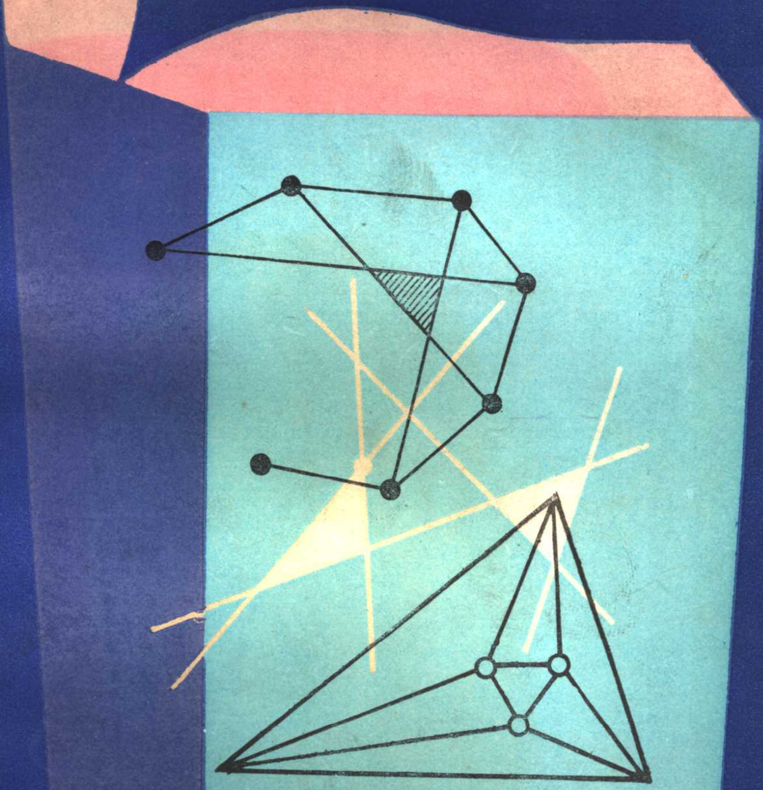
三角形趣谈

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

三角形趣谈

杨世明

上海教育出版社

责任编辑　王澍边

封面设计　范一辛

中学生文库　三角形趣谈

杨世明

上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
各地新华书店经销　上海市崇明印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张8　插页2　字数150,000
1989年8月第1版　1989年8月第1次印刷
印数1—7,200本

ISBN 7-5320-1384-7/G·1355　定价：2.35元

前言

有人说，三角形是几何的心脏。这话也许不无道理。这是因为，如果没有了三角形的研究，整个平面几何、立体几何，……将会是什么样子呢？

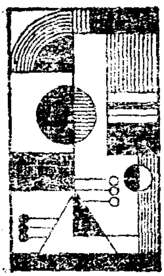
横观现状：哪一次数学竞赛，哪一次数学考试命题，不与三角形有关？纵看几何学发展史，我们会发现，三角形是人类开发最早、研究最深入的图形，是人们研究几何图形、解答数学问题的工具，从中国的《周髀》、《九章》，西方的欧几里得(Euclid)《原本》，到当今的巨著妙文，人们对小小的三角形，已经研究了三千多年。商高定理，内角和定理，海仑-秦九韶公式，五心定理，等周定理，梅内劳斯定理，塞瓦定理，维维安尼定理，费马点，欧拉线，九点圆，西摩松线，到雷米欧斯-斯坦纳定理，莫莱定理，匹多不等式，象一颗颗璀璨的明珠，破土而出。这个过程，到二十世纪的今天，也还没有终止。

由三条线段首尾相结所构成的这个最简单、最基本的图形，一眼就能“看透”，竟然会有这么多的奥妙！“局外人”

