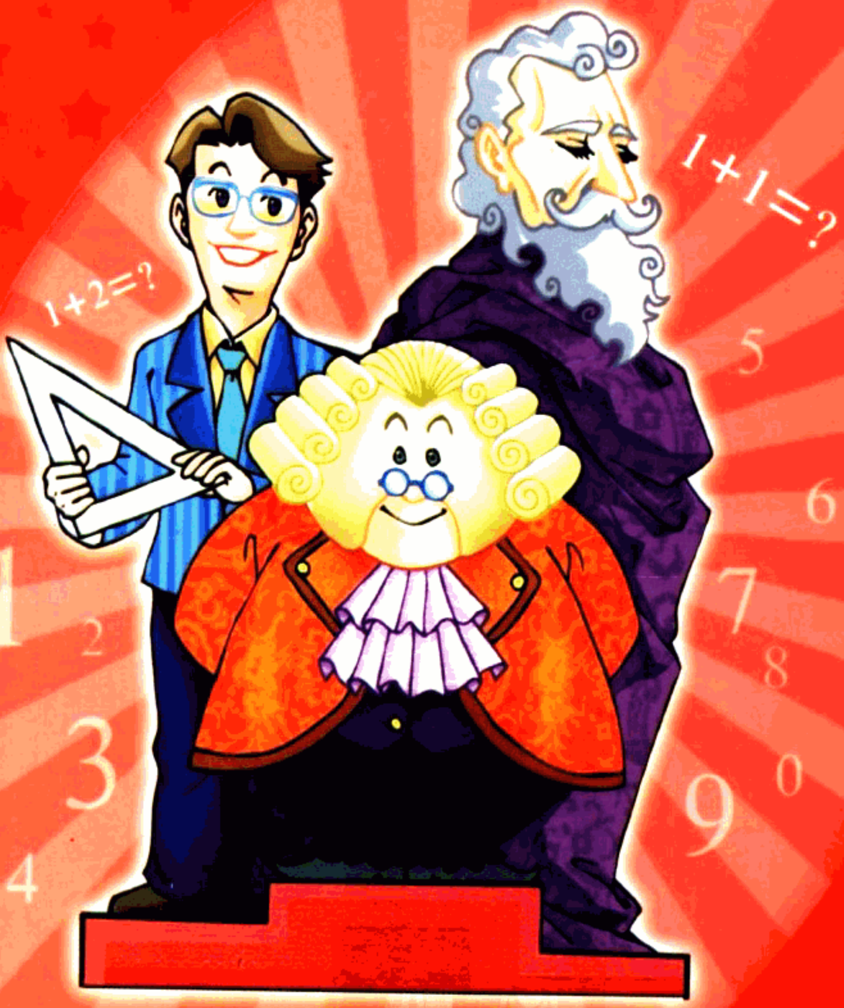
视野小丛书

SHI YE XIAO CONG SHU

猜想的猜想

CAI XIANG DE CAI XIANG



明天出版社

前言 QIAN YAN

数学这一重要学科，伴随着人类文明的进步，在其漫长的发展过程中，走过了艰难而又神奇的道路。多少人类的天才为之倾注了毕生的精力，一个个难题揭开了，又有一个个难题出现，变化万千，无穷无尽。

本书会告诉你若干年来数学家们研究的那些重要课题，以及现代数学的几个主要特征，使你对深奥的数学领域能有一个简明的了解。

目录 MU LU

由一个著名猜想谈起

新技术革命创造的奇迹之一，是把地球变成了一个“村庄”。万里之外一场精彩的足球比赛,可以让世界各地的球迷同时如痴如狂。

不仅如此,一些重大的科学进展,甚至是像黑洞、白洞这样一些连科学家也没有弄清楚的前沿课题,一经新闻媒介的传播,马上就家喻户晓,成为寻常百姓津津乐道的话题。相形之下,现代数学倒成了一片被遗忘的角落，一般人所了解的数学，大多是几百年前以至几千年前数学家们劳动的成果。

这是一个非常有趣的现象:一方面,数以亿计的人们在学习数学,从小学至大学,学习数学的人数之多,任何一门自然科学都望尘莫及;而另一方面,同样是数以亿计的人们,却不清楚什么是现代数学,更不清楚数学家们在干些什么。

