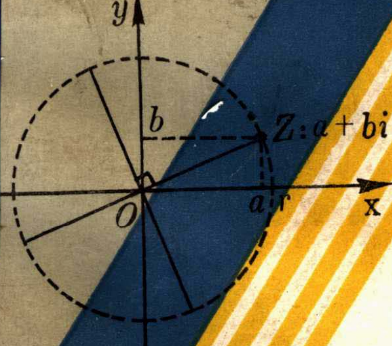
怎样学好数学

高中代数

·下册·



上海教育出版社

怎样学好数学

高中代数

（下册）

华东师大二附中 傅伯华 唐清成 马惠生 编

上海教育出版社

怎样学好数学
高中代数
（下　册）
华东师大二附中　傅伯华　唐清成　马惠生 编
上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
各地新华书店经销　上海视桥印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 7.5　字数 160,000
1990 年 9 月第 1 版　1990 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—1,300 本
ISBN 7-5320-1391-X/G·1362　定价：2.05 元

写在前面

数学是现代科学的基础学科之一，数学水平的高低将会直接或间接地影响我国科学技术的发展．为了帮助青年学生在中学阶段系统而又牢固地掌握基础的基础，加深对中学数学基本概念、公式的理解，熟练基本运算技能，锻炼积极思维，培养分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《怎样学好数学》的小丛书，供中学生、自学青年参考、学习之用．

这套小丛书是以中学现行数学课本为依据而编写的，合共十册：初中代数、几何各两册；高中代数两册；三角、立体几何、解析几何各一册；数学学习与思考一册．在内容编排上力求配合教材，在知识方面适当地作了拓广．它的特点是，每册书的每章内容大致从五个栏目去展开的：(1)知识拓广（基础知识），(2)疑难辨析，(3)解题方法，(4)错在哪里，(5)练习和思考．具体体现如下：

在知识拓广部分：介绍一些数学知识产生的背景；围绕教材的重点、难点，有针对性地讲清基本概念，从不同的角度定义某一概念，以及扩展和这一内容有关的知识，使学生比较深入地理解和掌握基础知识．

在疑难辨析部分：对教材中的难点或学生容易混淆的概念，讲清知识的内在联系和本质的区别，同时作一定的对比、分析，使学生养成严密地剖析思维的良好习惯．

在解题方法部分：介绍几种典型例题的解题思路，指导学生的解题途径，有的采取一题多解．开扩学生的解题思路和判

断解法优劣的能力，有的采取小综合题，提高学生运用知识的能力和培养分析的习惯．至于在证题方法中，除了指导学生掌握定理本身的内容外，还引导学生掌握证明过程中所用到的方法．

在错在哪里部分：中学生目前在学习数学中，常常由于审题不周密，或者概念不清楚，或者推理无依据，或者讨论不全面，或者计算不准确，或者作图不认真而导致这样和那样的错误，故在分析和订正里引导学生认真剖析错误所在，找出造成错误的原因，然而订正错误，总结教训，有利于学生从反面加深对基础知识的理解和基本技能的掌握，从而提高分析问题和解决问题的能力．

在练习和思考部分：安排一定数量的练习题和思考题，引导学生独立思考，复习和巩固已学的知识，进一步提高运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力．

这套小丛书由本市上海中学、复旦附中、华东师大一附中、华东师大二附中、五十一中学、七一中学、杨浦区教育学院部分数学教师协同编写．由于我们水平有限，又缺乏编写经验，缺点、错误一定存在，希望多加批评指正．

唐秀颖

一九八三年八月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目 录

第一章 复 数

知识拓广

1. 为什么要引进虚数

我们知道，在自然数里只能进行加法和乘法的运算，而减法和除法的运算并不是经常可以进行的. 在引进了分数和零以后，加、乘、除(除数不为零)的运算可以施行，但减法运算仍然受到阻碍. 在引入了负数以后，即在有理数集内，四则运算才能通行无阻，后来又引进了无理数，把有理数集扩充到实数集，在实数集内，开方运算仍不能完全进行，负数开偶次方在实数里得不到任何结果. 如最简单的二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内就没有解.

