大学数学

主编　张志尧

天津大学出版社

大 学 数 学

主编　张志尧
副主编　冯继元　杨　晶　陈　欣

天津大学出版社

内容提要

本书内容简明扼要，概括性强 全书共分4篇，包含微积分、空间解析几何、线性代数、概率论与数理统计等大学数学的基本内容，在各部分内容的安排上，注意突出重点，力求兼顾到数学理论的系统性、通用性及各专业的不同特点，因而具有较广泛的适用性

本书是一本普通大学数学教育的教材，可供生命科学、经济学、管理科学、文科等各专业的本科生或研究生使用，也可供科技人员及自学大学数学者参考

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/张志尧主编. —天津：天津大学出版社，2001.9

ISBN 7-5618-1458-5

Ⅰ.大…　Ⅱ.张…　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第062760号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话	发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	25.75
字　　数	643千
版　　次	2001年9月第1版
印　　次	2001年9月第1次
印　　数	1—3 500
定　　价	32.50元

前　言

一切科学的学习与研究，不能离开正确的思维方法和严密的逻辑推理.作为思辨科学的数学，以其严谨的逻辑体系和广泛的实际应用，为人们提供了思维和推理的各种规范及解决问题的有力工具，从而直接或者间接地指导着其他学科的研究和发展 本书是对高等院校中生命科学类、管理科学类及经济、文科类各专业本科生或研究生进行大学数学教育的教材.在这些专业中，数学教育的重要地位和作用日益凸现，理性思维的方式正在使这些学科的理论更趋严谨和有序.

尽管不同的专业有着各自的特点，但不论是工科数学抑或文科数学，首先应该是数学，应该具备数学本身的特点和系统性.本书则从如下三个方面体现这种特点：逻辑推理和理性思维训练的重要载体；实际应用和创新研究的有力工具；简洁统一和完备和谐的美感熏陶.

这本《大学数学》可以视为一种普通大学数学教育的教材.内容包括：微积分、解析几何、线性代数、概率论与数理统计等基本内容.具有较广泛的适用性和通用性.各篇内容相对独立，可视需要选用.本书力求在保证科学性的基础上，减少冗长的理论推导，但不削弱必需的基础理论.内容安排上注意循序渐进.在实际教学中，各篇所述知识内容的讲授顺序可根据需要安排.例如，第四篇随机数学可以放在第三篇线性代数前面讲授；第二篇解析几何可以放在第一篇中多元函数微积分前面讲授.

本书由张志尧拟定编写大纲并审阅全书后定稿.其中第 1、2、3、8、9 章由张志尧编写；第 4、5、10、11 章由冯继元编写；第 6、7、12、13、14、15 章由杨晶编写；第 16 至 23 章由陈欣编写

本书在编写过程中，曾参考一些较好的高等数学教材并从中获取不少裨益 天津医科大学卢介景副教授提出了许多有益的意见，编写过程中得到天津医科大学教务处的积极支持和天津大学出版社的大力配合，在此一并表示感谢.

由于编者水平所限，书中难免有不当之处，敬请读者斧正.

张志尧

2001 年 1 月于天津

目　录

第一篇　微积分

第二篇　空间解析几何

第三篇　线性代数

第四篇　随机数学

第一篇 微 积 分

微积分学是大学数学的基本内容之一,在众多科学领域中有着广泛的应用,其中的许多数学分析和推理方法具有典型性.本篇包括一元微积分学和多元微积分学的基本内容.第1章讲述函数的特性和极限的概念与性质,这是微积分学的重要基础;第2章至第5章讲述一元函数微积分学的基本理论与应用;第6章讲述常微分方程理论;第7章简要讲述多元函数微积分学理论.

第1章 函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象,极限则是高等数学的奠基性概念和重要的研究方法.本章将初等数学中的函数知识适当加深并系统化,讨论极限的概念与运算并利用极限描述函数的连续性.

1.1 函数

1.1.1 实数集、区间和邻域

1.集合

集合(set)是指具有某个共同性质的一些对象的全体,其中构成集合的每一个对象称为该集合的**元素**(element).

通常,用大写字母 A、B、C 等表示集合,用小写字母 a、b、c 或希腊字母 α、β、γ 等表示集合的元素.若 a 是集合 A 的元素,则记作 $a\in A$,否则记作 $a\notin A$.

