全国教育科学“十五”规划重点课题研究成果

高等数学

（多元微积分）

谢国瑞　郝志峰　汪国强　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十五”规划重点课题研究成果

高等数学

（多元微积分）

谢国瑞　郝志峰　汪国强　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是一部适用于大学非数学类本科各专业（主要是工科及经济、管理类专业）的高等数学课程教材。全书分两册出版，分别标副标题：一元微积分、多元微积分。本册为多元微积分部分，主要由向量及空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、平面曲线积分、多重积分、第二型曲面积分、傅里叶级数等7章组成，书末附练习与习题参考答案及主要参考书目。涉及内容的深广度符合工学、经济学各专业对相应课程内容的教学要求，也能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的相应要求。

本书的编写比较注重教学法，并注意融入了编者们长期执教与研究这一课程教学的经验，以及对时代发展与高等教育大众化进程对高等数学课程提出新挑战的认识，因而对内容的展开、描述比较注意激发学生的学习兴趣，力求符合多数学生的认识规律。全书注重基本概念、基本理论、基本运算，适宜作为课程教材或参考用书。

由本书主编负责的"大学数学网络教育的研究与实践"获2005年国家优秀教学成果二等奖，本书为此项目的研究成果之一，可供普通高等学校非数学类的理工科及经济、管理与其他专业学生选用，也可供各类实际工作人员学习或参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（多元微积分）/谢国瑞，郝志峰，汪国强主编．—北京：高等教育出版社，2006.1
ISBN 7-04-017759-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．①谢…②郝…③汪…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第142403号

策划编辑　李艳馥　**责任编辑**　丁鹤龄　**封面设计**　张　楠　**责任绘图**　郝　林
版式设计　王艳红　**责任校对**　王　雨　**责任印制**　孔　源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2006年1月第1版
印　　张	22.5	**印　　次**	2006年1月第1次印刷
字　　数	410 000	**定　　价**	23.60元

物料号　17759-00

前　　言

编写本书的目的是为大学非数学类本科专业(主要是工科及经济、管理类专业)的高等数学课程提供一本合适的教材，全书分两册出版，分别以“一元微积分”及“多元微积分”为副标题。

本书包括了传统高等数学课程的全部教学内容，一元微积分部分主要包括函数、极限、连续及一元函数的微积分、常微分方程及无穷级数等；多元微积分部分主要包括向量及空间直角坐标系、多元函数微分学、二重积分及曲面积分(第一型)、平面曲线积分、多重积分、第二型曲面积分与空间曲线积分及积分公式、傅里叶级数等。涉及的深度大体与这些专业的高等数学课程的教学要求保持一致，并能达到全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中相应部分的要求，一元微积分部分的附录 1 就是为此而设(当然这也给出了求数列通项的一个办法)。

在本书中融入了编者长期执教这一课程的教学经验，又结合编者们对时代发展及高教大众化进程对高等数学课程提出新挑战的认识，力求使内容展开符合多数学生的认识规律，有利于激起学生对这一课程的学习兴趣。全书强调对基本概念的理解，除保持微积分教材传统的演绎与几何直观并重的特征，尽可能多地采用几何直观的描述外，还借助基本概念对多个领域实际意义的解释，并重视采用普通语言给出描述，以这种种努力来强化对概念的理解与提高其亲和力。全书对基本理论的要求是适度的，对定理都要求注重理解意义及掌握定理内容本身，而不只是它的证明(有个别定理没有给出证明或只指出参考书目)，这样往往就对许多推论的证明及定理的其他应用给予了更多的注意，而在阅读教材时，对大多数定理越过其证明的细节，应该是无损于掌握内容的连贯性的。微积分是个伟大的思想宝库，从不同的层次或角度用心地去发掘都能得到大的收获。鉴于本书设定的读者，学习微积分主要是为更好地进入科学(包括社会科学、经济管理科学等)或工程在知识及能力两个层面从技术应用、理性思维及文化素养方面作准备的，书中在展开内容的同时穿插介绍了微积分是怎样分析和解决实际问题的，透视一些数字计算、几何量的计量及无穷级数求和等“常量问题”是怎样由认识其作为变量在某一时刻的值，并通过处理“变量数学”的微积分方法解决这些问题的。在基本运算方面，本教材中注意了导数与微分计算的互动(利用微分的运算法则、一元微分形式不变性等，从微分计算的途径求出导数及从全微分求出多个一阶偏导数)，微分与积分的互逆并注重将对基本概念、基本理论的理解融入提高

