高等院校数学基础课系列教材

工程数学学习指导

主编　　隋梅真　魏宗周　王继忠

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校数学基础课系列教材

工程数学学习指导

主　编　隋梅真　魏宗周　王继忠

副主编　崔　强　尤海燕　范丽伟

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

工程数学学习指导/隋梅真,魏宗周,王继忠主编. —北京:北京大学出版社,2005.9
(高等院校数学基础课系列教材)
ISBN 7-301-09450-7

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①隋…②魏…③王… Ⅲ. 工程数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 086199 号

书　　名: 工程数学学习指导
丛 书 主 编: 隋梅真　魏宗周　王继忠
著作责任者: 隋梅真　崔　强　尤海燕　范丽伟
责 任 编 辑: 曾琬婷　聂一民
标 准 书 号: ISBN 7-301-09450-7/O·0661
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
排 版 者: 兴盛达打字服务社　82715400
印 刷 者: 北京原创阳光印业有限公司
650mm×980mm　16 开本　19.75 印张　340 千字
2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
印　　数: 0001—8000 册
定　　价: 24.00 元

内容简介

本书是根据国家教育部审定的《工程数学》(包括线性代数、概率论与数理统计)教学要求和硕士研究生入学考试大纲要求,总结编者多年的教学实践经验编写的学习兼考研辅导书。

本书共分两篇。第一篇“线性代数”,介绍了行列式、矩阵、向量与线性空间、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型;第二篇“概率论与数理统计”,介绍了随机事件和概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。本书每一章分为五部分:基本要求与重点、难点,内容提要,例题解析,习题和自测题。基本要求与内容提要简洁、翔实,使读者明确要求,抓住要点。例题解析部分例题丰富,题型广泛,难度由浅入深,既有较简单的基本知识点,又有较难的考研模拟题,尤其是精选了近十年的考研真题作解题分析。本书注重对基本概念的理解,帮助读者掌握正确的解题思路,总结解题规律。另外,书末给出习题与自测题的解答或提示,读者可在独立思考练习的基础上进行对照参考,自我测试。

本书可作为高等院校非数学专业的本科、专科学生学习《工程数学》(包括线性代数、概率论与数理统计)的教学辅导书,也可作为考研辅导参考书。

前　　言

本书是为配合《工程数学》(包括线性代数、概率论与数理统计)教学而编写的教学辅导用书兼考研辅导参考书。旨在帮助广大读者正确理解和掌握工程数学的基本概念、基本理论、基本方法，在此基础上融会贯通，总结解题规律，提高分析问题和解决问题的能力。基本要求与内容提要既简洁又翔实，使读者明确要求，抓住要点；例题和练习题都是精心选编的，涵盖面广、技巧性强，通过例题解析，帮助读者总结解题规律、掌握正确的解题思路和方法。

本书共分两篇。第一篇，线性代数，由崔强、范丽伟编写；第二篇，概率论与数理统计，由隋梅真、尤海燕编写。全书由隋梅真、魏宗周总撰定稿。

本书的编写和出版，得到了山东建筑工程学院各级领导、教师的大力支持与帮助，在此深表感谢。在编写过程中，作者参考了众多教材、教学参考书及考研辅导书，引用了诸多例题、习题，恕不一一指明出处，在此表示诚挚的谢意。

由于水平有限，疏漏、不足之处在所难免，敬请读者与同仁不吝指教。

编　者

2005 年 7 月于济南

目　录

第一篇　线性代数

第二篇 概率论与数理统计

第一篇

线 性 代 数

第一章 行 列 式

一、基本要求与重点、难点

1. 基本要求

(1) 理解 n 阶行列式的定义和性质.

(2) 熟练利用行列式的性质和行列式的按行(列)展开法则计算行列式.

(3) 掌握克莱姆法则.

2. 重点、难点

(1) 行列式计算.

(2) 克莱姆法则.

二、内 容 提 要

1. 全排列与逆序数

全排列 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$ 称为一个 n 元全排列,n 元全排列共有 $n!$ 个,其中由小到大的排列 $123\cdots n$ 称为标准排列.

逆序和逆序数 在一个排列中,任何一对数如果大数排在小数之前,就称这对数构成一个逆序,一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数,用 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$记作 n 元排列 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$ 的逆序数.

逆序数 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$的求法 若排列 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$ 中元素 p_k 前有 t_k 个比 p_k 大的数,则元素 p_k 的逆序数为 t_k,显然 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k$.

奇排列和偶排列 当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为奇数时,排列 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$ 称为奇排列;当 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为偶数时,排列 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$ 称为偶排列.

对换 排列 $p_1\ p_2\ \cdots\ p_n$ 中任意两个元素 p_i 和 p_j 交换位置,就称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.

2. 行列式的概念

2.1 n 阶行列式定义

由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 n 行 n 列，并在两侧加竖线，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，它的值等于取自不同行不同列的 n 个数的乘积的代数和，即

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

2.2 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$阶行列式叫做元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

2.3 转置行列式

将行列式 D 的各行与同序号的列互换，所得到的行列式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T} 或 D'.

3. 行列式的性质

性质 1 经转置的行列式的值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式的两行(或列)，行列式变号.

我们把第 i 行与第 j 行互换，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；第 i 列与第 j 列互换，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

性质 3 行列式中某行(或列)的公因子 k 可以提到行列式的符号外面，记作 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$)，即用一个数乘行列式等于用这个数乘行列式中的任意一行(或列).

