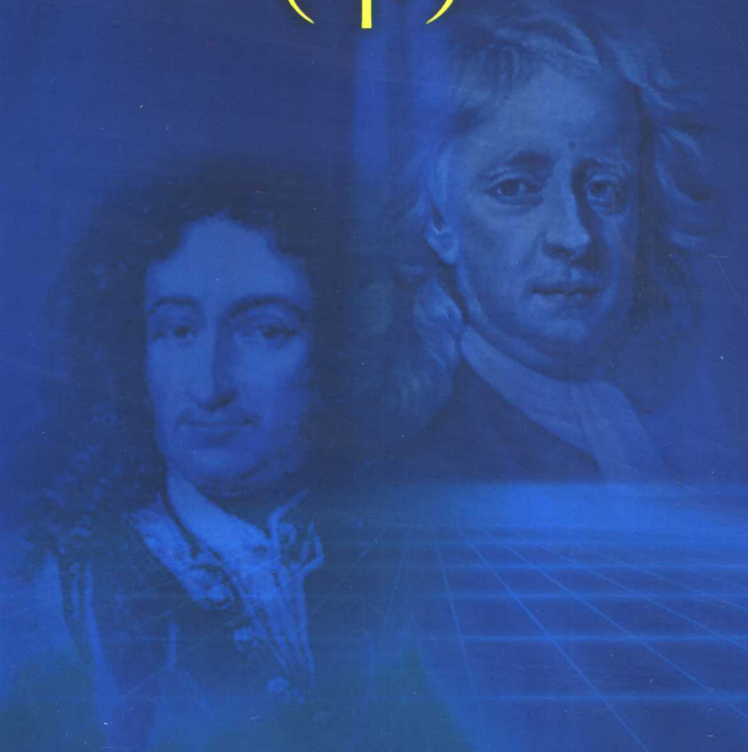
高职高专教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

侯谦民 董汉芬 主编

（下）



湖北科学技术出版社
HUBEI SCIENCE&TECHNOLOGY PRESS

高等数学

（下）

顾　问　黄木生　杨敬华

主　编　侯谦民　董汉芬

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/侯谦民，董汉芬主编. —武汉：湖北科学技术出版社，2006.1

ISBN 7—5352—3417—8

Ⅰ.高… Ⅱ.侯… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 069312 号

高等数学(下) © 侯谦民 董汉芬 主编

责任编辑：高诚毅 宋志阳 封面设计：喻 杨

出版发行：湖北科学技术出版社 电话：87679468

地 址：武汉市雄楚大街 268 号湖北出版文化城 B 座 12-13 层 邮编：430070

印 刷：武汉中科兴业印务有限公司 邮编：430071

787 毫米×1092 毫米 16 开 13.5 印张 310 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7—5352—3417—8/O・52 定价：17.50 元

内容简介

全套教材分上、下两册。上册六章，内容包括一元函数、极限与连续、一元函数微分学、积分学及其应用(包括在经济方面的应用)以及常微分方程等。下册六章，内容有矢量代数与空间解析几何简介、多元函数的微分学、积分学及其应用、级数(包括 Fourier 级数)、拉普拉斯变换以及线性代数初步等。每章各节有 A、B 两套习题，附录里有习题答案供参考。上册附录里还介绍了教学建模等内容，下册附录里介绍了全套教材中出现的数学家以及古今中外著名数学家的生平或简介等。

本教材可作为高职高专以及同类学校工科各专业使用，也可作为文科经济类有关专业使用。

前　言

随着高职高专教育的蓬勃发展，高职高专教材建设也随之得到迅速发展。近年来社会上出现了许多高职高专教材，然而要真正写好一本反映高职教育特点，符合高职学生实际的教材仍在实践与探索之中。根据高职教育特点和培养目标重在应用型人才，基础知识“够用、会用”以及“重实际、轻理论”的原则和思想，在湖北省高职高专教育管理专业委员会及有关领导的大力支持下，我们编写了这本《高等数学》(上、下)教材。该教材主要针对高职院校工科类各专业而编写，但同时也兼顾到文科经济类专业的使用。书中用打 * 号部分介绍了一些常用的经济函数、边际、弹性分析以及导数与定积分在经济中的应用等内容。因此，该书也可作为高职高专经济类有关专业的使用教材。