运算技能之中(如数项级数的求和,曲线、曲面积分的计算,重积分之化归逐次积分及通过积分公式实现各类积分之变化等)。

例题和习题是教材的重要组成部分，本书的例题量多面广，在一些例题中给出的描述性分析过程及一例多解，目的是想对读者多作一些引导。演算一定数量的习题是学好高等数学的必由之路。为此，本书以两种不同的方式安排了相当数量的练习与习题供学生选用。每节后的练习题是每个学生都应独立完成的，而各章末的习题则可根据各自的具体情况或在教师指导下演算其中的部分或全部。

“大学教书不是照本宣讲”，按这种认识，更为了有利于学生在今后的自学扩展知识面，提高综合运用知识的能力，本书也包括了少量可教可不教的内容。如某些关于应用课题与个别应用数学概念的讨论及少数习题等(特别是那些带有 * 号的部分内容、节、段、定理或示例)。对于这些“不属于”教学要求范围之内的题材，老师们在教学中可灵活掌握，或用作专题讲座的素材，也可指导学有余力的学生自学，等等。

为便于读者学习本书，我们同时出版了配套的“高等数学学习指导”光盘(李大红负责)。内容包括课程学习、应用实例、有关的数学史及著名数学家简介三个组成部分。其主要内容是课程学习部分，系分章写出，每章均含有内容要点、例题选讲、习题选解三个方面作为学习指导，与教材的主要教学内容配套。另外，也选编了一些在学习高等数学课程过程中，学生可能遇到的疑难问题的解析，并汇集了一些常用公式，以备查考。在学习课程的各阶段(预习、学习、复习)中，这些材料应能发挥有益的辅导作用。

最后，我们要对高等教育出版社的领导特别是理工分社的领导、数学策划部的领导以及有关专家给我们以编写此精品教材的荣誉和信任表示由衷的感谢。我们也要对华南理工大学、上海工商外国语学院及广东工业大学等许多高校的领导对编写本教材给予的大力支持表示感谢。参加本书编写工作的有谢国瑞、郝志峰、汪国强、李大红、孙薇荣、邵晓华、刘建强、陆履亨、冯家裕，王刚、乔琼等也协助做了不少工作。全书由谢国瑞最后统稿、定稿。囿于编者们的水平和见闻，书中难免留存错、漏、欠妥之处，敬祈专家、读者批评指正。

编　者

2005 年 8 月

目　　录

第 1 章 向量 空间解析几何

向量是一个重要的数学工具，在科学和工程中试图运用数学方法之际，有许多量需藉向量给以刻画；在多元函数的讨论中，由于利用向量而可使许多概念的表述更为简单明晰.

本章先介绍向量代数基础和空间直角坐标系，利用坐标系为工具，向量的运算可通过对其坐标的适当数字运算而完成. 这就为对一些数字运算或关系赋予"几何意义"奠下了基础. 在本章最后两节，利用这两个工具，讨论了空间解析几何中一些有用的基本事项.

1.1 向量

1.1.1 引言

将数学用于科学或工程时，通常要把有关的量和数相联系. 经验表明，许多量可用数字表出其特征；如物体的质量、体积、某人跑 100 米所用的时间等. 由于处理这些量所遵循的代数规则与平常运算实数的规则相当，所以普遍接受这样的表达方式，并称这些量为**标量**.