若集合 A 由具有某种性质 p 的元素 x 的全体组成,则常将 A 表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如,方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 的根1,2,3组成一个集合 B,这集合可表示为

$$B=\{x\mid x^3-6x^2+11x-6=0\}.$$

若集合 A 中的元素可以排成

$$a_1,a_2,a_3,\cdots$$

则 A 也可以记为

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}.$$

例如,全体自然数组成的集合为 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$.

元素都是数的集合称为**数集**.

2. **实数集**

全体实数所成的集合为**实数集**,记为 $\mathbf{R}$. $\mathbf{R}$ 中包含有理数和无理数. 所谓有理数是指有尽小数和无尽循环小数,无理数是指无尽非循环小数. 在 $\mathbf{R}$ 中定义了对于实数的运算之后,就有了一个实数体系. 高等数学主要在实数系内进行讨论.

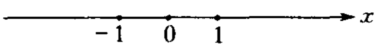


图 1-1

常用数轴上的点来表示实数. 规定了原点,单位长度以及正方向的直线称为数轴,用原点 O 表示数 0,用正半轴上的点表示正实数,用负半轴上的点表示负实数(图 1-1). 这样,实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上全体点所成的集合之间建立了一一对应关系,即实数与数轴上的点是一一对应的,这正是实数的连续性与直线连续性相统一的表现. 有理数对应的点称为有理点,无理数对应的点称为无理点. 本书今后不再区分"数"与"点".

实数集具有下列重要性质.

(1) **有序性**(ordered) i)设 $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a<b$,$a=b$,$a>b$ 三者必居其一,且仅能有一种关系成立;ii)设 a、b、$c\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,$b<c$,则 $a<c$.

(2) **稠密性**(density) 设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq b$,则 a 与 b 之间必有与 a、b 不同的实数.

(3) **阿基米德公理** 对于任意给定的 $a\in\mathbf{R}$,必存在自然数 n 使得 $n>a$.

(4) **连续性**(continuity) 实数集 $\mathbf{R}$ 具有连续性.

实数集满足连续性 在实数理论中,这种连续性可以用不同形式的等价命题来描述. 这里仅从直观上加以说明. 我们知道,实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上全体点所成的集合之间是存在一一对应关系的,而数轴上的点是连续而无空隙地充满整个数轴,相应地,任何两个不同的实数之间必被实数所充满,也不能有空隙,即 $\mathbf{R}$ 具有连续性. 对比来看,有理数集虽是有序的和稠密的,但它不具有连续性,因为任何两个不同的有理数之间必有非有理数(无理点)存在. 如果只看有理数,它们之间总是有空隙的. 实数则不然,它们已经连通起来,毫无间隙了.

3. **实数的绝对值**(absolute value)

设 $a\in\mathbf{R}$,a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a|=\begin{cases} a & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0, \end{cases}$$

显然,$|a|$ 表示点 a 到原点的距离.

绝对值的一些性质:设 a、$b\in\mathbf{R}$,则

(1) $|a|\geqslant 0$;

(2) $|-a|=|a|$;

(3) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;

(4) $|ab|=|a|\cdot|b|$;

(5) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$;$(b\neq 0)$

(6) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,此不等式称为三角不等式;

(7) $|a-b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$.

4 **区间与邻域**

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,称实数集 $\mathbf{R}$ 的子集

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\};$$

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$
$$(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\};$$
$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}.$$

为**有限区间**(finite interval),(a,b)称为开区间(open interval);$[a,b]$称为闭区间(closed interval);$(a,b]$和$[a,b)$均称为半开区间(half-open interval).a、b 称为上述各区间的端点,$b-a$ 称为区间的长度.

在开区间(a,b)中,既不存在最小的实数也不存在最大的实数.

称实数集 **R** 的子集

$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\};$$
$$(a,+\infty)=\{x \mid x > a\};$$
$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$
$$(-\infty,+\infty)=R.$$

为**无限区间**(infinite interval).

有限区间和无限区间统称为区间.区间在数轴上的表示如图 1-2 所示.