早在 1545 年，意大利米兰城的一位医生卡尔达诺（G. Cardano, 1501～1576）在《重要的艺术》一文中叙述三次方程的解法时，首先产生了负数开平方的思想. 他把数“40”看作 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积，然而，这仅仅是一种形式的表示而已. 这样表示，究竟有什么好处，当时谁也说不上，许多人根本不承认负数开平方后还是“数”. 直到 1637 年，法国大数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）在《几何学》中还说负数开平方是“不可思议的”，因此把这样的“数”叫叫做“虚数”.

一百多年后，1747 年，法国著名数学家达朗贝尔

(D'Alembert, 1717～1783)指出：如果按照多项式的四则运算规则对虚数进行运算，那么它的结果总是 $a+b\sqrt{-1}$ 的形式(a, b 都是实数)．实际上他已经提出了复数的概念，这对复数的研究推进了一大步．

到 1777 年后，瑞士数学家欧拉(Euler, 1707～1783)在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中，首次使用符号"i"作为虚数的单位，并系统地阐述了复数的理论．然而，只有到十九世纪中叶，德国数学家高斯(Gauss, 1777～1855)系统地使用符号 i，并给出了"复数"这个名词以后，复数理论才逐渐被人们所接受，并通行于全世界．

而真正对虚数作出合理解释的是挪威的一位测量学家外塞尔(Wessel, 1745～1818)，他在递交给丹麦科学院的论文中，阐明了复数的几何意义．正式提出用平面上的点的坐标(a, b)来表示复数，使复数的全体与平面上点的全体建立了一一对应的关系，形成了复平面的概念．这和现在复平面的表示方法完全一致．眼下，复数和复变函数的理论，已成为科学家和技术人员普遍熟悉的数学工具，已成为数学宝库中的珍宝之一．虚数之"虚"，早已只剩下历史上的意义了．

从虚数的出现到正式被人们承认，经历了两百多年的曲折的发展过程，这正好说明虚数的引进是科学发展的必然结果．就数学本身而言，当引进了一个新的数 i，并规定 $i^2=-1$ 时，就解决了原有实数集内不能完全地进行开方运算的矛盾，这里，新数 i 称为虚数单位，它与全体实数一起构成新的数集——复数集．作为复数集中的基本元素复数 z，我们用 $a+bi(a, b\in R)$ 的形式表示，其中实数 a 称为复数 z 的实部记作 $R(z)$；而虚数部分的实系数 b 称为复数 z 的虚部，记作 $I(z)$．这样，数的范围又扩充了．现在我们把复数分类表示

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

如下：

- 复数（形如 $a+bi$ 的数 $a,b\in R$）
  - 实数（形如 $a+0i$ 的数）
    - 有理数
      - 正有理数
        - 正整数
        - 正分数
      - 零
      - 负有理数
        - 负整数
        - 负分数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
  - 虚数（形如 $a+bi$ 的数且 $b\neq 0$）——纯虚数 bi $\begin{pmatrix}a=0\\b\neq 0\end{pmatrix}$——虚数单位 i $\begin{pmatrix}a=0\\b=1\end{pmatrix}$

在复数集中，两个复数按多项式运算法则进行加法和乘法运算的结果仍然是一个复数，而且完全符合实数集中运算的基本规律.

作为例子，我们证明加法和乘法的交换律成立.

设 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，那么，

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i),\\&=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i;\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}z_2+z_1&=(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)\\&=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)i.\end{aligned}$$

因为实数的加法满足交换律，所以

$$a_1+a_2=a_2+a_1;\quad b_1+b_2=b_2+b_1.$$

因此，$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)i$.

即 $z_1+z_2=z_2+z_1$.（满足加法交换律）

乘法运算同样可得

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)\\&=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2\\&=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i;\end{aligned}$$

而 $$z_2\cdot z_1=(a_2+b_2i)\cdot(a_1+b_1i)$$
$$=a_2a_1+a_2b_1i+a_1b_2i+b_2b_1i^2$$
$$=(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+a_1b_2)i.$$

因为实数的加法和乘法都满足交换律，所以，

$$a_1a_2-b_1b_2=a_2a_1-b_2b_1;$$
$$a_1b_2+a_2b_1=a_2b_1+a_1b_2.$$

因此，

$$(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i=(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+a_1b_2)i.$$