现代数学变得越来越抽象，分支也越来越多,即使是数学家,也不一定弄得清别的数学家在干些什么。连数学家也弄不懂,那就难怪数学

得不到新闻记者的青睐，从而备受大众传播媒介的冷落了。

1977年，数学爆出了个大冷门。一篇题为《哥德巴赫猜想》的报告文学，在神州大地上刮起了一阵激动人心的数学旋风。陈景润——一个中国青年数学家，一夜之间成为千千万万青少年崇拜的偶像。哥德巴赫猜想——一个世界数学前沿课题，一夜之间成为亿万人民热烈谈论的话题。这阵旋风，极大地激起全国人民的民族自豪感和向四个现代化奋进的激情。

哥德巴赫猜想究竟是怎么回事呢？

哥德巴赫是一位德国数学家，1690年3月18日生于普鲁士的柯尼斯堡（前苏联的加里宁格勒），1725年移居俄国，任彼得堡科学院会议秘书兼数学教授。在彼得堡，哥德巴赫结识了在俄国工作的数学大师欧拉，两人书信交往达三十多年。

1742年6月7日，在一封写给欧拉的信中，哥德巴赫写道："任意一个奇数，例如77，可以分解成3个素数的和：77=53+17+7；再任意取一个奇数461，461=449+7+5，这3个数也都是素数；461还可以分解成另外3个素数的和：257+199+5，如此等等。现在我们对此已十分清楚：任意一个较

大的奇数，都可以分解成3个素数的和。但是如何证明呢？”

这就是哥德巴赫猜想的原始陈述。

不久，哥德巴赫收到了欧拉的回信。信中说他也无法证明这个猜想，但认为这·个猜想可能成立。欧拉还在信中敏锐地指出，这个猜想可以进一步叙述为：“从4开始，任意偶然都可以分解成两个素数之和。”

后来，人们将这些归结为以下两个命题：

(1) 每个不小于6的偶数都可以分解成2个奇素数之和；

(2) 每个不小于9的奇数都可以分解成3个奇素数之和。

这就是哥德巴赫猜想。命题(1)叫偶数猜想，命题(2)叫奇数猜想。这两个命题并不等价。由偶数猜想可以推导出奇数猜想；由奇数猜想却推导不出偶数猜想。奇数猜想只是偶数猜想的一个特例。1937年，苏联数学家维诺格拉托夫已经证明："每一个充分大的奇数都可以分解成3个奇素数之和。"所以，现在所说的哥德巴赫猜想，一般是指哥德巴赫猜想中的偶数猜想。

要举出一些例子来验证哥德巴赫猜想实在太容易了，随手就可以写出一大串：

6=3+3	8=3+5	10=3+7
12=5+7	14=7+7	16=5+11
20=3+17	30=11+19	100=3+97

……

然而，这样的例子举得再多，也不能把哥德巴赫猜想变成哥德巴赫定理。20世纪60年代，有人验算了33000000以内的所有偶数，发现在这样大的范围内，哥德巴赫猜想都是能成立的。可是，谁又能保证，对于在此范围之外的偶数，哥德巴赫猜想也一定成立呢？

人的有限生命使人不可能从头到尾验证一切偶数，这样，谁要想说哥德巴赫猜想是一个定理，除了从理论上予以证明外，就没有别的途径可以选择了。

欧拉是18世纪最杰出的数学家，在当时，几乎所有的数学领域里，都留有他辛勤耕耘的足迹。有人称誉说："在数学上，18世纪是欧拉的世纪。"连欧拉这样大名鼎鼎的数学大师也无法证明哥德巴赫猜想，这个问题的难度可想而知。自1770年哥德巴赫猜想公之于世以后的一百多年里，证明工作实质上没有取得任何进展。

1920年，挪威数学家布伦证明了一个数学结论：每一个比4大的偶数都可以表示为(9+9)。这里，"9"是一个记号，它表示一种数，这种数可以分解成几个素数的乘积，而这些素数的个数不会超过9；"9+9"就是两个这样的数相加的意思。

证明(9+9)有什么用呢？布伦想，既然一下子证明不出哥德巴赫猜想，那么不妨步步为营，采取逐步缩小包围圈的办法来解决它。如果能从证明(9+9)开始，设法逐步减少每个数里所含素数因子的个数，直到最后使每个数里都是一个

