解析几何

高中数学解难释疑

天津人民出版社

高中数学解难释疑
解析几何

胡炯涛　李大元　马　骁　编
赵慈庚　余炯沛　　　　　审订

天津人民出版社

高中数学解难释疑

解 析 几 何

胡炯涛　李大元　马　骁　编

*

天津人民出版社 出版

（天津市赤峰道130号）

天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行

*

787×1092毫米　32开本　9.5印张　195千字

1991年4月第1版　1991年4月第1次印刷

印数：1－22,430

ISBN 7-201-00747-5/G·314

定　价：3.85 元

序

这部丛书是根据《全日制中学数学教学大纲》按照《高中数学课本（甲种本）》的章节，给中学生编写的辅助读物，共分五册，与六册高中课本对应使用（代数课本第二、三册对该书代数第二册）；目的是使读者深入理解基本知识，加强基本技能，提高逻辑思维与空间想象能力和分析问题解决实际问题的能力，内容都按课本章次排列，每章的安排大致如下：

一、基本内容：这里将学生起码要掌握的东西，在不失内在联系的原则下，分类整理，既便于记忆，又重点突出，使读者对全章概况，一目了然.可以说这是重点复习，也是全章纲要，所谓数学难学，多半由于学习不得其法.学习方法中重要的一点是善于将知识统化，抓住了系统，就会感到轻松.这部分内容对于不会自己整理系统的同学是很大的帮助.

这里还配备一些有代表性的例题，各用一两种方法按正确格式解答出来.题型比较齐备.学生易犯的错误，都从概念上或逻辑上加以解说，层次复杂的解法则先列举步骤.凡属关键所在，则事前分析或在解完后详细分辨，以期学生学到解

题的基本技能；并附有一组习题．由读者揣摩练习．

二、解难释疑掌握基本内容仅是一断要求．希望提高学生的知识水平，还需要将课本每章的重点与难点以及各部分的内在符系详细剖析．证题或解题还有许多不成文法的规律，也是揭示给读者．本书对课本每章教材，选定若干题目撰成短文，每篇论述一两个问题．中间适当地插入一些范例．有时与将问题略加延拓．这些短文是本书的精华，是精心的辅导，不是泛泛的解说．

以上是我对于本书的观感．大家知道，辅助读物要发课本之所未发，要想学生之所未想，编写工作相当繁重．非有多年的教学实践，不能想得周到，现在这丛书有可能在各个方面给中学同学解难释疑，指出明路．我乐见青年将得到一本好的读物．

赵慈庚

一九八三年三月四日于北京师大数学系

目　　录

第一章　直　　线

双 基 知 识

（一）有向线段、定比分点

1.有向线段

（1）有向直线：规定了正方向的直线叫做有向直线.

（2）有向线段：规定了起点和终点的线段叫做有向线段.

（3）有向线段的数量：设有向线段$\overline{AB}$在有向直线l上（或与l平行），根据$\overline{AB}$与有向直线l的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数叫做有向线段的数量或数值，用AB表示.在数轴上，$AB=x_B-x_A$.

2.直角坐标系

（1）平面直角坐标系：在平面内选定有公共原点、公共长度单位，且互相垂直的两条数轴Ox，Oy（如图1-1-1）.设M是平面上任意一点.从它引出Ox轴的垂线MP和Oy轴

的垂线MQ.以x,y分别表示有向线段的数量OP, OQ.数x,y分别称为点M的横坐标和纵坐标，并写成(x,y)的形式．这样一对有序实数称为点M的坐标．

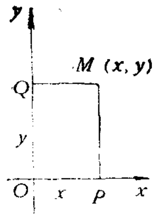

图 1-1-1

反之，一对有序实数(x, y)也可确定平面上的一个点M．

在平面上确定点的位置的这种方法称为笛卡儿直角坐标系*.