此教材紧跟高职高专培养目标，以“够用、会用”为原则，重实际，对“难”、“繁”和理论性强的内容只作介绍，不作严格分析与深入讨论。考虑到基础较好学生的要求，用打 * 号或小写字体排列了部分内容；同时，为了提高学生的学习兴趣和培养学生解决实际问题的应用能力，在附录中还介绍了数学建模的内容。教材中例习题较多，分 A、B 两类，供选用。

本教材是作者根据多年教学实践，跟踪历届高职教学进程，并参考其他一些优秀教材，以教学经验和体会编写而成。教材说理浅显、叙述详细、便于教、利于学。

本教材由黄木生、杨敬华任顾问；侯谦民、董汉芬任主编；祝贵清主审。下册第七章由董汉芬编写；第八、九、十、十一章以及附录由侯谦民编写；第十二章由谢春娣编写；全书由侯谦民统稿定稿。

参加下册编写的还有蔡书田、范伟(第七章)；贺彰雄、常荆燕(第十二章)。

由于我们水平有限，不足之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见，以便再版时加以改进。

编　者

2005 年 11 月

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

本章主要为学习多元函数微积分做准备，包括两个相互主要关联的部分：空间解析几何与向量代数.

用代数的方法研究空间几何图形，又利用空间几何图形的直观解决代数问题，就是空间解析几何，它是平面解析几何的推广. 向量代数是研究空间解析几何的工具. 在物理学、力学及工程技术上也有重要的应用.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在平面直角坐标系中，任一点都可用一有序数对表示. 在空间一个点的位置的确定，需要建立空间直角坐标系.

过空间一个点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点. 这三条数轴分别叫做 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；坐标轴的正向通常按右手螺旋法则，即右手四指并拢，大拇指与四指的方向垂直，四指从指向 x 轴正方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 指向 y 轴的正方向，此时，拇指的指向就是 z 轴的正方向. 这样就建立了一个空间直角坐标系. 点 O 叫做坐标原点(如图 7-1).

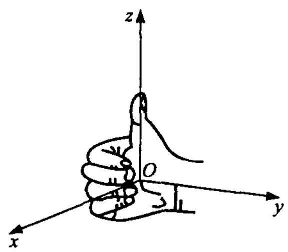


图 7-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. 其中 x 轴与 y 轴所确定的平面叫做 xOy 面，y 轴与 z 轴所确定的平面叫做 yOz 面，z 轴与 x 轴所确定的平面叫做 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限. 含 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限叫做第 Ⅰ 卦限，其他第 Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限，在 xOy 坐标面的上方，按逆时针方向确定. 第 Ⅴ 到第 Ⅷ 卦限分别在第 Ⅰ 到第 Ⅳ 卦限的下方(如图 7-2).

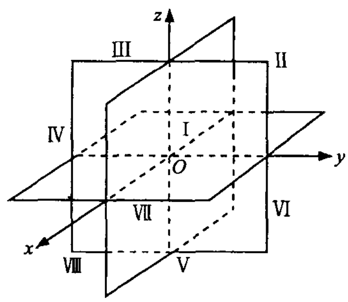


图 7-2

设 P 为空间一点，过点 P 分别作垂直 x 轴、y 轴、z 轴的平面，顺次与 x 轴、y 轴、z 轴交于 P_x, P_y, P_z，这三点在各自的轴上对应的实数值 x, y, z 称为点 P 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标，由此唯一确定的有序数组 (x, y, z) 称为点 P 的坐标. 依次称 x, y 和 z 为点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标，通常记为 $P(x, y, z)$.

二、空间两点间的距离公式

已知空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求 M_1 和 M_2 之间的距离 d.

过 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(如图 7-3).

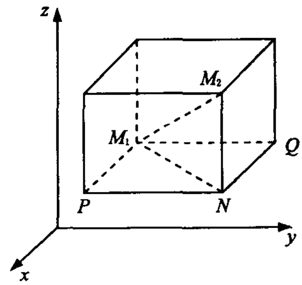


图 7-3

由于$\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形，$\angle M_1NM_2$ 为直角，所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2$$

又$\triangle M_1NP$ 也是直角三角形，$\angle M_1PN$ 为直角，所以

$$|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$$

所以 $$d^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2$$

由于 $|M_1P|=|x_2-x_1|$，$|PN|=|y_2-y_1|$，$|NM_2|=|z_2-z_1|$

故得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 试证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$$

$$|BC|^2+(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98$$

$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49$$

所以 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$，于是$\triangle ABC$ 为 Rt$\triangle$. 又因为 $|AB|=|AC|$，故$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

习题 7-1

(A 组)

1. 说明以下各点的位置的特殊性：

(1)$A(3,0,0)$；　(2)$B(0,-2,0)$；　(3)$C(0,0,4)$；

(4)$D(0,-1,3)$；　(5)$E(-3,0,2)$.