素数为止，这不就证明了哥德巴赫猜想吗？

布伦迈出了举足轻重的第一步。1924年，德国数学家拉德马赫尔证明了(7+7)；1932年，英国数学家埃斯特曼证明了(6+6)；1937年，意大利数学家里奇证明了(5+7)、(4+9)、(3+5)和(2+366)；1938年，苏联数学家布赫西塔勃证明了(5+5)，1940年，他又证明了(3+4)；1948年，匈牙利数学家雷尼证明了(1+c)，其中c是一个很大的数。数学家们主要采用圆法和筛法，不断地朝着最终目标(1+1)冲刺。这里，“1”是一个记号，用来表示一个素数，“1+1” 的意思是两个素数之和，(1+1)用来表示哥德巴赫猜想。

令人高兴的是，在证明哥德巴赫猜想这场国际数学竞赛中，我国数学家做出过重要贡献并取得了领先地位。

早在1938年，我国著名数学家华罗庚就曾经证明：“几乎全体偶数都能表示为两个素数的和。”1956年，我国数学家王元证明了(3+4)，第二年，他又证明了(2+3)。1962年，我国数学家潘承洞证明了(1+5)，第二年，他又和王元一起证明了(1+4)。

在苏联数学家维诺格拉多夫、布赫西塔勃

和意大利数学家邦别里证明(1+3)后不到一年，1966年，我国数学家陈景润又更上一层楼，率先证明了(1+2)。这是目前世界上研究哥德巴赫猜想的最佳成果。

从(1+2)到(1+1)，彻底证明哥德巴赫猜想的工作只剩下最后一步了。不过，我们不要指望明天便有捷报飞传，从1966年到现在，二十多年过去了，证明哥德巴赫猜想的工作并没有取得重大突破。我国著名数学家苏步青估计：目前，要想突破(1+2)，证明(1+1)，就要把世界上80多种方法做到融会贯通，博取众长，在20年内，恐怕世界上很难有人能够完成这个任务。

事情真会如此吗？也许，这也可以算是一个"猜想"吧。

能下金蛋的母鸡

猜想不是幻想，更不是胡思乱想。在数学上，猜想是指根据某些已知的、但对某一问题显然是“不够的”数学知识，通过人类思维的能动作用，作出的关于这一问题的猜测性的推断。猜想一经证明，就成为一个定理。过去有个很著名的猜想，叫四色猜想。大意是说：把地图上有共同边界的国家都涂成不同的颜色，只要4种颜色就足够了。1976年9月，数学家用电子计算机工作了一千二百多个机器时，终于证明这个猜想是能够成立的，四色猜想也就随即变成了四色定理。哥德巴赫猜想至今未获证明，所以它仍是一个猜想。有趣的是，数学中有一个很著名的猜想，虽然至今仍然没有人能够证明它，却一直被人称作是一个定理——“费马大定理”。

费马是17世纪上半叶最杰出的数学家之一，1601年8月17日出生在法国图卢兹附近一个皮革商人家庭。上大学时，费马选择了法律专业，毕业后成为一个小有名气的律师，并担任了

图卢兹地方议会的议员。虽然费马不是专业数学家,但他热爱数学,把业余时间几乎全都用于钻研数学问题,并在许多数学领域做出了世界第一流的贡献,被世人誉为“业余数学家之王”。

费马自己不喜欢写书,但喜欢在别人的著作上提问题,谈心得。1637年,费马在古希腊数学家丢番图的名著《算术》一书的空白处,写了这样一段话:“任何一个数的立方,不能分解成两个数的立方和;任何一个数的4次方,不能分解成两个数的4次方之和。一般来说,任何次幂,除平方外,不可能分解成其他两个同次幂之和。”

这段话是什么意思呢?

对于形如$x^n+y^n=z^n$这样的方程，当n=2时，它是有正整数解的。例如,x=3、y=4、z=5就是方程$x^2+y^2=z^2$的一组解,x=5、y=12、z=13也是这个方程的一组解。但是,如果n=3,方程$x^3+y^3=z^3$就没有正整数解;如果n=4,方程$x^4+y^4=z^4$也没有正整数解……

费马猜测：只要n是比2大的自然数，方程$x^n+y^n=z^n$就没有正整数解。

这就是著名的“费马大定理”或“费马最后定理”。

在这段话的旁边，费马还写道:“我想出了这个断语的绝妙证明,遗憾的是,这里的空白太小了,写不下。”

可是,谁也没有见过这个“绝妙证明”。费马死后,人们找遍了他的遗稿、书笺、藏书、笔记以及一切可能的地方,始终没有找到那个“绝妙证明”。后来,数学家们想:干脆重新证明吧。要证明费马大定理实在太难了，别看每个少年朋友都能弄懂它是怎么回事,可要证明它,许多最优秀的数学家也都束手无策呢!