性质 4 若一个行列式中有两行(或列)元素完全相同，或对应元素成比例，或有一行(或列)的元素全为零，则行列式等于零.

性质 5 若行列式 D 中第 j 行(或列)元素都是两数之和，则 D 可以分拆成两个行列式的和：$D=D_1+D_2$，其中 D_1 和 D_2 中的第 j 行(或列)的元素分别取自第一个数和第二个数，而 D_1 和 D_2 中其余的元素均与 D 相同.

性质 6 把行列式中的某一行(或列)的各元素都乘以同一个数后加到另一行(或列)对应的元素上,则行列式的值不变.第 j 行的各元素都乘以 k 加到第 i 行,记作 r_i+kr_j,第 j 列的各元素都乘以 k 加到第 i 列,记作 c_i+kc_j.

4. 几种特殊的行列式

4.1 上、下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4.2 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \qquad \begin{vmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

4.3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

5. 行列式按行(列)展开法则及推论

按行:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

按列:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

6. 克莱姆法则

6.1　非齐次线性方程组

设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

如果系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 D_j 是 D 中第 j 列的元素用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替代而得到的行列式 $(j=1,2,\cdots,n)$.

6.2　齐次线性方程组

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

则齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow$ 系数行列式 $D=0$；或仅有零解 $\Longleftrightarrow$ $D\neq 0$.

三、例题解析

例 1.1　设 D 为五阶行列式，则(　　)为 D 中带负号的项.

(A) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$；　　(B) $a_{51}a_{42}a_{33}a_{25}a_{14}$；

(C) $a_{21}a_{32}a_{43}a_{15}a_{54}$；　　(D) $a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}a_{11}$.

分析　五阶行列式的项必须为五个不同行不同列的元素乘积，

选项(A)中只有四个元素,选项(D)中 $a_{21}a_{11}$ 都位于第 1 列,所以排除选项(A),(D);

对选项(B),$a_{51}a_{42}a_{33}a_{25}a_{14}=a_{14}a_{25}a_{33}a_{42}a_{51}$,$\tau(45321)=9$;

对选项(C),$a_{21}a_{32}a_{43}a_{15}a_{54}=a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}$,$\tau(51234)=4$.

所以(B)带负号,(C)带正号,故选(B).

例 1.2 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\text{则 } D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11}-a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21}-a_{22} & -a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31}-a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}=(\quad).$$

(A) $-2D$; (B) 0; (C) $2D$; (D) $6D$.

分析 利用行列式的分拆性质有

$$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11} & -a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21} & -a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31} & -a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 2a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 2a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}=0+2D=2D,\text{故选(C)}.$$

例 1.3 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为( ).(1999 年考研题)

(A) 2; (B) 1; (C) 3; (D) 4.

分析 显然需要利用行列式性质先化简再判别.

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-ir_1}\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 8 & 1 & x+1 & 9 \end{vmatrix}\xlongequal[r_1\div x]{r_4-r_3}x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x+1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4-c_1}x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & x+1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-5x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_1}-5x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}=-5x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

故选(A).

例 1.4　设 D 是 6 阶行列式，其中 $a_{11}=a_{23}=0$，按定义展开式中为零的项至少有______.

解　D 按定义展开式共有 6! 项，其中含 a_{11} 和 a_{23} 的项各有 5! 项，而同时含有 a_{11} 和 a_{23} 的项有 4! 项，所以展开式中含 a_{11} 或 a_{23} 的项共有 $2\times5!-4!=216$ 项，也就是展开式中为零的项至少有 216 项，故应填 216.

例 1.5　一个 n 阶行列式中，若等于零的元素的个数大于 n^2-n，则此行列式的值为______.

分析　n 阶行列式中共有 n^2 个元素，因此非零元素的个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$，而 n 阶行列式的每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积，所以每一项至少有一个零元素，故应填 0.

例 1.6　已知四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\5&1&8&6\\-2&1&4&4\\4&1&0&5\end{vmatrix},$$

则 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=$______. 其中 A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

分析　如果直接计算 $A_{14},A_{24},A_{34},A_{44}$，然后再相加，则计算量较大，且易出错. 因此熟练掌握按行(列)展开法则的推论可起到事半功倍的效果.

解　由于

$$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=1\cdot A_{14}+1\cdot A_{24}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{44},$$

所以它可看作 D 中第 2 列各元素与第 4 列对应元素代数余子式乘积之和，故由展开法则的推论知：$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=0$，故应填 0.

例 1.7　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}.$$

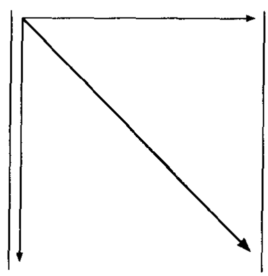

图 1.1

分析　此行列式除第 1 列和第 1 行及主对角线元素外，其余元素均为零. 这样的行列式称为“箭形”行列式，形如右图的“箭形”行列式可利用行列式性质化为三角形行列式来计算.

解 由行列式的性质得

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i \div i} 2\times 3\times\cdots\times n\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-\sum\limits_{i=2}^{n} r_i} n!\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n!\left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

例 1.8 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}，其中 a_i\neq 0(i=1,\cdots,n).$$

分析 计算带字母的 n 阶行列式，考察行列式给出的结构非常重要. 如果用各行分别减去第 1 行就会变成“箭形”行列式.

解法 1 由行列式的性质得

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$