2. 在空间直角坐标系内做出下列各点，并说明它们各在第几卦限：

(1)$A(1,2,3)$；　(2)$B(2,1,-3)$；　(3)$C(-3,2,-7)$；

(4)$D(-4,-3,-5)$.

3. 试以教学楼内某一点为原点，适当建立空间直角坐标系，说明你所在位置的坐标.

4. 在空间直角坐标系中，作点 $A(3,1,2)$ 和点 $B(2,-1,3)$，并写出它们分别关于三个坐标面、三条坐标轴以及原点的对称点的坐标.

(B 组)

1. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点以及各坐标轴间的距离.

2. 试证以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰三角形.

3. 根据下列条件，求点 B 的未知坐标：

(1)$A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；

(2)$A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$；

(3)$A(0,-1,2)$，$B(2,y,5)$，$|AB|=\sqrt{29}$.

4. 在 y 轴上求一点使之与 $A(-3,2,7)$和 $B(3,1,-7)$等距离.

5. 在 yOz 平面上，求与已知点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点.

第二节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在物理学以及其他应用科学中，常会遇到这样一类量：它们既有大小又有方向，例如力、力矩、位移、速度和加速度等，这类量叫做向量或矢量.

向量常用有向线段来表示. 以 A 为起点，B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，也可用粗体字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{F}$ 等，如图 7-4.

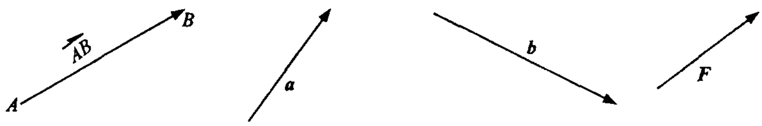


图 7-4

向量的大小叫做向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$的模记作$|\overrightarrow{AB}|$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\boldsymbol{a}|$. 模为 0 的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的. 模等于 1 的向量叫做单位向量.

在实际问题中，有些向量与其起点有关，有些向量与其起点无关. 我们只研究与起点无关的向量. 即一个向量在保持其大小和方向不变的前提下可以自由平移，这种向量称为自由向量(简称向量).

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的模相等、方向相反，就称向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互为负向量，记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$.

二、向量的加、减法

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，对角线向量$\overrightarrow{OC}$记作

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$$

叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量(如图 7-5)，记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

这就是向量加法的平行四边形法则.

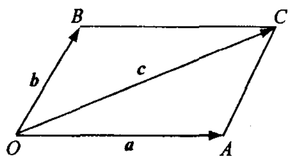


图 7-5

由图 7-5 可看出，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$

故 $$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

由此可得两向量之和的三角法法则：在求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和时，可先作向量 $\boldsymbol{a}$，然后以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{b}$，于是以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量(如图 7-6).

向量加法的三角形法则可以推广到有限个向量相加上，例如求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的和时，可将其依次首尾相接，由第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量即为此三个向量的和向量 $\boldsymbol{d}$(如图 7-7). 这种法则称为多边形法则.

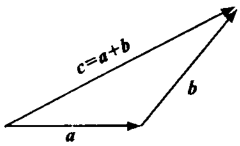


图 7-6

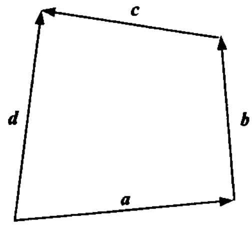


图 7-7

向量加法满足：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2)结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(如图 7-8).