另外，有些量却不是只用单个数字就足以表达其特征的. 例如，为了表达将物体从点 A 移到点 B 这个位移，只描述移动的距离是不够的，还要说明移动的方向. 亦即要用距离和方向两个特征来共同描述一个**位移**. 又如，一个力作用于某物体上，也需由此力的大小及施力的方向共同形成此作用力的效果. 还可举出许多需用几个数字共同表达其特征的量：一艘船在航行时的速度，需用速率 v 及方向 θ 刻画；而飞机的飞行则要用速率 v、方向 θ，高度 h 三个数字来表征. 在处理这些量的过程中，人们发现一些共同的规律，从而形成了数学上称作**向量**的概念. 在给向量下定义之前，先考察位移的一些性质.

设点 A 沿直线 AB 的方向移到点 B 处，将此位移用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示(见图 1-1). 如果这同样的位移发生在另一点 P 处(见图 1-1)，则将点 P 移至点 Q. $\overrightarrow{PQ}$ 在长度上等于 $\overrightarrow{AB}$，两者是平行且指向相同的，我们写作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}$. 所以从位移的大小和方向两方面看，符号 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{PQ}$ 代表着同一个量。

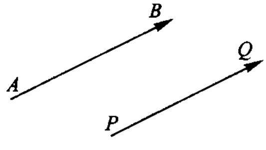

图 1-1

处理位移的简单代数运算可描述如下：例如，若想把点 A 顺着从 A 到 B 的方向移至距点 B 两倍远之处，自然就可将此位移记成 $2\overrightarrow{AB}$. 同理，$\lambda\overrightarrow{AB}$（$\lambda$ 为正值常数）的意义是保持 $\overrightarrow{AB}$ 原来的方向，而将长度变为原来的 λ 倍（见图 1－2）. 这是位移的**倍数**. **加法**的运算可看作是连续两次位移的结果. 参照图 1－3，设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{RS}$ 为两已知位移，若 $\overrightarrow{BC}$ 等于 $\overrightarrow{RS}$，则当对点 A 连续施以这两次位移的结果是先将点 A 移至点 B，然后移到点 C，记为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{AC}$，即

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}, \tag{1-1}$$

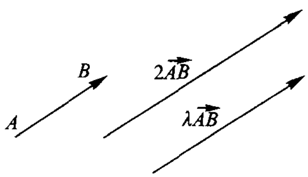

图 1－2

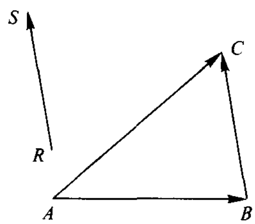

图 1－3

称之为加法的**三角形定律**，即沿 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 BC 作相继的两次位移，其最终结果无异于沿第三边 AC 的一次位移. 有时也将加法规则称为**平行四边形定律**，如图 1－4，A，B，C，D 依序为一平行四边形的四个顶点，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，因 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，所以当 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ 不平行时，平行四边形定律和三角形定律是一回事.

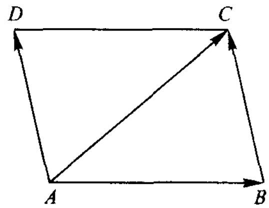

图 1－4

既然线段 AA 的长度为 0，则位移 $\overrightarrow{AA}$ 将把点 A 留在原位置不动，而按式(1－1)知

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA},$$

从而将 $\overrightarrow{BA}$ 解释成 $-\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{BA}$ 是与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相反而长度相等之位移. 进一步，可得负数和位移相乘之意义，例如 $\lambda=-\mu\ (\mu>0)$，则 $\lambda\overrightarrow{AB}=-\mu\overrightarrow{AB}$，其意义为向量 $(\lambda\overrightarrow{AB})$ 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向相反而长度为 $\overrightarrow{AB}$ 之 μ 倍（图 1－5）.

