初中数学综合运用

浙江科学技术出版社

初中数学综合运用

韦敬农　张文雄　编

浙 江 科 学 技 术 出 版 社

责任编辑：周伟元
封面设计：刘洪林

初中数学综合运用

韦敬农　张文雄　编

*

浙江科学技术出版社出版
浙江新华印刷厂印刷
浙江省新华书店发行

开本：787×1092　1/32　印张：4.375　字数：98,000
1983年6月第一版
1983年6月第一次印刷
印数：1—195,000

统一书号：7221·32
定　　价：0.38 元

内 容 提 要

本书分两大部分：第一部分从总的方面介绍怎样综合运用初中数学知识，提高解综合题的能力；第二部分按照初中代数、几何课本的知识系统，分单元介绍综合运用的重点、难点及解综合题的关键，并辅以示范性例题阐明解题的一些规律。全书共选配了400多道较典型的习题，采用“滚雪球”的方式，逐段归纳、应用前面学过的知识，最后串连代数、几何、三角及解析几何的初步知识，把整个初中数学内容作全面综合运用。书末还附有习题答案或提示，可供读者查对。

本书既适合全日制学校初中各年级学生在平时及总复习阶段使用，又适合在职职工准备参加文化考核复习初中数学时阅读。

前　　言

综合运用数学知识来分析问题与解决问题，是数学教学的主要目的要求之一．综合运用能力的强弱，是反映数学学习成绩好坏的重要标志．我们编写这本书，是希望帮助读者花费较少的时间与精力，顺利地达到巩固初中数学知识、提高综合运用能力的目的．

这本书是根据中学数学教学大纲和初中代数、几何课本的内容编写的，但对解综合题的要求有适当提高．它采用“滚雪球”的办法，紧紧围绕课本内容，有目的、有计划、有步骤地把分散在各章节中的有关知识，串连起来通过多种途径进行综合运用，揭示知识的内在联系和解题的一些规律，使读者能够触类旁通、举一反三．编者执教三十多年，使用了这套办法，颇收良效，今将它献给读者．初中各年级学生使用本书时，可以在平时学习代数、几何课本的过程中做完大部分习题，而把一些难度较大、解法比较特殊的题目，留待初三总复习阶段去完成；在职干部、职工在进行文化补课时，可将本书作为课本的补充，其中最后两个单元及解斜三角形部分可以免学，但这并不影响本书的综合训练体系．

本书承韦和春、朱文涛、朱耀斌三同志审稿，周茂和同志为本书提供习题做了许多工作，在此表示衷心感谢．

由于我们水平有限，本书一定存在不少缺点，恳请读者批评指正．

编　者

1983年 1 月

目　　录

一、综合运用中的几个问题

在学习初中数学的过程中，往往会有这种情况：在学习的开始阶段，感到知识比较容易接受，习题也容易解答．但是，随着学习内容的增多和加深，独立解答习题就会感到越来越困难．尤其是到了初中毕业前夕的数学总复习阶段，或者是青年职工初中数学知识补课的复习迎考阶段，都会发现自己所掌握的知识缺漏较多，分析问题的思路不广，解题时觉得束手无策．这是什么缘故呢？原来这里有一个数学基础知识、基本技能与综合运用的关系问题．由于平时掌握的数学知识，有时从某种意义上来说是分散、割裂的．对于一个一个的数学概念、定理，在当时虽然不甚理解，但对照公式，照套例题的解法，一些习题是可以完成的．这样，基础知识理解不深、基本技能应用不熟练等薄弱环节，暂时被掩盖起来了．但随着学过的知识不断增多，就会碰到许多概念、定理、公式、法则的综合运用；在解题时，还需要作判断、推理、论证等，困难就来了．因此，加强平时的及阶段性的综合训练，是学好初中数学的重要环节．

综合运用的目的，是加深理解和掌握初中阶段的一系列数学定义、法则、定理和公式，提高综合运用数学知识、技能解决问题的能力．

那末，应该选择哪些内容作为综合训练的重点，怎样才能较快地掌握解综合题的规律呢？本书将提供一些有效的方法和资料．

1. 怎样选择综合练习题

一个复杂的数学问题，往往是若干个简单问题的综合与发展. 先看下面两个例子：

例 1 (1) 一个实数的绝对值是什么?