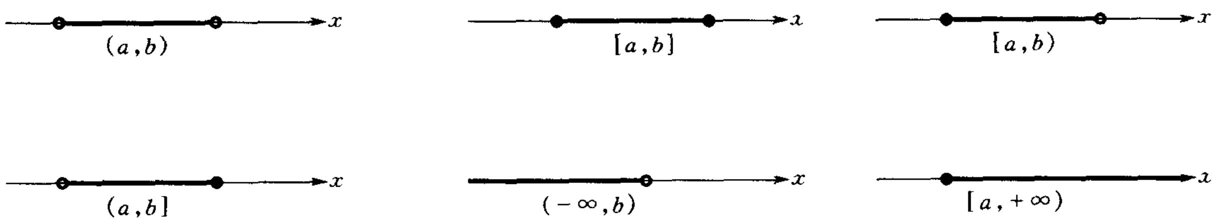


图 1-2

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta>0$.数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$称为点 a 的**邻域**(neighborhood),通常记作 $U(a,\delta)$,如图 1-3(a)所示.又称数集$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$为点 a 的**空心邻域**,记作 $U^{\circ}(a,\delta)$,如图 1-3(b)所示.

图 1-3

1.1.2 函数概念

在观察某一自然现象或技术过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,保持同一确定的数值,这种量称为**常量**(constant);还有一些量在过程中是变化着的,可以取不同的数值,这种量称为**变量**(variable)

例如,把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积和气体的分子个数保持一定,它们是常量;而气体的温度和压力则是变量,它们取得越来越大的数值.

应该注意,常量与变量是相对于一定的研究过程而言的.同一个量在某一过程中是常量,在另一过程中可能是变量.例如,就小范围地区来说,重力加速度可以看做常量,但就广大地区来说,重力加速度则是变量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量,用字母 x、y、t 等表示变量.

同一过程中几个变量的变化常常不是孤立的,而是按照一定规律相互联系、制约的.

例 1.1.1 考察圆的面积 A 与其半径 r 之间的相互关系.我们熟知,它们之间的关系由公式 $A=\pi r^2$ 给定.当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上述公式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 1.1.2 某气象台用自动记录仪,记录了某一天气温 T 随时间 t 的变化曲线(图 1-4).从图上可得在一天中任意一个时刻 t_0 的气温 T_0,如 $t=3$ 时,$T=12$℃;$t=13.5$ 时,$T=22$℃.

例 1.1.3 水的温度不同时密度也不同,4℃时水的密度最大,1 克水在 1 个大气压下在不同温度时的体积如图 1-5 所示.横坐标是水的温度(℃),纵坐标是每克水的体积(cm^3/g).

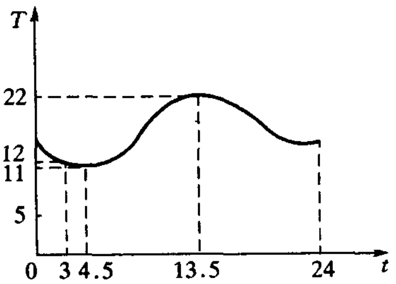


图 1 4

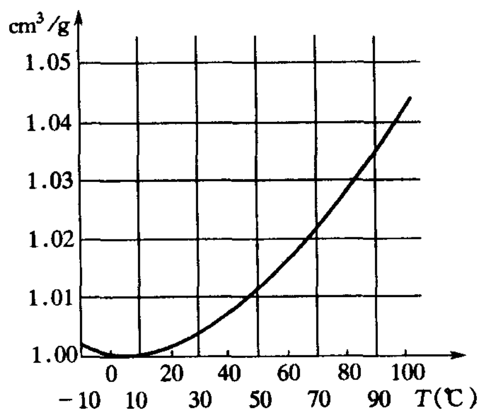


图 1-5

上述各例都是通过一定的规律反映了两个变量之间的相互关系,即当一个变量的值在某一范围内确定之后,另一变量按照一定的对应关系也随之而确定.从数学的角度加以抽象,得到函数的一般定义.

定义 1.1.1 设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y,D 为一非空数集.若对于每一个数 $x\in D$,按照某一确定的对应法则 f,有惟一的一个数 y 与之对应,则称该对应法则 f 是定义在数集 D 上的**函数**(function),记作

$$y=f(x),x\in D$$

称变量 x 为函数 f 的**自变量**(independent variable),y 为函数 f 的**因变量**(denpendent variable),D 为函数 f 的**定义域**(domain of defintion),集合 $\{f(x):x\in D\}$ 为函数 f 的**值域**(range).

有时为叙述方便也常笼统地说"y 是 x 的函数"或"函数 $y=f(x)$"、"函数 $f(x)$"等等.