例 1 设 A，B，C，D 为某平行四边形之顶点（参图 1－6），试解释 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\overset{\text{def}}{=\!=}\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AD})$ 之几何意义.

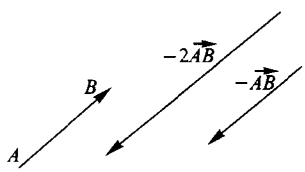

图 1－5

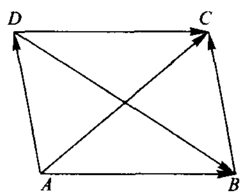

图 1－6

解 根据加法的平行四边形定律，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$等于位移$\overrightarrow{AC}$，这是平行四边形通过 A 点之对角线．又因为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$

故

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB}.$$

这个位移以“被减位移”的终点为终点，以“减位移”的终点为起点．在图形上看，这是平行四边形的另一条对角线．

实践表明，有许多量需用一标量表明其大小，再配上一个方向才能表达其特征，且这些量都符合加法三角形定律．例如，图 1－7 所示的一个简单实验，说明了力的合成是符合加法三角形(平行四边形)定律的．图中三条弹簧汇交于点 O，其中一条负载重 $\boldsymbol{W}$ 的物体，另外两条则支撑 $\boldsymbol{W}$ 的负荷．张力 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$ 沿着弹簧作用，其合力必须能平衡所负的物重．欲测量这两个弹簧的合力，可用平行四边形定律．沿两条支撑弹簧方向画直线，使长度等于张力 $\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2$ 的大小，则其围成之平行四边形的对角线就是 $\boldsymbol{T}_1$ 和 $\boldsymbol{T}_2$ 的合力．经实验证实，此对角线的大小与弹簧负载 $\boldsymbol{W}$ 的大小相等，方向相反，即 $\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2=-\boldsymbol{W}$．

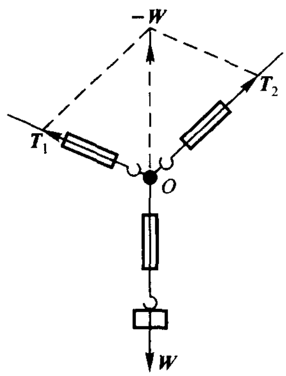

图 1－7

1.1.2 向量概念

定义 1 一个既有大小(标量)又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)，且任意两个向量的加法遵循三角形定律．

具有向量特性的量有很多，特别感兴趣的有：位移、速度、加速度、动量、冲量、力、角速度等等．

常用黑斜体字母$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F},\cdots\cdots$或斜体字母上加箭头$\vec{a},\vec{b},\vec{F},\cdots\cdots$符号表示向量，但向量的几何原型是有向线段，所以也常用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\cdots\cdots$符号表示向量，并分别用$|\boldsymbol{a}|$或 a 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的**模**或**长度**，对符号$\overrightarrow{AB}$表示的向量则相应地用$|\overrightarrow{AB}|$或 AB 表示向量$\overrightarrow{AB}$的模(为避免与绝对值符号混淆有时也用$\|\boldsymbol{a}\|$等表示向量模,此时也称之为**向量范数**)．

在向量的有向线段(几何)表示法$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\cdots\cdots$中，点 A、C 等分别是有向线段的起点，而 B、D 等则分别是它们的终点．若在向量 $\boldsymbol{a}$ 的几何表示$\overrightarrow{AB}$中，将起点 A 换成另一点 P，则终点 B 也将相应地改成为 Q，这时有 $AB=PQ$ 以及$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{PQ}$平行且指向相同(见图 1－1)，故$\overrightarrow{PQ}$同样可看作是这个向量 $\boldsymbol{a}$ 的