(2) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式是什么?

(3) 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与系数的关系是什么?

(4) 什么叫做相反数? 两个相反数的和是多少?

这些问题在代数课本中都有现成的答案，是不难作出回答的.

例 2 当 k 为何值时，一元二次方程 $2(k+3)x^2+4kx+3k-6=0$ 的两个根的绝对值相等?

解 因为原方程的两个根的绝对值相等，所以根据绝对值的定义，这两个根可能相等，也可能是相反的数.

若原方程的两根相等，则由 $2(k+3)\neq 0$ 及判别式

$$\Delta=(4k)^2-4\times 2\times(k+3)(3k-6)=0,\text{得}$$

$$k_1=3,\qquad k_2=-6.$$

若原方程的两个根互为相反数，则它的系数必须满足

$$\begin{cases}(4k)^2-4\times 2\times(k+3)(3k-6)>0,\\ 2(k+3)\neq 0,\\ -\dfrac{4k}{2(k+3)}=0,\end{cases}$$

解之，得 $k_3=0$.

所以，当 k 的值是 3、－6 或 0 时，原方程的两个根的绝对值相等.

在例 1 和例 2 的解题过程中，所涉及的基础知识基本相同，而例 2 是例 1 中知识的综合运用. 可以看出，基础知识是获得解题思路的源泉，是每一步推理的依据，基本运算的技能与技巧，是完成运算任务的基本功. 解综合题，就是多种基础知识和基本技能的结合运用. 但是，在解综合题时，对基础知识的理解深度和基本技能的熟练程度的要求，要比解基础训练题时高得多. 比如对于例 1（1），只要照课本上的定义，回答正数、零、负数的绝对值分别是什么就行了；而在例 2 中却要考虑到，若两个数的绝对值相等，则这两个数可能相等，也可能互为相反数. 在例 1 中，只要从正面知道一元二次方程的根的判别式及根与系数的关系就行了；而在例 2 中，却要理解一元二次方程的判别式和系数是决定方程根的性质的，当方程根的性质已知时，要反过来求出判别式和系数应该满足什么条件，还要注意一元二次方程的二次项系数不等于零的条件，显然对运用基础知识和基本技能的要求提高了. 在本书第二部分的每一单元中，除了指出这一单元最基本的知识和技能以外，还配置了少量为巩固这些知识的练习题，以便打好解综合题的基础.

综合运用数学知识的能力，需要有目的、有计划、有步骤地在解题训练中培养. 本书按照现行初中数学教材内容的编排顺序，选编了十八组综合题，并对各单元知识的综合运用提出一些要求，配上了相应的例题. 由于综合运用的知识范围，是由小到大，由浅到深，由简单到复杂的，因此，首先是在同一单元的范围内，对各部分知识作综合运用. 例如，在因式分解单元中，初中教材着重介绍了因式分解的四种方法：

- 提取公因式法
- 公式法
  - 二项式
    - 二次 a^2-b^2
    - 三次 $a^3\pm b^3$
  - 三项式
    - $a^2+2ab+b^2$
    - $a^2-2ab+b^2$
- 十字相乘法 二次三项式 ax^2+bx+c
- 分组分解法
  - 按公式分组
  - 平均分组
  - 拆项分组

我们第一步是要掌握这四种方法的综合运用.

例 3 因式分解 $a^2x^4+2a^2x^2+a^2-(3ax+a)^2$.

解 原式 $=a^2[x^4+2x^2+1-(3x+1)^2]$

$=a^2[(x^2+1)^2-(3x+1)^2]$

$=a^2(x^2-3x)(x^2+3x+2)$

$=a^2x(x-3)(x+1)(x+2)$.

解这道题时，把因式分解的四种方法都用上了.

实际上，只有把因式分解的各种方法，通过综合运用搞熟以后，才能运用它们去解决其他章节中的综合题，如把因式分解用于解方程、解不等式等. 本书第二部分各单元所配置的习题，都有一定数量这方面的题目，以保证对新学到的知识进行运用. 学会在一个单元内容范围内各部分知识的综合运用，是学会解比较复杂的综合题的重要环节.