真是难以置信。然而，这是事实，千真万确的事实，这是几何学历史的辩证法！

为了弄清这个事实，为了从三角形研究的琳琅满目的美妙结果中得到启示，我们博采古今珍品，编成这个小册子。为求真缔，追根溯源，精点创始，细述过程。为汲取思维经验，我们着重述说公式、定理发现，以及论证的思路和规律，深入探讨古今研究三角形的手段和策略。在材料的选择上，薄古厚今，着重于当代和中国。翻开这本小册子，读者就会自豪地看到，八十年代短短的几年时间，我国在三角形不等式、三角形组合计数等现代课题，以及许多古典题材的研究方面，取得了多么丰富的、令人赏心悦目的成果，从而使我们在三角形研究领域冲到了前沿。尤其值得一提的是许多重大成果出自中学教师、大中学生甚至是初中学生之手，后生可畏呀！对此，我们一视同仁，都一一列举发现者、发展者的大名。然而，资料太多，发展太快，挂一漏万，在所难免。错漏之外，还望读者指出，以便改正和补充。

目 录



一、整边三角形与三角数组

1. 整边三角形的性质

三边长都是整数的三角形，称为**整边三角形**。由于在定义中没有限制长度单位，所以，如边长都是有理数，通过改变长度单位，就可以化为整边三角形。

整边三角形有着丰富而有趣的性质。由于它把三角形和整数挂上钩，提出了一系列令人深思的问题，而这些问题的解决又动用了数论、图论以及组合数学等有关知识，它的优美结果极大地丰富了这些数学分支。因此，整边三角形成了近年来数学竞赛、趣味数学的重要题材，受到了人们的青睐。

一般，整边三角形的角有什么特点呢？由余弦定理：

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

可知，当 a、b、c 均为整数(有理数)时，$\cos A$、$\cos B$、$\cos C$ 都是有理数。

定理 1 整边三角形三个内角的余弦都是有理数。

这性质得来容易，却很有用处。

【例 1】 在整边三角形 ABC 中，求证：

(1) 三个内角的正弦、外接圆半径 R、内切圆半径 r 或为有理数，或为二次无理数*；

(2) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 为有理数。

(3) 对任何自然数 n，$\cos 2^nA$ 为有理数。

事实上，由 a、b、c 为整数，即可知 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，

$p_a=\frac{1}{2}(-a+b+c)=p-a$， $p_b=\frac{1}{2}(a-b+c)=p-b$，

$p_c=\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$ 为有理数；因此，面积

$$\Delta=\sqrt{pp_ap_bp_c}$$

为有理数或二次无理数，再考虑公式 $R=\frac{abc}{4\Delta}$，$r=\frac{\Delta}{p}$，$\sin A=\frac{2\Delta}{bc}$，…，就知结论(1)成立。应用定理 1 和恒等式

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos 2^nA=2\cos^2 2^{n-1}A-1,$$

---

* 如果 m 是正有理数，而 $\sqrt{m}$ 不是有理数，就把 $\sqrt{m}$ 叫做**二次无理数**。

很容易推知(2)、(3)也对.

定理1的逆否命题告诉我们：如果一个三角形中，有的内角的余弦值不是有理数，那么它一定不是整边三角形.因此，要研究含有特殊角的整边三角形，由于特殊角15°，30°，45°，60°，75°，90°，105°，120°，135°，150°中，只有60°、90°和120°的余弦值是有理数，所以只能选这三种.

2. 整边勾股形与勾股数组

边长为整数的直角三角形，称为**整边勾股形**.整边勾股形三边a、b、c就构成**勾股数组**(a, b, c)，其中a、b、c依次称为**勾数**、**股数**和**弦数**.

人类对于勾股数组的研究，有着悠久的历史.早在西汉时成书的我国古算经《周髀》中，有周公问术于商高(约公元前1120年)的记录，商高回答说："……故折矩以为勾广三，股修四，经隅五".就是说，商高发现了数学史上最早的一组勾股数(3, 4, 5).因此，勾股数组也叫做**商高数**。在国外，习惯上叫做毕达哥拉斯三数组，尽管洋人也知道这组勾股数在毕达哥拉斯其人之前一、二千年已被人发现了.