几何表示．从几何方面说来，我们把向量看作是起点可自由改变的**自由向量**．上述的向量 $\boldsymbol{a}$ 是代表着$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{PQ}$等相等有向线段集合[共性]的量．在本书中，说到向量$\overrightarrow{AB}$(这是有向线段)，均指它是向量 $\boldsymbol{a}$ 的一个几何表示，起点 A 是为用向量方法表述或解决问题而设，对向量而言这不是本质的要求．当然，根据实际情况，有时向量的起点不能随便改变，例如，向量 $\boldsymbol{a}$ 若代表一个力，其起点代表作用点，这时起点就不能随便改变了．称这种向量为**固端向量**．除非另作说明，本书一般只考虑自由向量．

为用向量方法解决问题而将向量表成有向线段时，一种做法是使它们从某一定点开始，向规定的方向延伸至规定的长度，称这个定点为**原点**，通常记作 O．若 P 是空间任意一点，则有向线段$\overrightarrow{OP}$代表一个向量，它可视为点 O 至点 P 的位移．习惯上，称这个向量为点 P 相对于原点 O 的**位置向量**或**径向量**，记作 $\boldsymbol{r}$．这样，一旦选定了原点 O，则每个向量都可看作是某一点相对于 O 的径向量．径向量具有唯一性，即若两个点相对于 O 的径向量相等，则此两点必重合为一点．

在力学中使用径向量，是为了描述一个质点受一组力作用之后的运动情形；而在几何学里用径向量，可使图形用较易的方式表示，并为证明定理提供途径．例如，若 $\boldsymbol{r}$ 代表点 P 相对于点 O 的径向量，而 d 是一个正值常数，则方程式 $|\boldsymbol{r}| = d$ 表示点 P 是以 O 为中心 d 为半径之球面上的一点，我们就把 $|\boldsymbol{r}| = d$ 称为球面的向量方程式．

1.1.3 向量的线性运算

首先给出向量相等的定义：

定义 2 若向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且大小一样(即 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$)，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$．

(1) 向量的加法　在向量的定义中已对向量加法规定要遵循三角形定律，借助图形(图 1－8,图 1－9)可说明向量的加法运算服从以下规律：

① 交换律：$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$；　(1－2)

② 结合律：$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$．　(1－3)

值得注意的是，在图 1－9 中，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ 等，未必在同一平面上．

例 2 已知 A,B,C,D,E 是空间相异的五个点，试证：

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

解 根据加法的三角形定律，有

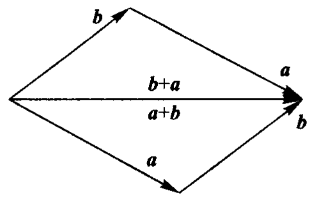

图 1－8

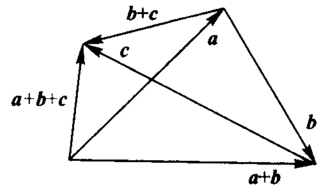

图 1－9

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

从而有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD},$$

及

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DE}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE},\end{aligned}$$

读者可自行作图弄清其几何意义，并导出类似于式(1－1)的规律．

长度为零的向量只有一个，称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\overrightarrow{O}$，可看作是满足下式

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a}\text{ 为任意向量})$$

之唯一向量．进一步，对于已知向量 $\boldsymbol{a}$，可由

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$$

定义 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量** $-\boldsymbol{a}$，$(-\boldsymbol{a})$与 $\boldsymbol{a}$ 的大小相等而方向相反．

(2) 向量的减法

减法是加法的逆运算，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则称 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差向量，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．也可规定

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

在图 1－10 中，分别用$\overrightarrow{OA}$及$\overrightarrow{OB}$代表向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，点 C 是平行四边形 $OACB$ 的第四个顶点，那么可以看出这样的结论：若一个平行四边形的两邻边分别代表两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则带有适当指向的两条对角线(即$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{BA}$)分别代表向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．这也称为向量加法的**平行四边形定律**．容易明白，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行时，它与三角形定律是相当的．