当自变量取函数 $f(x)$ 定义域中某一定值 x_0 时,函数 $f(x)$ 的对应值 $f(x_0)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

自变量与因变量的对应法则常用 f、F、g、φ 等字母表示,此时函数分别记作 $y=f(x)$、$y=F(x)$、$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$ 等等.

由函数的定义可知,对应法则和定义域是确定函数的两个要素.由数学表达式表示的函数,如果没有明确指明它的定义域,其定义域就是指使表达式有意义的自变量值的全体.

在函数定义中，对于定义域 D 中的每一个 x 值，只能有惟一的 y 值与之对应，这种函数称为单值函数．若对于 x 的每一值，有不止一个 y 的值与之对应，则称为多值函数．本书只讨论单值函数．对于多值函数，可分为几个单值函数来讨论．

例 1.1.4 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$ 的定义域．

解 要使函数的表达式有意义，x 的值必须满足

$$\begin{cases} 9-x^2>0, \\ -1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant 1, \end{cases} \text{解之，得} -1\leqslant x<3,$$

故函数的定义域为 $[-1,3)$．

例 1.1.5 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$，求 $f(2)$ 及 $f(x+1)$．

解

$$f(2)=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5},$$

$$f(x+1)=\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{x^2+2x+2}.$$

函数的表示法通常有三种，即公式法、列表法和图像法．三种方法各有其优点，图像法形象直观，列表法便于查找函数值，公式法则简明准确且便于理论分析．在高等数学中，多采用公式法表示函数．

现考察以下用公式法表示的函数：

$$\text{(a)}\ y=\sqrt{1-x^2}; \qquad \text{(b)}\ y=\sin x-\lg(1+x);$$

$$\text{(c)}\ y+\sin y=x+\lg x; \qquad \text{(d)}\ y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

在(a)、(b)中，函数 y 已由 x 的解析式直接表示出来，称这种形式的函数为**显函数**(explicit function)．在(c)中，y 未由 x 的解析式直接表出，所以不是显函数，称其为**隐函数**(implicit function)．一般地，若一个函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来确定的，并且 y 未被解成 x 的显函数的形式，则称这个函数为隐函数．隐函数是函数的更一般的形式．如果将显函数 $y=f(x)$ 改写成 $y-f(x)=0$，则它可看成隐函数；一个隐函数 $y(x)$ 未必能从其满足的方程 $F(x,y)=0$ 中解成显函数的形式．

在函数的公式表示法中，有些函数在其定义域的不同范围具有不同的解析表达式．这种函数称为**分段函数**(piecewise function)，(d)中所给出的函数就是一个分段函数．又如，函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases} \text{和 } y=\begin{cases} -1-x^2, & x<0, \\ 1+x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$$

均是分段函数．

1.1.3 函数的一些简单性态

1．函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义，若存在正数 M，使得对于 D 中每一个 x 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，并称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**．若不存在满足上述条件的 M，则称 $f(x)$ 在 D 上无界，并称 $f(x)$ 为 D 上的**无界函数**．

例如对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切 x，因 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界

函数. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 或 $[-3,-2]$ 上有界,而在区间 $(0,1)$ 内无界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若对于 D 中任意两个数 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 是 D 上的**单调增加函数**(或**单调减少函数**),也称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(或单调减少)的.

数集 D 上的单调增加函数和单调减少函数统称为 D 上的**单调函数**. 若 D 是一区间,则称此区间为函数 $f(x)$ 的单调区间. 区间上的单调增加(或单调减少)函数,其图形在该区间上是自左至右上升(或下降)的曲线.

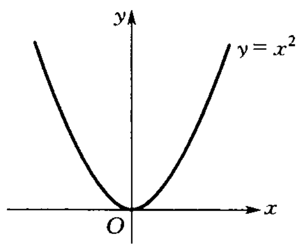


图 1-6

例如,函数 $f(x)=x^3$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增函数. 函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的,在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的,而在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(0)=x^2$ 不是单调函数(图 1-6).

3 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 在数轴上关于原点对称(即若 $x\in D$,则有 $-x\in D$),若对任何 $x\in D$ 有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的**偶函数**;若对任何 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的**奇函数**.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 和 $f(x)=\cos x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数;$f(x)=x^3$ 和 $f(x)=\sin x$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数;函数 $f(x)=x+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上既不是奇函数也不是偶函数,则称其为非奇非偶函数.

区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数(或偶函数)常简称为奇函数(或偶函数).

例 1.1.6 判断函数 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 的奇偶性.