在逐段综合的基础上，本书还采取“滚雪球”的办法，配置一定数量的综合题，使后一单元内容与前几单元内容作综合运用. 例如，在代数式的求值计算中，综合有理数的四则运算；在整式运算中，综合有理数四则运算和求代数式的值；在分式运算中，综合整式的运算与因式分解；在根式的运算中，

综合分式的四则运算；在函数及其图象单元中，综合解方程、解不等式等．最后，还安排了代数、几何、三角、解析几何知识的综合运用．这样，可以把初中数学知识技能搞熟、用活．同时，为了避免陷入“题海”，本书精选了400多道习题，选题时力求做到突出重点、针对难点、兼顾一般．例如，对于代数中应用比较广泛的代数式中字母的取值范围、绝对值、算术根、方程、不等式等，保证它们得到反复应用的机会．书中有少量习题解法比较特殊，或者需要用到后面的知识来解，尤其是代数、几何最后几个单元中的有些习题，有一定难度，都宜放在总复习时选用．

2．综合练习题有哪些类型

通过分析综合题的类型，可以明确选题、出题的意图，便于总结解题的规律．本书选配的综合题，主要有以下几种类型：

1）以巩固概念为主的综合题

例1　计算：

$$\left(-4\frac{1}{6}\right)\div\frac{5}{9}\times\frac{3}{5};\qquad 1-3^2\times2;$$

$$(1-3)^2\times2;\qquad (1-3^2)\times2.$$

例2　已知直角三角形的两直角边为3与4，则两直角边在斜边上的射影分别是____，____；此三角形的重心到垂心的距离是____；内心到垂心的距离是____；外心到重心的距离是____．

例1侧重于搞清运算顺序；例2要用到射影、重心、垂心等八个重要概念和定理．这类综合题具有解法简便，形式灵活

多样等优点，对加深概念的理解颇有益处.

2）为防止概念混淆的综合题

例 3　化简 $\dfrac{\log_2 a^2-\log_2 b^2}{\log_2 a-\log_2 b}+\dfrac{\log_3^2 a-\log_3^2 b}{\log_3 a-\log_3 b}$

$$+\frac{\log_4 2a-\log_4 2b}{\log_4 a-\log_4 b}-\log_3 ab.$$

这道题的前三项形式很相似，容易发生概念混淆. 这三个式子，要分别运用幂的对数的性质、分解因式、积的对数的法则. 解题时，先将分子变形，再把分子分母约简.

例 4　m是什么实数时，方程 $2x^2+4mx+(3m-1)=0$ 有两个负根?

解题时，若仅考虑应用韦达定理，解得$m>\frac{1}{3}$，则答案是错的. 因为还需注意一元二次方程有实数根的条件，即 $\Delta=(4m)^2-4\times2\times(3m-1)\geqslant0$，从而又得出 $m\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $m\geqslant1$，所以正确的答案是：$\frac{1}{3}<m\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $m\geqslant1$.

这类题的特点是针对性强，对弥补知识缺漏比较得力.

3）同一概念在不同知识范围内综合运用的习题

例 5　(1) 已知 $a=5$，求 $a-\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值；

(2) 已知 x 是正纯小数，化简 $\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}$；

(3) 化简：$\sqrt{\lg^2 3-\lg 3^2+\lg 10}$，

$\sqrt{a^{-6}-2a^{-3}+1}$，

$\sqrt{(\sin35°-\cos35°)^2}$；

(4) 解方程 $|x+3|+\sqrt{2-x}=3$;

(5) 解不等式 $|x|>5$.

这类题着重用于巩固和加深某个重要概念（如算术根、绝对值的概念），而且通过这些概念的运用，来串连不同章节的知识.

4）体现某种解题方法在不同章节中运用的题

例 6 (1) 因式分解 $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$;

(2) 解方程 $(x^2+x-2)(x^2+x-3)-12=0$;

(3) 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1; \end{cases}$

(4) 解方程 $\dfrac{3x}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{3x}=\dfrac{5}{2}$;

(5) 解方程 $x^2+8x-\sqrt{x^2+8x}=12$.