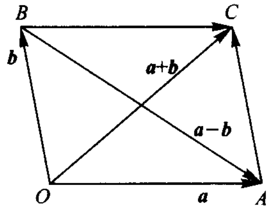

图 1－10

(3) 数量与向量的乘法

位移的倍数这个概念可推广成向量倍数即**数乘运算**：对给定的标量 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 代表一个向量，其模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$，在 $\lambda>0$ 时其指向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，而当 $\lambda<0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，$\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$．

根据这样的规定，容易推知成立如下命题：

定理 1 非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行(记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$)的充要条件是，存在实数 λ，使成立 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

习惯上常将加法及数乘两种运算及其结合统称为**线性运算**. 向量的线性运算具有下列性质：

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}; \tag{1-4}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}; \tag{1-5}$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}; \tag{1-6}$$

$$0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}. \tag{1-7}$$

其中，设 λ，μ 为任意标量；$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为任意向量. 利用几何方法，容易证明这些等式确是成立的.

习惯上称模为 1 的向量为**单位向量**，为指明一个向量的方向只需用单位向量就够了. 对于任一给定的非零向量 $\boldsymbol{a}$，因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，记

$$\boldsymbol{e}_a \xlongequal{\text{def}} \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}, \tag{1-8}$$

则容易验证，$\boldsymbol{e}_a$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量(有时也将 $\boldsymbol{e}_a$ 记成 $\boldsymbol{a}^0$). 称由 $\boldsymbol{a}$ 求 $\boldsymbol{e}_a$ 的过程为对 $\boldsymbol{a}$ **规范化**或**单位化**，也常把式(1-8)写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a. \tag{1-8$'$}$$

例 3 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是 3 个任意的向量，若分别以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 表示. 点 P，Q，R，S 分别是线段 OA，AB，BC 和 CO 的中点. 试分别求出 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OS}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 之关系式，从而推证 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ (图 1-11).

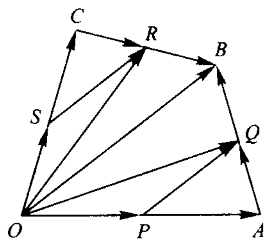

图 1-11

解 显然有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

因为 $$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

而有 $$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

于是可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}\\&=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

类似地，可得

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

但

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

及

$$\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

于是得证

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}.$$

这就说明四边形 $PQRS$ 为平行四边形. 故本例实为证明了这样的事实：任意一个四边形(四个顶点不必在同一平面上)的四边中点必联成一个平行四边形.

1.1.4 内积　投影

从初等物理学知，若物体在不变力 $\boldsymbol{F}$ 的推动下，在力的方向移过距离为 $\boldsymbol{S}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}, \tag{1-9}$$

而当力 $\boldsymbol{F}$ 与物体位移 $\boldsymbol{S}$ 的方向不一致，有夹角为 θ 时(如图 1-12 那样)，因 $\boldsymbol{F}$ 在位移方向的分力大小为 $F\cos\theta$，故

$$W=FS\cos\theta. \tag{1-10}$$

与公式(1-9)对照，合理地可把式(1-10)也看作是 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的某种乘积，从而导致建立向量内积的概念.

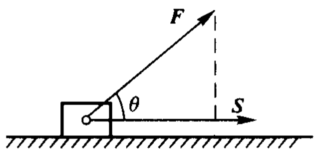

图 1-12

定义 3　对任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，总可用 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{OB}$ 表示，则称 $\theta=\angle AOB$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，并约定 $\theta\in[0,\pi]$，单位为弧度(rad). 通常，将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记为 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

当 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=0$ 或 π 时，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行或共线**(记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$)；而 $\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=\frac{\pi}{2}$ 时，称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直或正交**(记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$).