即 $z_1z_2=z_2z_1$. （满足乘法交换律）

中学数学中，建立复数集可使代数方程的理论完备起来，它为解决某些三角、几何问题带来方便．因此在中学阶段学习复数是完全必要的．

2．复数的几何意义

复数所以能广泛地应用于实际，是由于给出了它的几何解释，这使复数的理论，建立在直观的、牢固的几何基础上．

数的概念从自然数扩充到实数的各个阶段中，新数的引进都是直接与量的度量的需要相关的．通过数轴，我们可以对这些数的实际意义作直观的几何解释．自然数和正分数可以用数轴上原点右边部分的半直线上的点表示出来；有理数可以用数轴上的点表示，这时数轴上任意两个表示有理数的点之间，至少还能找到一个点来表示一个有理数（如$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{2}$之间还可以找到$\frac{5}{12}$这样的“点”）．因此，数轴上表示有理数的点的排列是非常紧密的（稠密性），但是，两个有理数点之间还存在许许多多的点，它们无法用有理数来表示．于是，我们又引进了无理数，完成了实数集的建立工作，数轴上的“空隙”，

才被完全“填满”(实数的连续性).这样,我们可以说：任意一个实数对应着数轴上唯一的点;反之,数轴上的每一点都对应着唯一的实数.这就是数轴上的点集与实数集之间的一一对应关系.这种一一对应关系，就是实数的几何解释.

在建立复数集之后，复数 $a+bi$ 的确定，关键是实部 a 和虚部 b 的确定，我们用有序的实数对 (a, b) 来代表复数 $a+bi$. 如果平面上一点的横坐标和纵坐标分别是某个复数 $z=a+bi$ 的实部和虚部，我们就可以记点 $z(a, b)$，用以表示这个复数 z，因此，平面内的每一个点 Z,可以表示唯一的复数 z;反之，任何一个复数 z 都可以用平面内确定的点 Z 来表示，它们之间是一一对应的.由此,我们便可以将每一个复数作为平面内的点的解析表达式;反过来,也可以把平面上每一点,看作是复数的几何表示,这就是复数的几何解释.显然,表示实数 $a+0i$ 的点都在横轴上,而表示纯虚数 $0+bi(b\neq0)$ 的点都在纵轴上.

通常我们把表示复数的平面称为复平面(也称为高斯平面)，它的横坐标轴叫做实轴，纵坐标轴（除原点外）叫做虚轴.在笛卡儿坐标平面内的每一点(a,b)，可以看成是一对排定顺序的实数;而在复平面内的每一点(a,b)，可以看作是一个复数 $a+bi$.注意到这一点，我们便可以把笛卡儿坐标平面内用坐标法解决的问题，转化为复平面内用复数来解决的问题.反之亦然.因此，笛卡儿坐标平面和复平面是两种不同的数学模型，它们具有不同的含义.

3．虚数单位 i 的特性

在引进虚数单位 i 的同时，规定了 $i^2=-1$, 且 i 可以作为普通的一个数与实数一起进行四则运算,并符合交换律、结合律以及乘法对于加法的分配律，而且四则运算的结果仍然

是属于复数集 C. 在这种规定下，我们得到，方程 $x^2+1=0$ 有两个解，即 $x=\pm i$.

根据复数的几何解释，i 即复数 $0+i$，其所对应的复平面上的点(0,1)是原点上方虚轴上的一点 Z_1，此点到原点的距离为 1；

因为，$i^2=i\cdot i=(0+i)(0+i)=-1+0i$，可知，$i^2$ 在复平面上所对应的点(-1, 0)是原点左边 x 轴上的一点 Z_2，此点到原点 O 的距离也是 1；

又因为，$i^3=i^2\cdot i=(-1+0i)(0+i)=0-i$，可知，$i^3$ 在复平面上所对应的点(0, -1)是原点下方 y 轴上的一点 Z_3，此点到原点的距离仍是 1；

同样，$i^4=i^3\cdot i=(0-i)(0+i)=-i^2=1$，

这就是说，i^4 在复平面上所对应的点(1,0)是原点右边的 x 轴上 Z_4 点，此点到原点的距离还是 1.

如果继续计算 $i^5, i^6, \cdots$，则可以得知：

$$i^{4n+1}=i, \qquad i^{4n+2}=-1,$$

$$i^{4n+3}=-i, \qquad i^{4n}=1. \quad (n\in N)$$

从以上 i 的乘方运算可以看到，对于 i 来说，每乘以一个 i，其结果等于将复平面上的对应点沿着单位圆按逆时针方向绕原点 O 转过 90° 角(图 1).