本世纪初，法国著名数学家勒贝格确信自

己解决了这个问题,写信通知巴黎科学院。科学院内有关人士十分高兴,以为这个几百年前由法国人提出的数学难题,最终又由法国人自己解决了,赶紧组织一批专家审查了勒贝格的论文。可是,人们在勒贝格的论文中发现了错误,指出他的证明是不能成立的。勒贝格拿着退回来的论文,很不甘心,喃喃地说:“我想,我这个错误是可以改正的。”但直到1941年他去世时,也未能解决这个问题。

读到这里,有些读者也许会问:证明这些猜想究竟有什么意义呢?

如果把数学比作是一块瓜田,那么,一个猜想(难题)就像是瓜叶下偶尔显露出来的一节瓜藤,它的周围都被瓜叶遮盖住了,不知道还有多长的瓜藤,也不知道藤上有多少个瓜。但是,抓住了这节藤,就有可能拽出更长的瓜藤,拽出一连串的数学成果来。

数学猜想(难题)本身往往并没有什么了不起,但是,要想解决它,就必须发明更普遍、更强有力的数学方法,从而推动数学的发展。例如,在证明哥德巴赫猜想的过程中,人们发现了一系列新的数学理论和现代筛法这种强有力的数

学手段，而这些，都比哥德巴赫猜想本身有意义得多。至于费马大定理，更是被誉为一只“能下金蛋的母鸡”，因为，一门内容丰富而又应用广泛的新数学分支——理想数论，就是在研究费马大定理的过程中诞生的。

三百多年过去了，对费马大定理的研究取得了哪些进展呢？

$n=3$的情形，在公元972年已为阿拉伯数学家胡坚迪所知，但他的证明有缺陷；1770年，大数学家欧拉提出了一个新的证明。

$n=4$的情形，费马本人已有证明。1678年，德国著名数学家莱布尼兹提出了新证，后来欧拉也作了一个证明。

法国数学家勒让德(1823年)和德国数学家狄利克雷（1825年）先后独立地证明$n=5$时，$x^n+y^n=z^n$没有正整数解。1839年，拉梅又进一步证明$n=7$时，$x^n+y^n=z^n$没有正整数解。

1844年，德国数学家库默尔证明，除了37、59、67这3个数外，对于小于100的奇素数，费马大定理都能成立。这是一个重大的突破。

数学家们已经发现：只要证明$n=4$以及n是任一奇素数p时费马大定理成立，那么它就对任

何大于4的正整数成立。

1944年，塞尔费里奇、尼可和凡第弗证明：当$p<4002$时，$x^p+y^p=z^p$没有正整数解。

1978年，瓦格斯塔夫借助电子计算机证明：当$2<p<125000$时，$x^p+y^p=z^p$没有正整数解。也就是说，只要n含有从2到125000之间的任何一个数作为因数，$x^n+y^n=z^n$就一定没有正整数解。

1983年，原联邦德国的数学家法尔廷斯证明了莫德尔猜想，朝着完全证明费马大定理迈出了一大步。法尔廷斯的结论是："$x^n+y^n=z^n$若有正整数解的话，那么它至多只有有限个。"

1987年，在法尔廷斯工作的基础上，格兰维尔与希思·布朗进一步证明：几乎对所有的指数，费马大定理都能成立。也就是说，使费马大定理不成立的指数个数趋近于0。这是目前世界上研究费马大定理的最佳成果。

历史上，布鲁塞尔科学院和巴黎科学院都曾数次悬赏求证费马大定理，但均无结果。1908年，数学家沃尔夫斯克尔在德国哥廷根皇家科学会慷慨捐出10万马克，奖给最先解决费马大定理的人。有效期100年，到2007年为止。

2007年很快就要到了，届时，费马大定理还

是一个数学猜想吗?

至于费马,这位掀起轩然大波的数学家,是否真的想出过“绝妙证明”,那就更难说了。也许,这是一个比费马大定理更难猜的谜。