解
$$f(-x)=\frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\frac{1-a^x}{1+a^x}=-\frac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x),$$

由定义知 $f(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 为奇函数

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对任何 $x\in D$,$x+T\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**. 满足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的基本周期. 以后提到函数的周期,均指基本周期. 例如,函她 $f(x)=\sin x$ 和 $f(x)=\tan x$ 都是周期函数,其周期分别是 2π 和 π

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

在函数的定义中,有两个变量,一个叫自变量,一个叫因变量,其所处的地位不同. 但在实际问题中,这种关系往往是相对的 例如,由静止状态自由下落的物体,其运动由函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2,t\in[0,T] \tag{1-1}$$

表示,其中 T 为物体接触地面的时刻. 已知时间 t,就能从式(1-1)得出距离 s. 但是,如果问题是要从物体下落的距离来求所经历的时间 t,就要从式(1-1)中解出 t,将它表示为 s 的函数

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}, s\in[0,H] \tag{1-2}$$

其中 H 是物体在开始下落时距地面的高度.函数(1-2)是与函数(1-1)有关的一个新函数,这时 s 是自变量,t 是因变量,称函数(1-2)为函数(1-1)的反函数.反函数的一般定义如下.

定义 1.1.2 设函数 $y=f(x)$在数集 D 上有定义,若对于值域 $f(D)$中每一个数 y,在 D 中有惟一的数 x 使得$f(x)=y$,则这个对应法则确定了定义在数集 $f(D)$上的一个函数,称其为函数 $y=f(x)$在 D 上的**反函数**(inverse function),记作

$$x=f^{-1}(y), y\in f(D).$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$,原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数.

由于人们习惯用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$写作 $y=f^{-1}(x)$.直接函数 $y=f(x)$的图像与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

例如,对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.其图像如图 1-7 所示.

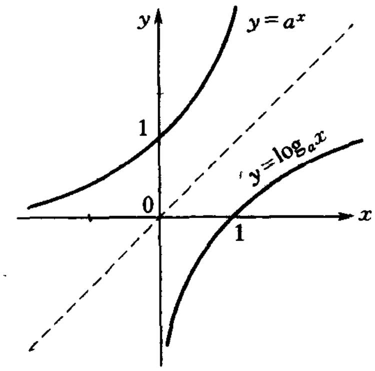


图 1-7

容易理解,直接函数与反函数互为反函数,而且其中一个函数的值域和定义域恰好分别是另一个函数的定义域和值域.

例 1.1.7 求函数 $y=-\sqrt{x-1}$的反函数.

解 函数 $y=-\sqrt{x-1}$的定义域为$[1,+\infty)$,值域为$(-\infty,0]$,由 $y=-\sqrt{x-1}$解出其反函数为

$$x=y^2+1, y\in(-\infty,0),$$

按习惯又写作

$$y=x^2+1, x\in(-\infty,0].$$

2.**复合函数**

从物理学知道,物体的动能 E 与速度 v 的关系是:$E=\frac{1}{2}mv^2$,m 是物体的质量.如果把一个质量为 m 的物体以初速度 v_0 垂直向上抛出,则由于重力作用,它不断减速,其速度随时间变化:$v=v_0-gt$;而此时物体的动能也随时间变化:$E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$.于是 E 是 v 的函数,v 又是t 的函数,故 E 是t 的函数的函数,这是一种复合函数的结构.一般地,有如下定义.

定义 1.1.3 设 y 是u 的函数:$y=f(u)$,u 是x 的函数:$u=\varphi(x)$,对于 x 在$u=\varphi(x)$的定义域或其一部分上取值时所对应的 u 值使$y=f(u)$有定义,则称 y 是x 的**复合函数**(compound function),记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量**.

复合函数可以推广到含有多个中间变量的情形.

例 1.1.8 设 $f(x)=\sqrt{x}+1,\varphi(x)=x^2$,求 $f[\varphi(x)]$及 $\varphi[f(x)]$,并求它们的定义域.

解 $f[\varphi(x)]=\sqrt{\varphi(x)}+1=\sqrt{x^2}+1=|x|+1$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$\varphi[f(x)]=[f(x)]^2=(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1$,其定义域为$[0,+\infty)$.

例 1.1.9 写出下列所给函数的复合函数:

(1) $y=\lg u$, $u=1-x^2$;

(2) $y=10^u$, $u=\cos v$, $v=x^2$.