在给定的直角坐标系下，平面上的点和一对有序实数(x, y)之间建立了一一对应关系．

（2）两点间的距离公式：已知两点$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$，则$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

（3）定比分点公式：若$P(x, y)$分以$P_1(x_1, y_1)$为起点，$P_2(x_2, y_2)$为终点的有向线段$\overline{P_1P_2}$的比为λ，则

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}.$$

特别P_1P_2的中点坐标为$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

（4）以$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$为顶点

---

* 见H.M别斯金《解析几何学教程》，56年版，p.39.另一种定义是：平面上两条互相垂直的有序的坐标轴Ox、Oy称为平面笛卡儿直角坐标系，并且把每一条轴的坐标原点作为它们的公共点，见A.Γ齐普金《中学数学手册》，83年版，p.171.

的三角形重心坐标为$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

(二) 直线方程及两直线的位置关系

1.直线方程的几种主要形式

名 称	方 程	备 注
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	过定点$P(x_0, y_0)$,且斜率为k
斜截式	$y=kx+b$	在y轴上截距为b,斜率为k.也是过点$(0, b)$的点斜式
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	过已知两点$P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	在x轴、y轴上的截距分别为a、b.也是过点$(a, 0)$,$(0, b)$的两点式
一般式	$Ax+By+C=0$	

2.两直线的位置关系

(1)两直线的位置关系:

两直线方程	位置关系	充要条件
l_1: $y=k_1x+b_1$ l_2: $y=k_2x+b_2$	l_1与l_2重合	$k_1=k_2$, $b_1=b_2$
	$l_1//l_2$	$k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$
	$l_1\perp l_2$	$k_1\cdot k_2=-1$
l_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$ l_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$	l_1与l_2重合	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$
	$l_1//l_2$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$
	$l_1\perp l_2$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

(2)两直线夹角:两条直线相交,可以构成四个角,

我们把其中不大于直角的角叫做两条直线所成的角，简称两条直线的夹角.设θ为两直线l_1，l_2的夹角，l_1，l_2的斜率为k_1，k_2，则 $\mathrm{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$.

设θ_1是l_1依逆时针方向旋转到l_2重合时所转的角，则

$$\mathrm{tg}\theta_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}.$$

3.点到直线的距离公式

点$P(x_0, y_0)$到直线$Ax+By+C=0$的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4.不等式$Ax+By+C>0$（或<0）表示的区域

适合不等式$Ax+By+C>0$的点$P(x, y)$的全体组成一个区域，它是直线$Ax+By+C=0$某一侧的半平面.

例如，当$B>0$时，$Ax+By+C>0$就是$y>-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，这说明满足不等式的点$P(x, y)$在直线$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，即$Ax+By+C=0$的上侧.

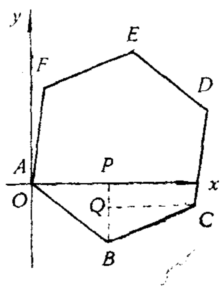

图 1-1-2

〔例1〕如图1-1-2，有正六边形$ABCDEF$，A与原点重合，B的坐标为$(4, -3)$，求点C的坐标.

分析　本例的关键是利用解三角形的方法　求出顶点C到Ox轴和Oy轴的距离.

解：过B作x轴的垂线BP，又过C作x轴的平行线，交BP于Q点。

∵点B的坐标为$B(4,-3)$，

∴ $|AB|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\sin\angle ABP=\frac{4}{5}$，

$\cos\angle ABP=\frac{3}{5}$。

∵ $\angle ABC=120°$，

∴ $\sin\angle CBQ=\sin(120°-\angle ABP)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}；$$

$$\cos\angle CBQ=\cos(120°-\angle ABP)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}.$$

∴ $|BQ|=5\cos\angle CBQ=\frac{1}{2}(4\sqrt{3}-3)$，

$|CQ|=5\sin\angle CBQ=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}+4)$。

