

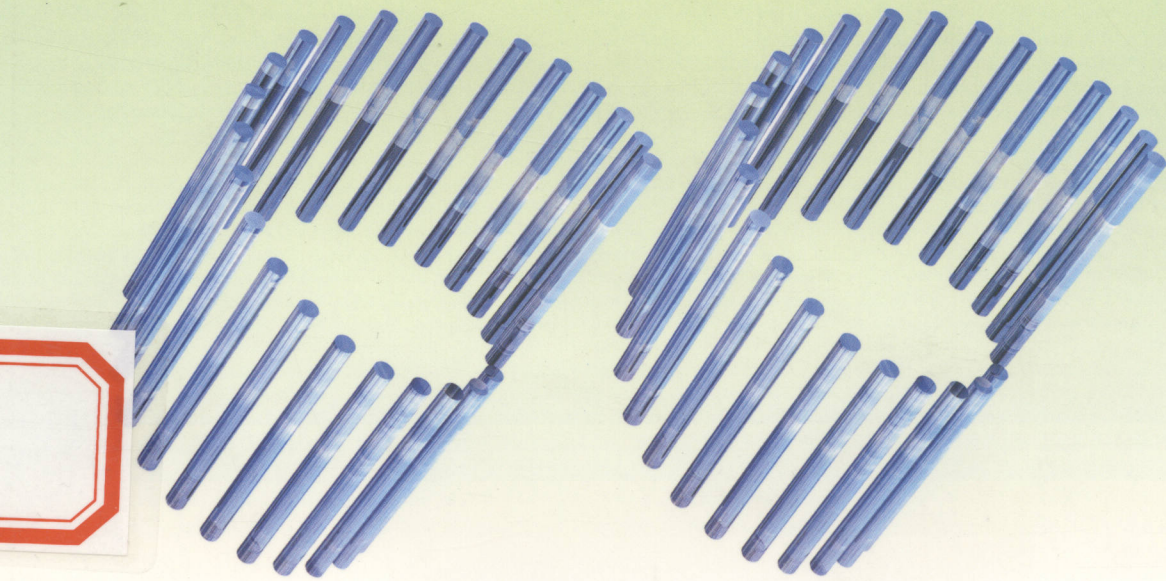
GAODENG SHUXUE TONGBU LIANXI

与同济版《高等数学》配套使用

高等数学

同步练习

安徽工程科技学院数学教研室 编



中国科学技术大学出版社

高等数学同步练习

安徽工程科技学院数学教研室 编

中国科学技术大学出版社

2005·合肥

内 容 简 介

本书是编者根据多年的教学实践,按照教育部最新《高等数学课程教学基本要求》,本着题型丰富、题量恰当、难易适中、方便实用的原则,历经七年试用,修订而成。

本书内容分五个模块:同步练习、习题选解、各章自测题、期末考试模拟试题(上下学期各3套)、高等数学应用插页。可供高等院校理工类学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步练习/安徽工程科技学院数学教研室编. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2005. 8

ISBN 7-312-01821-1

I. 高… II. 安… III. 高等数学-高等学校-习题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 085802 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号, 邮政编码: 230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本: 787×1092/16 印张: 9.5 字数: 230 千

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1—10000 册

ISBN 7-312-01821-1/O · 314 定价: 12.00 元

目 录

| | |
|-----------------|-------|
| 同步练习 | (1) |
| 第一章 函数与极限 | (3) |
| 第二章 导数与微分 | (12) |
| 第三章 导数应用 | (20) |
| 第四章 不定积分 | (29) |
| 第五章 定积分 | (35) |
| 第六章 定积分的应用 | (41) |
| 第七章 空间解析几何与向量代数 | (45) |
| 第八章 多元函数微分法及其应用 | (51) |
| 第九章 重积分 | (59) |
| 第十章 曲线积分与曲面积分 | (65) |
| 第十一章 无穷级数 | (72) |
| 第十二章 微分方程 | (79) |
| 习题选解 | (89) |
| 习题选解一 | (91) |
| 习题选解二 | (93) |
| 习题选解三 | (95) |
| 习题选解四 | (97) |
| 习题选解五 | (99) |
| 习题选解六 | (101) |
| 各章自测题 | (103) |
| 自我测试题一 | (105) |
| 自我测试题二 | (107) |
| 自我测试题三 | (109) |
| 自我测试题四 | (111) |
| 自我测试题五 | (113) |
| 自我测试题六 | (115) |
| 自我测试题七 | (117) |
| 自我测试题八 | (119) |
| 自我测试题九 | (121) |
| 自我测试题十 | (123) |
| 自我测试题十一 | (125) |

| | |
|------------|-------|
| 模拟试题 | (127) |
| 高等数学模拟试题一 | (129) |
| 高等数学模拟试题二 | (131) |
| 高等数学模拟试题三 | (133) |
| 高等数学模拟试题四 | (134) |
| 高等数学模拟试题五 | (136) |
| 高等数学模拟试题六 | (137) |
| 高等数学及其应用插件 | (139) |

