

逼近与恢复的优化

孙永生文集

SUN YONGSHENG WENJI



北京师范大学出版社



孙永生文集

逼近与恢复的优化

北京师范大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

逼近与恢复的优化 孙永生文集/孙永生著. —北京:
北京师范大学出版社, 2005
ISBN 7-303-07493-7

I. 逼... II. 孙... III. 最佳逼近 IV. 0174.41

中国版本图书馆CIP数据核字 (2005) 第 031563 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码: 100875)

<http://www.bnup.com.cn>

出版人: 赖德胜

北京新丰印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本: 155mm × 235mm 印张: 31.5 字数: 520 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1 ~ 1000 定价: 58.00 元



▲1961年8月，
在颐和园。基础数
学学科座谈会函数
论组合影。

►1956年7月，
在伏尔加河上游
览。左为周毓麟，右
为袁兆鼎。



▼1953年8月，
师专师训班数学组
合影。前排站立者
左起严士健、孙永
生、张禾瑞、郝炳
新，以及董延铠
(右三)。





▲ 1981年8月，
北京师范大学数学系
领导与首届硕士
毕业生合影。



◀ 1983年1月，在
美国 College Station
A&M 大学访问时合
影。

► 1987年11月，前苏
联Steklov研究所Stechkin教
授在北京师范大学数学系
做学术报告，孙永生教授
现场翻译。



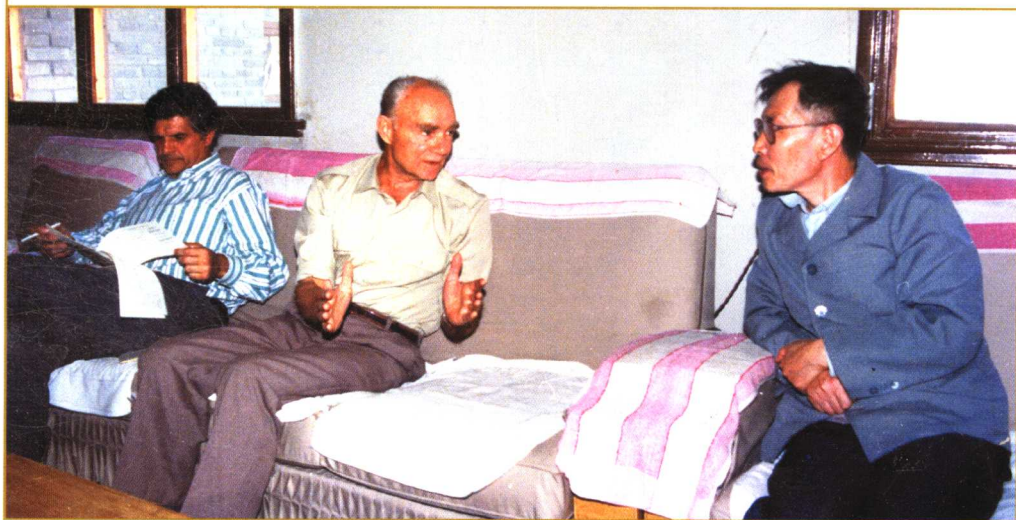


►1991年5月参加北京大学数学力学系博士论文答辩会后,孙永生教授与程民德教授(前右)等合影。

►1993年9月,与以色列数学家Pinkns教授(右二)等合影。



▼1989年9月,前苏联数学家Korneichuk教授(中)、Tikhomirov教授访问北京师范大学数学系,孙永生教授与之交谈。





◀1996年6月，陪同三位俄罗斯数学家登长城。

▶1993年6月，北京师范大学数学系博士学位答辩会后合影。



▼1999年5月，北京师范大学数学系《五教授执教五十周年庆祝会》上，孙永生教授与夫人曾美美合影。



自序

这本论文选集是从我在 1958 年至 2002 年间发表的论文中筛选出来的，其中有些论文是我和我的学生们合作的。它基本上展现了我学习函数逼近论的历史轨迹。

20 世纪 50 年代中期，我在莫斯科大学力学数学系做研究生，师从 S. Stechkin 教授学习函数逼近论。在他的热情指导下，我完成了学位论文，这是我在逼近论方向入门的工作，其主要成果以及嗣后得到的一些有关结果包括在本文集的前面几篇论文中。回国后，我的科研工作经历了一段曲折的道路。1958 年至 1976 年间政治运动连续不断，教学科研工作被迫陷于停顿竟达 13 年之久，“文革”后，科研工作从 1978 年开始恢复。我当时已年近 50 岁了，做科研的黄金时期已经逝去，50 年代学到的一点点东西几乎完全丢光了，我不得不从零开始。我的能力平庸，但对学数学还有一股追求新知的热情和干劲。当务之急是尽快地摸索出一条前进的方向。函数逼近论好比一株百年老树，旧干新枝纷繁密茂，我十分困惑，真有“绕树三匝，何枝可依”之感。除了