于是 $x_C=4+|QC|=6+\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

$y_C=-3+|BQ|=-\frac{9}{2}+2\sqrt{3}$。

∴C点的坐标是$\left(6+\frac{3}{2}\sqrt{3},\ -\frac{9}{2}+2\sqrt{3}\right)$。

〔**例2**〕已知$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$为任意六边形，M_1、M_2、…、M_6分别是A_1A_2、A_2A_3、…、A_6A_1的中点，证明$\triangle M_1$

M_3M_5和$\triangle M_2M_4M_6$有相同的重心。

分析　将六边形置于直角坐标系内。显然 M_i 的坐标可求，进而用三角形重心坐标计算公式可求得$\triangle M_1M_3M_5$和$\triangle M_2M_4M_6$的重心坐标。如果两重心坐标相同，命题即可得证。

证　设A_i的坐标为$(x_i, y_i)(1\leqslant i\leqslant 6)$，则按中点坐标公式得$M_1$、$M_2$、…、$M_6$的坐标顺次是

$$M_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)、\quad M_2\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)、$$

$$M_3\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}\right)、$$

$$M_4\left(\frac{x_4+x_5}{2}, \frac{y_4+y_5}{2}\right)、\quad M_5\left(\frac{x_5+x_6}{2}, \frac{y_5+y_6}{2}\right)、$$

$$M_6\left(\frac{x_6+x_1}{2}, \frac{y_6+y_1}{2}\right).$$

再由三角形重心坐标公式知$\triangle M_1M_3M_5$的重心为

$$G\left(\frac{x_1+\cdots+x_6}{6}, \frac{y_1+\cdots+y_6}{6}\right),$$

$\triangle M_2M_4M_6$的重心也是G。命题得证。

〔**例3**〕已知三角形的顶点$A(3, -5)$，$B(-3, 3)$，$C(-1, -2)$试求BC边上中线AD和$\angle A$平分线AE的长度。

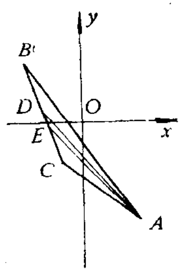

图 1-1-3

分析　为求$|AD|$，$|AE|$应先确定D，E的坐标。D，E都是BC上的定比分点，故本例可解。

解：$\because D$是BC的中点（如图1-1-3）

$\therefore\quad x_D=\dfrac{-3-1}{2}=-2,\ y_D=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}.$

$$|AD|=\sqrt{[3-(-2)]^2+(-5-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{25+\frac{121}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{221}}{2}.$$

$\because\quad |AB|=\sqrt{6^2+8^2}=10,\ |AC|=\sqrt{4^2+3^2}=5,$

$\therefore$ 由三角形角平分线性质知$\dfrac{|BE|}{|EC|}=\dfrac{|AB|}{|AC|}=2$，故

$$x_E=\frac{-3-2}{1+2}=-\frac{5}{3},\ y_E=\frac{3-4}{1+2}=-\frac{1}{3}.$$

$$|AE|=\sqrt{\left(3+\frac{5}{3}\right)^2+\left(-5+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{14}{3}\sqrt{2}.$$

〔**例4**〕通过点(8，6)引四条直线，它们倾斜角的比为1:2:3:4.已知第二条直线的方程为$3x-4y=0$，求其余三条直线方程.

分析 直线都是过点(8，6)的，根据题设，要写出它们的方程可先求出它们的斜率.

解：设第二条直线的倾斜角为2α，则第一、三、四条直线的倾斜角顺次为$\alpha,3\alpha,4\alpha$.

$\because \mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{3}{4},$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}4\alpha=\frac{2\mathrm{tg}2\alpha}{1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}.$$

又由$\dfrac{3}{4}=\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$可得$3-3\mathrm{tg}^2\alpha=8\mathrm{tg}\alpha$，取正根，

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

进而$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}2\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}2\alpha} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{13}{9}$.

∴ 第一条直线方程为$y - 6 = \frac{1}{3}(x - 8)$，即$x - 3y + 10 = 0$

第三条直线方程为$y - 6 = \frac{13}{9}(x - 8)$，即$13x - 9y - 50 = 0$；

第四条直线方程为$y - 6 = \frac{24}{7}(x - 8)$，即$24x - 7y - 150 = 0$.