若(a, b, c)为勾股数组，那么它就是不定方程

$$x^2+y^2=z^2 \qquad (\text{其中 } x、y、z \text{ 为整数}) \qquad (1)$$

的一个解.法国数学家费马(P. S. de Fermat, 1601～1665)对数论有非凡的直觉能力，他在和当时著名数学家们的通

信中，曾提出过许多猜想，后来大多得到证实。比如，他猜想：一个形如 $4n+1$ 的素数，作为整边勾股形的斜边，仅有一次，其平方有两次，其立方有三次，等等。比如 $5=4\times1+1$，那么 $5^2=3^2+4^2$；$25^2=15^2+20^2=7^2+24^2$；$125^2=75^2+100^2=35^2+120^2=44^2+117^2$。

有一次，费马阅读丢番图（Diophantus，约 246～330）关于不定方程的著作，当他读到“分一个给定的平方数为两个平方数”这问题时，通过联想和直觉，在页边上写道：“分一个立方数为两个立方数，分一个四次幂（或一般地，任何次幂）为两个同次幂，这是不可能的；我确实找到了一个极妙的证明，但页边太窄，写不下了。”这个著名的猜想，人们称之为**费马最后“定理”**，或**费马大定理**。用符号写出来，就是：不存在正整数 x、y、z，n（这里 $n>2$），使得

$$x^n+y^n=z^n.$$

从那时起，直到现在，这 300 多年间，大批优秀的数学家各施技艺，对小于 30000 和许多别的 n 值，证明了费马的这个猜想。1908 年，德国数学家佛尔夫斯克通过哥廷根科学院以 10 万马克的重奖，悬赏第一个完全的证明，但至今未有结果。

不难证明，以 (1) 的任一组正整数解 (a, b, c) 为长度的三条线段，均可构成勾股形。因此，以后就称 (1) 的正整数解为**勾股数组**。当 a, b, c 的最大公约数为 1（即互素，记作 $(a, b, c)=1$）时，就称为**基本组**。

对勾股数基本组 (a, b, c)，已发现了如下一些有趣的

性质：

i）若 $(a, b)=1$，则 $(a, c)=(b, c)=(a, b, c)=1$；反之，若 $(a, b, c)=1$，则 $(a, b)=1$。

就是说，勾数与股数互素的勾股数组，必为基本组；反之，基本组的勾数股数必互素。

设 a、b 互素，则 a、b 不会同偶。先看 a、b 同奇的情形。这时，c 必为偶数，设 $a=2m+1$，$b=2n+1$，$c=2l$（因 a、b、c 均不可能为 1，这里 m、n、l 均为自然数），那么由 (1)：$a^2+b^2=c^2$，即

$$(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+m+n)+2=(2l)^2,$$

$$2(m^2+n^2+m+n)+1=2l^2.$$

左边为奇数，右边为偶数，不论 m、n、l 取怎样的整数，等式不可能成立。就是说，勾股数组的勾数和股数不能同为奇数。特别地，我们有

ii）在勾股数基本组中，勾数和股数必为一奇一偶，弦数为奇数；

iii）若 (x, y, z) 为勾股数组，$(x, y)=d$，则 $d|z$（这里，(x, y) 表示 x、y 的最大公约数，$d|z$ 表示 d 能整除 z），且 $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ 为基本组；

iv）成等差数列的基本组只有一组：(3, 4, 5)，或记成 (4, 3, 5)。

v）任何基本组都可由下式表出：

$$a=m^2-n^2, \quad b=2mn, \quad c=m^2+n^2 \tag{2}$$

$(m>n,\ m,\ n$ 为自然数，一奇一偶且 $(m,\ n)=1)$.