解这些题，都运用了换元法. 通过解题，能较深刻地领会换元法的意义及作用，从而学会一种新的解题方法.

5）综合运用数学各科知识的题

例 7 如图 1—1，已知 $\triangle ABC$ 内接于圆，$\overset{\frown}{AC}\overset{m}{=}120°$，$E$ 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，$AD:DC=2:3$，$AC=2\sqrt{7}$. 求 AB 及 BC.

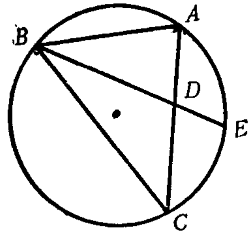

图 1—1

解 $\because$ $\overset{\frown}{AC}=120°$，

$\therefore$ $\angle B=60°$.

$\because$ E 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，

$\therefore$ $\angle ABE=\angle CBE$.

$\because$ BD 是 $\angle B$ 的平分线，$\therefore$ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{2}{3}$.

设比例系数为 x，则 $AB=2x$，$BC=3x$.

根据余弦定理得

$$(2\sqrt{7})^2=(2x)^2+(3x)^2-2\cdot 2x\cdot 3x\cdot\cos 60°,$$

解之，得　$AB=4$，$BC=6$.

解这类题，需要综合运用几何、代数、三角的一些重要知识. 通过解题，可以沟通不同部分的知识和解题方法，并学会综合考虑问题，提高解题能力. 在本书的代数、几何部分的最后几章中，这类题较多.

6）多解题

例 8　在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 为 BC 边上的高，AD 的中点为 M，CM 的延长线交 AB 于 K，求证 $AB=3AK$.

这道题可以有20种以上不同证法，现举其中的几种：

证法一　如图 1－2，取 BK 的中点 E，连结 DE.

证法二　如图 1－3，取 KC 的中点 F，连结 DF（或过 D 作 $DF\parallel AB$).

证法三　如图 1－4，过 M 作 $MN\parallel BC$，且交 AB 于 N，

则　$MN=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{4}BC$，$KN=\dfrac{1}{4}KB$,

$$AN=BN=\frac{3}{4}KB,$$

$$AK=\frac{3}{4}KB-\frac{1}{4}KB=\frac{1}{2}KB.$$

证法四　如图 1－5，过 M 作 $MQ\parallel AB$，

则　$BQ=\dfrac{1}{4}BC$，$QM=\dfrac{3}{4}BK=\dfrac{1}{2}AB$,

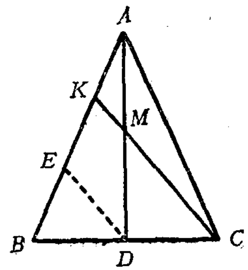

图 1—2

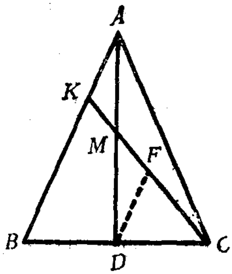

图 1—3

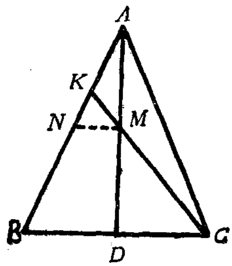

图 1—4

$$\therefore \quad BK=\frac{2}{3}AB.$$

证法五　如图1—6，过K作$KQ \parallel AD$，

则 $$\frac{KQ}{2DM}=\frac{BQ}{BD},\quad \frac{KQ}{DM}=\frac{CQ}{CD},$$

得 $$2\frac{BQ}{BD}=\frac{CQ}{CD},$$

即 $$CQ=2BQ,\ BD=3QD.$$

证法六　如图1—7，过A作$AP \parallel BC$，延长CK交AP于P，则$\triangle AMP \cong \triangle DMC$，$AP=DC=\frac{1}{2}BC$，再证$\triangle AKP \backsim \triangle BKC$.