学习 Stechkin 和 Nikolskii 的新近著作, 我先后选择了国际上三个著名学派来学习: 前苏联学派的 N. Korneichuk 和 V. Tikhomirov 教授的逼近论的极值理论, 主要是宽度论; 美国学派 Karlin, Micchelli, Pinkus 教授的样条, 宽度和最优恢复论; Traub, Wozniakowskii 教授的信息复杂性理论。学习过程持续了若干年, 大致在 20 世纪 80 年代, 我已经经历了一个不断“脱毛”的过程, 到 80 年代末, 接近了经典逼近论、计算数学、计算机科学的数学理论这三个方向的汇合点, 这是一个多方向交叉渗透的新的研究领域。在这个领域的研究中我是一个晚到者, 然而我决心要在这一广阔领域中为中国的数学工作者争得一席之地。本选集的其他各组论文不过是我(和我的合作者)在长途跋涉过程中迈出的第一步。其核心内容是实现宽度和最优回复研究从 T 到 R 上的过渡。步伐虽小, 然而我感到它是坚实的。它见证着我和我的合作者追求的执着, 凝聚着我们的心血, 渗透着我们的汗水。语云: 敝帚自珍。用这四个字来譬喻这本选集再恰当不过了。

深切怀念扶持、诱掖和提携我的老前辈傅仲孙教授、张禾瑞教授、程民德教授和 Stechkin 教授。老前辈徐利治教授多年来一直给予我热情的鼓励和提携, 老朋友陆善镇教授多年来给予我一贯的支持, 我对他们表示衷心的感谢。

衷心感谢俄罗斯的朋友们, 特别是 V. M. Tikhomirov 教授。我们有过多次交流, 我从他们那里学到了很多。

我特别感谢王昆扬、黄达人、房艮孙、李淳、陈迪荣、李落清、刘永平、汪成咏、汪和平等同志, 他们是我的朋友、同行和战友。在多年的合作中, 我们共同学习, 研讨问题, 结成了忘年交, 他们给了我很多帮助, 我从他们那里学到了很多東西。

北京师范大学领导、数学系领导多年来给了我许多支持和鼓励。王昆扬、李仲来教授和北师大出版社王松浦女士为了本书的出版做了很多工作, 我谨向他们致以衷心感谢。

孙永生

2003-12-27

目 录



一 可微函数类的逼近常数精确计算问题 /

- 周期可微函数用三角多项式的最佳逼近 /3
- 用三角多项式逼近周期可微函数 /14
- 一对共轭周期函数的最佳逼近的渐近性质 /40
- 关于 Cesàro 算子的逼近常数 /64
- 关于周期函数用线性算子的平均逼近 /91

二 B-核 (广义 Bernoulli 核, CVD 核) 宽度精确计算问题 /

- 一个解析的周期函数类的 L_1 宽度 /115
- 一个广义样条函数类上的极值问题和有关的宽度问题 /123
- 关于光滑函数类 $\Omega_p^{2r+\sigma}$ 上的单边逼近 /141
- 关于广义 Bernoulli 核的 n -宽度 /156
- 带一个 B 核的周期卷积类的极子空间 /166

三 Landau 不等式的扩充及其某些应用 /

- 周期可微函数类上的某些极值定理 /179
- 线性微分算子的 Landau-Kolmogorov 型不等式 /200
- 一个光滑函数类上微分算子的最优回复 /206
- 一个线性微分算子的 Hardy-Littlewood-Polya 不等式及有关优化问题 /216
- 定义在实直线上函数的卷积类的极值问题 /226

逼近论中 Hardy-Littlewood-Polya 不等式的广义版本及相关
优化问题 /238

四 全实轴上光滑函数类的逼近及其最优恢复/

关于一个可微函数类的最优插值 (I) /247

可微函数类的最优恢复 (二重取样) /252

可微函数类的最优恢复 (多重取样) /258

$\mathbf{R}$ 上的一个卷积函数类上的最优插值 /263

全实轴上某些光滑函数类用高阶基样条的最佳逼近 /287

$W_2^r(\mathbf{R})$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中的最优回复 /305

全实轴上某些光滑函数类用高阶基样条的最佳单边逼近 /325

Sobolev-Wiener 光滑函数类用二重取样的最优回复 /341

定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的某些光滑函数类在逼近论中的极值问题 /358

五 带有 Gauss 测度的 B 空间内点集的平均逼近问题 及多元问题/

关于 Hilbert 空间内点集的平均宽度 /451

带 Gauss 测度的一个 Banach 空间中最佳逼近的误差界 /457

一个多元周期函数的 Besov 类的宽度估计 /467

具有给定的混合型光滑模的多元周期函数的表现和逼近 /472

附录/

论文和著作目录 /481

后记 /490

Contents



I . Exact Evaluation of the Constants of the Best Approximation for the Differentiable Function Class/

