{vmatrix}.$$

解 将行列式按第 1 行展开，可得

$$D=\lambda_1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\lambda_2 & 0 & 0\\0 & \lambda_3 & 0\\0 & 0 & \lambda_4\end{vmatrix}$$

再将三阶行列式按第 1 行展开，得

$$D=\lambda_1\times\lambda_2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}\lambda_3 & 0\\0 & \lambda_4\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

一般地，n 阶对角行列式 $D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$

例 5 计算上三角形行列式(每一列中位于主对角线元素下方的元素都为零的行列式).

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$