同步练习

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、选择题

- 函数 $y = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x-4}}$ 的定义域是().
 A. $\{x|x>4\}$ B. $\{x|x>-4\}$ C. $\{x|x\geq-4\}$ D. $\{x|x\geq4\}$
- 下列各对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同函数的是().
 A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$ B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$
 C. $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$ D. $f(x)=\lg \sqrt{x}, g(x)=\frac{1}{2}\lg|x|$

二、填空题

- 设函数 $f(x)=2^x, g(x)=5x+5$, 则 $g[f(x)-x]=$ _____.
- 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则 $f(x+a)+f(x-a)$ ($0 < a < \frac{1}{2}$) 的定义域为 _____.

三、求证题

- 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$, 则 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- 已知 $f(x)=e^{x^2}, f(\varphi(x))=1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式及定义域.
- 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $f(x-1)$.
- 设 $\varphi(x), f(x)$ 及 $g(x)$ 是单调增函数, 证明:
 若 $\varphi(x) < f(x) < g(x)$, 则 $\varphi(\varphi(x)) < f(f(x)) < g(g(x))$.

第二节 数列的极限

一、选择题

1. 数列 $x_n : 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{10}, \dots$ ().

- A. 发散 B. 收敛于 0 C. 收敛于 -1 D. 收敛于 1

2. 下列数列中收敛的是 ().

- A. $\{(-1)^n\}$ B. $\{n^2+1\}$ C. $\{(-1)^n \frac{1}{2n}\}$ D. $\{1+\sin(2n+1)\}$

3. 下列数列中极限不存在的是 ().

- A. $10, 10, 10, \dots$ B. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$$C. x_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n}{1-n} & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$D. x_n = \begin{cases} 1 & n < 10^6 \\ \frac{1}{n} & n \geq 10^6 \end{cases}$$

二、证明题

1. 根据数列极限定义, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

2. 设 $\{x_n\}$ 是数列, 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 并举例说明反过来未必成立.

第三节 函数的极限

一、选择题

- 下列说法中正确的是().
 - 函数在 x_0 处无定义,则在这点必无极限
 - 函数在 x_0 处有定义,则在这点必有极限
 - 若函数在 x_0 处有定义且有极限,则其极限值必为该点函数值
 - 在确定函数在点 x_0 处的极限时,对函数在点 x_0 是否有定义不作要求
- 设 $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$ 对于给定正数 ϵ , 则定义中的 δ 必须().
 - $\delta \geq \frac{\epsilon}{3}$
 - $\delta = \frac{\epsilon}{3}$
 - $\delta < \frac{\epsilon}{3}$
 - $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$
- 若 $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = A$, 则对于任意给定的小正数 ϵ , 总存在一个正数 δ 使得当满足何条件时恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ().
 - $0 < |x - x_0| < \delta$
 - $0 < x - 4 < \delta$
 - $0 < 4 - x < \delta$
 - $0 < |x - 4| < \delta$

二、求证题

- 根据函数极限的定义证明: $\lim_{x \rightarrow 2} (3x+5) = 11$.

- 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$, 试分别讨论 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1$ 时的极限, 并画出函数的图形.

第四节 无穷小与无穷大

一、选择题

1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时 α 和 β 都是无穷小, 下列变量中当 $x \rightarrow x_0$ 时可能不是无穷小的是().

A. $\alpha + \beta$

B. $\alpha - \beta$

C. $\alpha \cdot \beta$

D. $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$)

2. 下列变量在给定的变化过程中为无穷小的是().

A. $2^x - 1$ ($x \rightarrow 0$)

B. $1 - \frac{|x|}{x}$ ($x \rightarrow 0$)

C. $\frac{1}{(x-1)^2}$ ($x \rightarrow 1$)

D. $2^{-x} - 1$ ($x \rightarrow 1$)

3. 下列命题中正确的是().

A. 无界变量必是无穷大

B. 无穷大是一个很大的数

C. 无穷大的倒数是无穷小

D. 无穷小是一个很小的数

4. “当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - A$ 是一个无穷小”是“函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处以 A 为极限”的().

A. 必要而不充分条件

B. 充分而不必要条件

C. 充分必要条件

D. 无关条件

二、证明题

1. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 试证明: 当 $x \rightarrow \infty$ 时它是无穷小, 当 $x \rightarrow 0$ 时它是无穷大.