定义 4　对任意给定的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 或 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 即有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\xlongequal{\text{def}}ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\tag{1-11}$$

在 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 中至少有一为零向量时就规定其内积为零.

因为两向量的内积是个数量(标量)，所以常把内积称为**数(标)量积**，又因内积的常用记号是个居中的点“·”，所以习惯上也把内积称为**点积**.

对照式(1-11)与式(1-10)，可见

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}.$$

在着手讨论内积运算法则之前，先引入与内积密切相关的投影的概念.

设有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 分别代表向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则称数量 $b\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影量**(Projection)，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 或简记作 $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$ 或 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}$，即

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}\xlongequal{\text{def}}b\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\tag{1-12}$$

在图 1-13 中，当 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})<\frac{\pi}{2}$ 时，投影量 $OB\cos\theta=OC$，其中 C 是从 B 作 $\overrightarrow{OA}$ 所在直线垂线的垂足. 当 $\theta>\frac{\pi}{2}$，若仍记上述垂足为 C 的话，则投影量将取负值，为 $OB\cos\theta=-OC$. 我们称图 1-13 中的向量 $\overrightarrow{OC}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影向量**，显然可表为

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}^0=(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}\frac{\boldsymbol{a}}{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}.\tag{1-13}$$

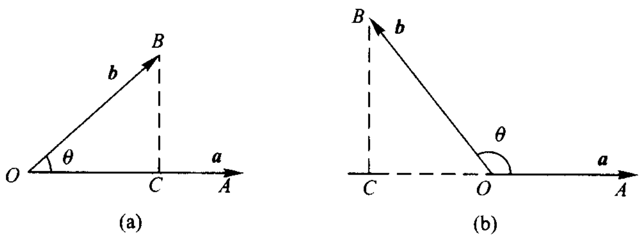

图 1-13

根据投影量的定义，我们可得出内积新的表达式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\xlongequal{\text{def}}ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

$$=a\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}\tag{1-11'}$$

$$=b\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{b}},\tag{1-11''}$$

而进一步也可反过来用内积表出计算投影量的公式：

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{a}\tag{1-12'}$$

$$=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}^0.\tag{1-12''}$$

根据内积的定义以及上述这些关系，可容易地建立向量内积的运算法则.

定理 2 向量的内积运算遵循以下的运算法则：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$； (1－14)

分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$； (1－15)

与数乘的结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$. (1－16)

证 由定义式(1－11)立即可得式(1－14)及式(1－16). 下面借助图 1－14,证明分配律(1－15)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\psi=|\boldsymbol{a}|(OM)\\&=|\boldsymbol{a}|(OL+LM)=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\varphi\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

当内积之值为负数时，亦可仿照以上过程给出证明.

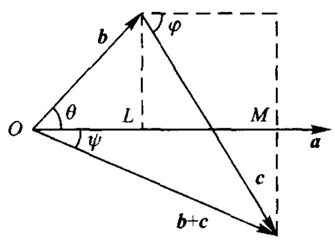

图 1－14

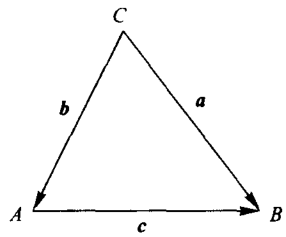

图 1－15

例 4 用向量方法证明三角形的余弦定理.

解 对任意给定的△ABC（参看图 1－15），引入向量记号，令

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}.$$

则

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

从而有

$$\begin{aligned}c^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

例 5 用向量方法证明三角形的三条高必交于一点.

解 在△ABC 中，设过点 A 及 B 之两条高交于点 O，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 记三个顶点相对于点 O 的位置向量，见图 1－16.

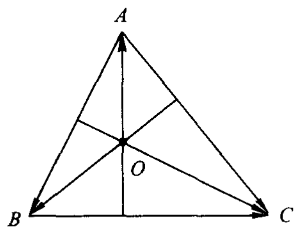

图 1－16