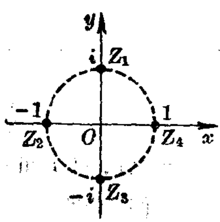


图 1

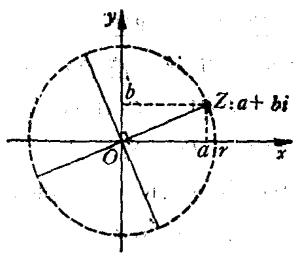


图 2

一般地，对于任意一个复数 $z=a+bi\ (a,\ b\in R)$，每乘以一个 i，则复平面内的对应点 Z，将沿着以原点为中心，$r(r=\sqrt{a^2+b^2})$ 为半径的圆按逆时针方向转过 90°（图 2）.

4. 复数和平面向量的关系

既有大小又有方向的量叫向量，也叫矢量.如力、速度、加速度、电场强度、力矩等都是向量，它们不仅有数值大小，而且还具有方向.大小相同而方向不同的向量是不同的两个向量，例如，两人拔河时，各执绳子一端相拉，绳子受到两人的拉力（不考虑绳子本身重量）大小相同，但是方向却相反，当两个力互相抵销（合力为 0）时，能保持平衡，结果不分胜负，这时，绳子所受的两个力，不能认为是相同的力.而方向相同、大小也相等的两个向量，不管它们的起点是否一致，都被看作是相等的向量，也就是说，任何向量的位置是可以平移的，这种起点不受约束的向量，我们称它为自由向量.由此，大小相等、方向相同的自由向量是相等的.

通常用带有箭头的有向线段来表示向量，如向量 $\overrightarrow{AB}$（见图 3），其中 A 为起点，B 为终点.有向线段的长度，叫做向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$.向量的模是一个非负实数，表示向量的大小.箭头所指的方向就是向量的方向（起点指向终点）.为方便起见，也常用一个字母来表示向量，如 $\vec{F}$，$\vec{a}$，$\vec{v}$，等等.

长度为 1 个单位的向量叫做单位向量.长度为 0 的向量称作零向量，零向量的起点与终点是重合的，因而方向不定.规定凡零向量都是相等的.长度相等，方向相反的两个向量，叫做互为负向量.

根据自由向量起点不受约束的特点，可以将自由向量的起点通过平移移到坐标原点，这种起点在坐标原点的向量叫

做位置向量(亦称半径向量或矢径).因此,任何自由向量都可以用相应的位置向量来表示.几个相等的自由向量,可以由同一个位置向量来表示.反过来,用一个位置向量可表示若干

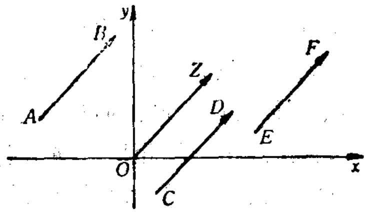


图 3

个相应的自由向量.如图3中,$\overrightarrow{OZ}$分别是$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{EF}$的位置向量,从而,$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$.

复平面内的任何一点$Z(a,b)$,可以和以原点为起点、点Z为终点的位置向量$\overrightarrow{OZ}$建立对应,因为位置向量$\overrightarrow{OZ}$是由Z点唯一确定的,所以这种对应是一一对应;另一方面,复平面内的点与复数集内的复数之间又是一一对应的,因此,复数不仅可以用复平面内的点来表示,同样也可以用位置向量$\overrightarrow{OZ}$来表示.因为它们相互间都是一一对应的,即如图4所示.

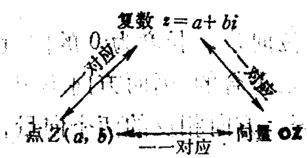


图 4

复数可以用向量来表示,于是复数的运算,可以按照向量的运算法则来进行,即两个向量相加,其和仍为向量,它们符合平行四边形法则.设$\vec{a}$、$\vec{b}$是两个向量,以$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边,作平行四边形,在这个平行四边形中,和$\vec{a}$、$\vec{b}$同一起点的对角线表示

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com