上述公式的证明，在通常的数论书中所用的方法是很麻烦的。1983 年，武汉市第 41 中学的刘天章提出了一种巧妙的推导方法，介绍如下：

设 $(a,\ b,\ c)$ 为基本组，则

$$a^2+b^2=c^2. \qquad (\text{这里}(a,\ b)=1)$$

两边除以 c^2，得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

因此，可设

$$\frac{a}{c}=\cos\alpha, \qquad \frac{b}{c}=\sin\alpha.$$

由于 $\frac{a}{c}>0$、$\frac{b}{c}>0$，可取 $0<\alpha<90°$，那么 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ 为小于 1 的正有理数，可设 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{n}{m}$ $(m>n,\ m,\ n$ 为互素的自然数)。应用万能公式：

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

得到

$$\frac{a}{c}=\frac{1-\left(\frac{n}{m}\right)^2}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},$$

$$\frac{b}{c}=\frac{2\frac{n}{m}}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}=\frac{2mn}{m^2+n^2}.$$

设

$$\frac{a}{m^2-n^2}=\frac{b}{2mn}=\frac{c}{m^2+n^2}=k,\ (\text{这里 } k \text{ 为自然数})$$

那么

$$a=k(m^2-n^2),\quad b=2kmn,\quad c=k(m^2+n^2).$$

当互素数 m、n 为一奇一偶时，取 $k=1$，则 $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)=1$，这就证得了(2)式。

观察由(2)得到的一些基本组：

$$(3, 4, 5),\quad (5, 12, 13),\quad (7, 24, 25),$$
$$(21, 20, 29),\quad (45, 28, 53),$$

我们能得到什么结论呢？可以看出，每组数中，都有3，4和5的倍数。这是偶然的吗？我们来考查abc：

$$\begin{aligned}abc&=2mn(m^2-n^2)(m^2+n^2)\\&=2mn[(m^4-1)-(n^4-1)]\\&=2m(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\\&\quad+2n(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)\\&\quad-10m(n-1)n(n+1)-10n(m-1)m(m+1).\end{aligned}$$

由于连续3个自然数的乘积可被 $3!=3\times2\times1=6$ 整除，连续5个自然数的乘积能被 $5!=120$ 整除，上式右边每一项都能被 $60=3\times4\times5$ 整除，$60|abc$；但 a、b、c 两两互素，因此有

vi) 勾股数基本组 (a, b, c) 中，必有一个是 3 的倍数，一个是 4 的倍数，一个是 5 的倍数。

将 ab 类似变形，容易证明 $12|ab$，即 a、b 中必有 3 的倍数，必有 4 的倍数。

我们来看看一般勾股数组怎么表示。设 (x, y, z) 为勾股数组，则对任何自然数 m，由于从 $x^2+y^2=z^2$ 可推出 $(mx)^2+(my)^2=(mz)^2$，知 (mx, my, mz) 也是勾股数组。反之，设 $(x, y)=d$，按最大公约数定义，$x=da$，$y=db$，这里 $(a, b)=1$。这时

$$z^2=(da)^2+(db)^2=d^2(a^2+b^2),$$

故 $d|z$。设 $z=dc$，则 $a^2+b^2=c^2$ 且 $(a, b, c)=1$，(a, b, c) 为基本组，可以按公式(2)表出。从而得到

定理 2 勾股数的一般表达式是

$$x=k(m^2-n^2), \quad y=2kmn, \quad z=k(m^2+n^2). \tag{3}$$

(上式中 k、m、n 为自然数，$m>n$，$(m, n)=1$ 且一奇一偶。)

如不遵守括号中最后两个条件，则对不同的 m、n，得到的数组不尽相异。

【例 2】 设 $z=x+yi$ 的实部 $R(z)=x$、虚部 $I(z)=y$ 都是非零整数，且 $x\neq y$，求证：$(|R(z^2)|, |I(z^2)|, |z|^2)$ 是一组勾股数。

事实上，$z^2=(x^2-y^2)+2xyi$，那末 $R(z^2)=x^2-y^2$、$I(z^2)=2xy$、$|z|^2=x^2+y^2$，故定理中的结论成立。

【例 3】 若在勾股数组 (a, b, c) 中，$a\leqslant b$，a 为奇数，