〔**例5**〕已知点$B(-3, 2)$，$C(4, 1)$.试在y轴上找一点A，使$S_{\triangle ABC} = 5$.

解：设A的坐标为$A(0, a)$（如图1-1-4）.

∵ $|BC| = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC} = 5$，∴ A到直线BC的距离$d = \frac{2S_{\triangle ABC}}{|BC|} = \frac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

另一方面，BC的方程为$\frac{y - 2}{1 - 2} = \frac{x + 3}{4 + 3}$，即$x + 7y - 11 = 0$.

∴ $A(0, a)$到BC的距离

$$d = \frac{|7a - 11|}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = \sqrt{2}，a = 3或\frac{1}{7}.$$

∴ 所求的点A为$(0, 3)$或$\left(0, \frac{1}{7}\right)$.

〔**例6**〕正方形的一个顶点在原点，它的一边的倾斜角

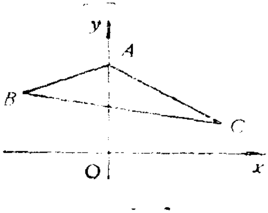

图 1-1-4

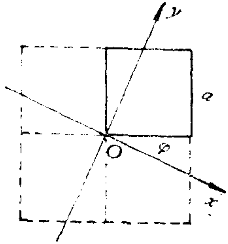

图 1-1-5

为φ，边长为a，求出正方形各边所在的直线方程.

解：如图1-1-5，显然，倾斜角为φ的一边所在直线方程为l_1：$y = x\text{tg}\varphi$，即$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0$.

过原点且与l_1垂直的边所在的直线方程为

$$l_2: y = x\text{tg}(90° + \varphi), \text{ 即} x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0.$$

∵ 另两边所在的直线分别与l_1，l_2平行，且距离为a.

故另二边所在的直线方程分别为

$$l_3: \quad \frac{|x\sin\varphi - y\cos\varphi|}{\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}} = a, \text{ 即} x\sin\varphi - y\cos\varphi = \pm a;$$

$$l_4: \quad \frac{|x\cos\varphi + y\sin\varphi|}{\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = a, \text{ 即} x\cos\varphi + y\sin\varphi = \pm a.$$

这里符号的组合是任意的.本例共有四解(参见图1-1-5).

习题 1-1-1

1. 设A，B，C，D在某一直线上，求证

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

2. 试证以$A(1, 1)$，$B(2, 3)$，$C(5, -1)$

为顶点的三角形是直角三角形。

3. 试在横轴上求点M，使它到点$N(2, -3)$的距离等于5。

4. 将点$A(1, -3)$和$B(4, 3)$间的线段分成三等分，试确定这两分点的坐标。

5. 已知$ab>0$，$bc>0$，则直线$ax-by=c$经过的象限是

(A) 第1，2，4象限；(B) 第1，2，3象限；

(C) 第2，3，4象限；(D) 第1，3，4象限；

(E) 第2，3象限。 (　　)

6. 下列直线中，哪一条与直线$2x-y-3=0$相交？

(A) $14x=7y$；(B) $2ax-ay+c=0\ (a\neq 0)$；

(C) $y=5+2x$；(D) $y=3-2x$；

(E) $4x-2y=C$。 (　　)

7. 已知四条直线的方程

(1) $3y-2x=12$，(2) $-2x-3y=10$，

(3) $3y+2x=12$，(4) $2y+3x=10$，

其中互相垂直的两条直线为

(A) (1)与(4)；(B) (1)与(3)；

(C) (1)与(2)；(D) (2)与(4)；

(E) (2)与(3)。 (　　)

8. 若方程$3x+by+c=0$与$cx-2y+12=0$表示同一条直线，而n表示b、c之值的组数，则n为

(A) 0；(B) 1；(C) 2；(D) 有限但大于2；

(E) 大于任何有限数。