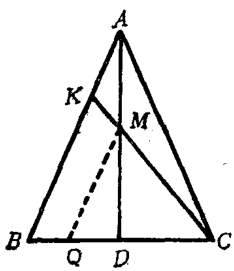

图 1—5

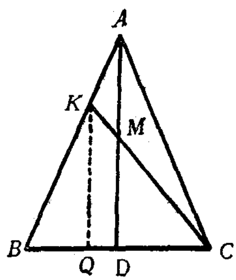

图 1—6

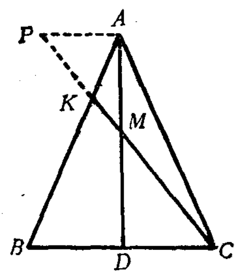

图 1—7

证法七　如图1—8，过D作$DR\parallel AB$，交AC于R且交CK于N，连结RM，则N为$\triangle ACD$的重心，

$$\therefore\quad MN=MK=\frac{1}{3}MC.\quad\because\quad AD\text{为}\angle A\text{的平分线，}$$

$$\therefore\quad \frac{AK}{AC}=\frac{KM}{MC}=\frac{1}{3}.$$

证法八　如图1—9，延长AD至S，使$DS=DM$，连结BS，则$BS\parallel KC$.

证法九　如图1—10，过A作$TG\parallel BC$，延长CM、BM，与GT分别相交于T、G，则K为$\triangle BGT$的重心.

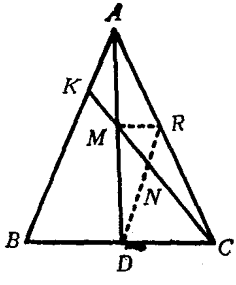

图　1—8

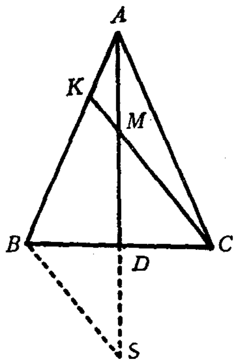

图　1—9

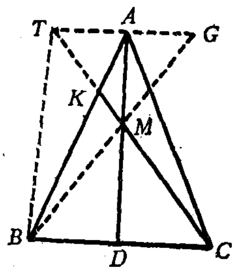

图　1—10

通过一题多解，不仅可以巩固学过的知识，而且更重要的是能够帮助开阔思路，学会探求解题途径，掌握解题规律.

3.怎样总结解题规律

解题的过程，是加深理解有关数学概念、灵活选用有关数

学方法，进行计算、推理的过程．解完题后，回顾分析解题过程，总结若干规律，就可以见一斑而窥全豹，学会举一反三．对于同一问题，可以从不同角度去总结解题规律．下面通过具体例子，介绍几点总结的内容及方法．

1）整理解题中用到的知识

编题者常常有目的、有意识地将若干数学知识融合在一道题里，做了精心的“组装”工作；解题者在解完题后，应该回顾一下，做一些相反的“拆卸”工作．这样，不但可以从中发现解题的正确思考方法，而且可以发现题中所涉及的概念是否已经搞清，有关的定理、公式是否已经熟悉并能加以应用．如果这道题是在别人启发帮助下解出来的，那末这个“拆卸”的步骤就更加需要，而且应该再做几道类似的题目．

例 1　化简 $\sqrt{(\log_3 0.5)^2-\log_3\dfrac{1}{4}+1}$．

解　原式 $=\sqrt{\left(\log_3\dfrac{1}{2}\right)^2-2\log_3\dfrac{1}{2}+1}$

$$=\sqrt{\left(\log_3\frac{1}{2}-1\right)^2}=1-\log_3\frac{1}{2}.$$

解题后可作这样的分析：解题所用到的主要知识有：(i) 算术根的概念；(ii) 区别 $\left(\log_3\dfrac{1}{2}\right)^2$ 与 $\log_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$；(iii) 比较 $\log_3\dfrac{1}{2}$ 与 1 的大小．从解题技巧上看，要善于发现 0.5 与 $\dfrac{1}{4}$ 的关系．如果发现对算术根及对数的概念与性质比较生疏、或对此类解题技巧不熟，则可再做些类似的练习题．

例 2　已知 AD 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线，$\triangle ABD$ 的外接圆 O_1 交 AC 于 E，$\triangle ACD$ 的外接圆 O 交 AB 于 F，求证