解 (1) $y=\lg u$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数是

$$y=\lg(1-x^2),x\in(-1,1);$$

(2) $y=10^u$, $u=\cos v$, $v=x^2$ 的复合函数是

$$y=10^{\cos x^2},x\in(-\infty,+\infty).$$

例 1.1.10 指出下列函数是由哪些函数复合而成的:

(1) $y=\lg\sin x$;

(2) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}$;

解 (1) $y=\lg\sin x$ 是由 $y=\lg u$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(2) $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}$ 是由 $y=\arcsin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=x^2-1$ 复合而成的.

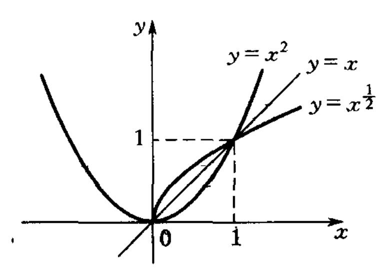
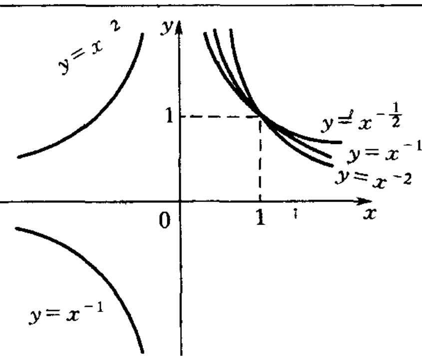
应该指出,不是任意两个函数都可以复合成为一个复合函数的.例如,函数 $y=\arcsin u$, $u\in[-1,1]$ 和函数 $u=2+x^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 就不能进行复合,因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任一 x 值所对应的 u 值,函数 $y=\arcsin u$ 都没有意义.

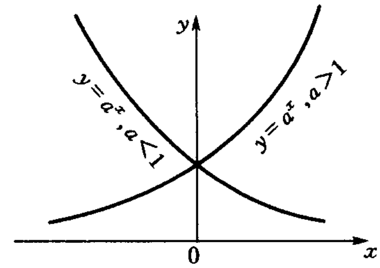
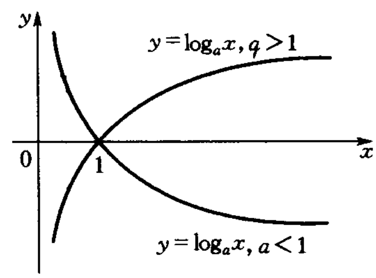
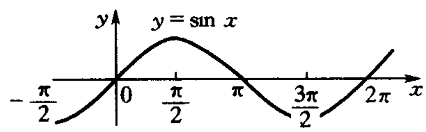
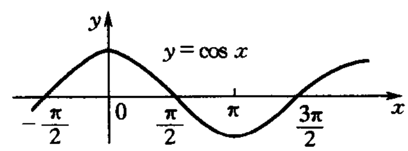
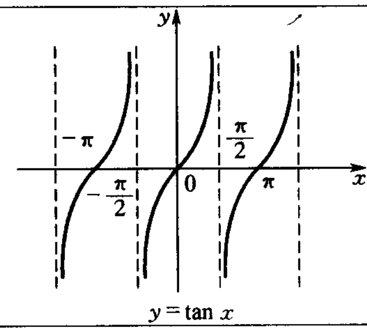
1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

通常把**幂函数**、**指数函数**、**对数函数**、**三角函数**和**反三角函数**统称为**基本初等函数**(fundamental elementary function).这些函数在中学里已有详细介绍,现以表格形式给出其要点.

基本初等函数表

<table>
<tr><th colspan="2">名称与表达式</th><th>定义域</th><th>值 域</th><th>图 形</th></tr>
<tr><td rowspan="2">幂函数
$y=x^\mu$</td><td>μ 次抛物线
($\mu>0$)</td><td>公共定义域
$[0,+\infty)$</td><td>公共值域
$[0,+\infty)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>μ 次抛物线
($\mu<0$)</td><td>公共定义域
$(0,+\infty)$</td><td>公共值域
$(0,+\infty)$</td><td>
</td></tr>
</table>

名称与表达式	定义域	值　域	图　　形
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
正弦函数 $y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
余弦函数 $y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ k 为整数	$(-\infty,+\infty)$	
余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$ k 为整数	$(-\infty,+\infty)$