Best Approximation of Periodic Differentiable Functions by Trigonometric Polynomials /3

Best Approximation of Periodic Differentiable Functions by Trigonometric Polynomials /14

Asymptotic Behavior of the Best Approximation of Two Conjugate Periodic Functions /40

The Exact Constant of Approximation for Cesàro Operators /64

On the Approximation of Periodic Functions in Mean by Linear Operators /91

II . Exact Evaluation of the Widths for B-kernel (Generalized Bernoulli Kernel, CVD Kernel)/

On n -width of a Class of Periodic Analytic Functions in L_1 Metric /115

Some Extremal Problems on a Class of Perfect Splines /123

On One-sided Approximation of Class $\Omega_p^{2r+\sigma}$ of Smooth Functions /141

On n -width of Generalized Bernoulli Kernel/156

Optimal Subspaces for a Periodic Convolution Class with a B -kernel

/166

III. Generalization of Landau's Inequality and its Applications/

Some Extremal Problems on the Class of Differentiable Functions
/179

Inequalities of Landau-Kolmogorov Type for Some Linear Differential Operators /200

Optimal Recovery of Differential Operators on a Class of Smooth Functions /206

Hardy-Littlewood-Polya Inequality for a Linear Differential Operator and Some Related Optimal Problems /216

Extremal Problem for a Convolution Class of Functions Defined on the Real Line /226

A Generalized Version of Hardy-Littlewood-Polya Inequality and Some Related Optimal Problems in Approximation Theory /238

IV. Approximation and Best Recovery of the Smooth

Function Classes on the Real Line/

On Optimal Interpolation for a Differentiable Function Class (I)
/247

Optimal Interpolation on Some Class of Differentiable Functions
(Double Sampling) /252

Optimal Interpolation on Some Class of Differentiable Functions
(Multi-Sampling) /258

Optimal Interpolation on a Convolution Class of Functions on $\mathbf{R}$ /263

Best Approximation of Some Classes of Smooth Functions on the
Whole Real Axis by Cardinal Splines of Higher Order /287

Optimal Recovery for $W_2^r(\mathbf{R})$ in $L^2(\mathbf{R})$ /305

Best One-sided Approximation of Some Classes of Smooth Functions
on the Whole Real Axis by Cardinal Splines of Higher Order
/325

Optimal Recovery of the Sobolev-Wiener Class of Smooth Functions
by Double Sampling /341

Extremal Problems in Approximation Theory for Some Classes of
Smooth Functions Defined on $\mathbf{R}^d$ /358

V . Average Approximation of a Subset in a $\mathbf{B}$ - space with Gaussian Measure and Multivariate Problems/

Average n -Width of Point Set in Hilbert Space /451

Average Error Bounds of Best Approximation in a Banach Space with
Gaussian Measure /457

Estimate of Widths for a Besov Class of Multivariate Periodic Func-
tions /467

Representation and Approximation of Multivariate Periodic Func-
tions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness /472

Appendix/

Bibliography of Papers and Works /481

Postscript by the Chief Editor /490

孙永生文集

一、可微函数类的逼近常数 精确计算问题

I.

Exact Evaluation of the Constants
of the Best Approximation for the
Differentiable Function Class

原书空白页

苏联科学院院刊

1961, 数学卷, 25: 143 ~ 152

周期可微函数用三角多项式的最佳逼近

Best Approximation of Periodic Differentiable Functions by Trigonometric Polynomials

本文建立了对于 $r > 1$ 和一切 α 的周期可微函数类 $W^{(r)}(\alpha)$ 用 $n - 1$ 阶三角多项式的最佳逼近的精确上界。

§ 1. 引言

在文[6]中我们研究了寻求对于 $r \geq 6$ 和一切 α 的周期可微函数类 $W^{(r)}(\alpha)$ 用 $n - 1$ 阶三角多项式的最佳逼近的精确上界的问题, 而在文[7]中考虑了对于 $r > 2$ 和一切 α 的同样的问题。此外, 在文[7]中还解决了当 $r > 2$ 时对于类 $W^{(r)}$ 的类似的问题。^①

本文中我们将对于 $r > 1$ 和一切 α 解决我们对于函数类 $W^{(r)}(\alpha)$ 所提出的问题。也就是说, 我们将证明下述定理。

定理 1 (基本的). 设 $f \in W^{(r)}(\alpha)$, $r > 1$ 且 α 是实数, 即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t-x) \varphi(t) dt,$$

其中

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

而 φ 是满足下述条件的可测函数:

* 苏联科学院院刊于 1958 年 8 月 12 日收到本文。

① 本文投出之后, V. K. Dzyadyk 的一篇论文问世, 其中用另外的方法解决了对于函数类 $W^{(r)}$ 所考查的问题。