向量的减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可视为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，如图 7-9. 于是得向量的减法法则：从同一起点作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两向量，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量即为向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

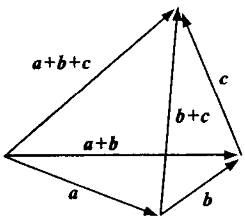


图 7-8

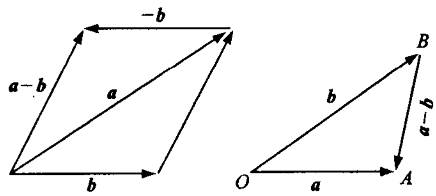


图 7-9

三、数与向量的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积(记作 $\lambda\boldsymbol{a}$)仍是一个向量，其模等于 $|\lambda|$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模的乘积，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

它平行于 $\boldsymbol{a}$，即

$$\lambda\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$$

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=0$.

数与向量的乘法满足：

(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$　(λ,μ 为实数)；

(2)分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，显然 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$，即任何非零向量都可表示为它的模与同向单位向量的乘积. 同时，$\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，即向量的单位向量可由该向量除

以它的模得到.

例 证明三角形两边中点连线平行于第三边,且等于第三边的一半.

证 如图 7-10,已知 D,E 分别是$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 又

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

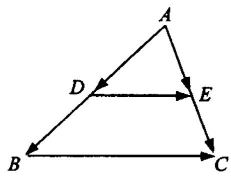


图 7-10

所以 $$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

故 $$\overrightarrow{DE}/\!/\overrightarrow{BC},且|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

习题 7-2

(A 组)

1. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,问它们分别具有什么特征时,下列各式成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$; (2) $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$; (3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;

(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$; (5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 设正六边形 $ABCDEF$,其中心为 O,则向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$和$\overrightarrow{FA}$中哪些向量相等,哪些向量互为负向量?

4. 在$\triangle ABC$ 中,M 是 BC 的中点,N 是 CA 的中点,P 是 AB 的中点,试用 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BC},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CA},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}$表示向量$\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{BN}$和$\overrightarrow{CP}$.

(B 组)

1. 已知 $|\boldsymbol{a}|=5,|\boldsymbol{b}|=8,\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$和$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}+3\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

3. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{p}+8\boldsymbol{q},\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$,试证:$A,B,D$ 三点共线.

4. 用向量的方法证明:梯形两腰中点的联线(即梯形的中位线)平行底边且等于两底边和的一半.

第三节 向量的坐标

一、向量的坐标

在给定的空间直角坐标系中,沿 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向各取一单位向量,并分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称它们为基本单位向量.

设点 $M(x,y,z)$，过点 M 分别做 x 轴、y 轴、z 轴的垂面，交 x 轴、y 轴、z 轴于 A,B 和 C，如图 7-11. 显然，$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$. 于是 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$$=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

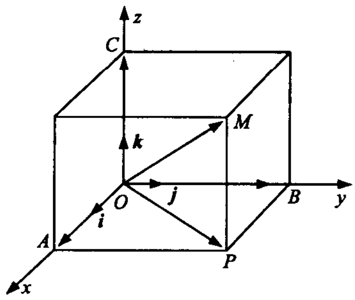


图 7-11

上式表明，任一以原点为起点，$M(x,y,z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 都可表示为坐标与所对应的基本单位向量的乘积之和. 这个表达式叫做向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式，简记为

$$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\} \qquad (2)$$

例 1 已知三点 $A(1,2,4)$，$B(-2,3,1)$，$C(2,5,0)$，分别写出 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 的坐标表达式.

解 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}=\{1,2,4\}$；

$\overrightarrow{OB}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\{-2,3,1\}$；

$\overrightarrow{OC}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}=\{2,5,0\}$.

例 2 已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式.

解 如图 7-12.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\} \qquad (3)\end{aligned}$$

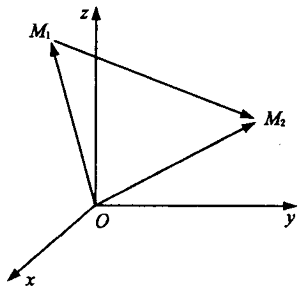


图 7-12

由例 2 看出空间任意向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 也可以表示为如下形式

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

若令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$

则空间任意向量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

其中 a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

二、向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{(a_x+b_x),(a_y+b_y),(a_z+b_z)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=\{(a_x-b_x),(a_y-b_y),(a_z-b_z)\}\end{aligned}$$

$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$（$\lambda$ 是数量）

例 3 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}&=3(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-2(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\&=(9\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})-(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})\\&=7\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}\end{aligned}$$