第五节 极限运算法则

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^2(3x+1)^3}{(2x+1)^5}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0 \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$ 错在何处, 请指出.

第六节 极限存在准则 两个重要极限

一、选择题

1. 收敛数列().
 A. 必有界 B. 必无界 C. 不一定有界 D. 必单调
2. 下列结论正确的是().
 A. 无界数列必发散 B. 发散数列必无界
 C. 有界数列必收敛 D. 单调数列必收敛
3. 下列等式中成立的是().
 A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \pi \sin \frac{1}{x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = 1$ D. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$
4. 下列极限中极限值为 e 的是().
 A. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+2}$ C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}-2}$

二、求证题

1. 计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$

2. 证明数列 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \dots$ 的极限存在并求极限值.

第七节 无穷小的比较

一、选择题

1. 下列函数中当 $x \rightarrow 0$ 时, 与无穷小 x 相比是高阶无穷小的是().
- A. $\sin x$ B. $x+x^2$ C. \sqrt{x} D. $1-\cos x$
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时与 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ 等价的无穷小是().
- A. x B. $2x$ C. x^2 D. $2x^2$
3. 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时, 若().
- A. 不是无穷大, 则必有界 B. 极限不存在, 则必为无界
- C. 是无界, 则必为无穷大 D. 是无穷小, 则必存在极限
4. 当 $x \rightarrow 0$ 时与 $e^{7x}-1$ 等价的无穷小是().
- A. x B. $5x$ C. $7x$ D. x^3

二、利用等价无穷小的性质求下列极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x)^2}{1-\cos x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

第八节 函数的连续性与间断点

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处左连续且右连续是它在该点连续的().
 A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充分必要条件 D. 无关条件
2. 下列函数在 $x=0$ 处不连续的是().

A. $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x > 0 \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1+e^x & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().

A. 左连续

B. 右连续

C. 左极限不存在

D. 右极限不存在

4. 要使函数 $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续, 则要求补充定义 $f(0) = ()$.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x & -3 < x < 0 \\ L & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + K & 0 < x < 8 \end{cases}$ 在定义域内连续, 则 L, K 的值为().

A. $L=0, K=1$

B. $L=1, K=0$

C. $L=1, K=1$

D. $L=0, K=0$

二、填空题

1. $x=2$ 是 $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ 的 _____ 间断点.

2. $x=0$ 是 $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ 的 _____ 间断点.

三、思考题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}} = \infty$. 错在何处, 请指出.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

第十节 闭区间上连续函数的性质

一、选择题

1. 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是它在 $[a, b]$ 上必能取得最大值和最小值的().
 A. 必要条件 B. 充分条件 C. 充分必要条件 D. 无关条件
2. $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的初等函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上().
 A. 有最大值, 无最小值 B. 有最小值, 无最大值
 C. 必有最大值, 最小值 D. 无最大值, 亦无最小值

二、求证题

1. 利用函数连续性等计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \pi.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x-1}{x} (a > 0).$

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0}$ (提示: 令 $t = x - x_0$).

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 若 $f(a) < a, f(b) > b$, 试证: 在开区间 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \xi$. (提示: 设辅助函数 $g(x) = f(x) - x$)

3. 证明: 方程 $x^4 - 3x^2 + 7x = 10$ 至少有一个实根在 1 与 2 之间.

第二章 导数与微分

第一节 导数概念

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处不连续, 则().

| | |
|-------------------|-----------------------------------------|
| A. $f'(x_0)$ 必存在 | B. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必存在 |
| C. $f'(x_0)$ 必不存在 | D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必不存在 |
2. 函数 $f(x) = |x| + 2$ 在 $x=0$ 处().

| | |
|-------------|--------------|
| A. 不连续, 但可导 | B. 不连续, 也不可导 |
| C. 连续且可导 | D. 连续但不可导 |
3. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的().

| | |
|------------------|-------------------|
| A. 左、右导数都存在 | B. 左导数存在, 但右导数不存在 |
| C. 左导数不存在, 右导数存在 | D. 左、右导数都不存在 |

二、填空题

1. 设 $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $f'(3) = 2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{2h} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} a \sin x + 1 & x \leq 0 \\ b(1+2x) & x > 0 \end{cases}$, 试确定常数 a, b , 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.
2. 设曲线 $y = x^3$ 上点 M 处的切线平行于直线 $3x - y - 1 = 0$, 求点 M 的坐标, 并写出曲线在该点的切线方程.
3. $(\sin 2)' = \cos 2$. 错在何处, 请指出.