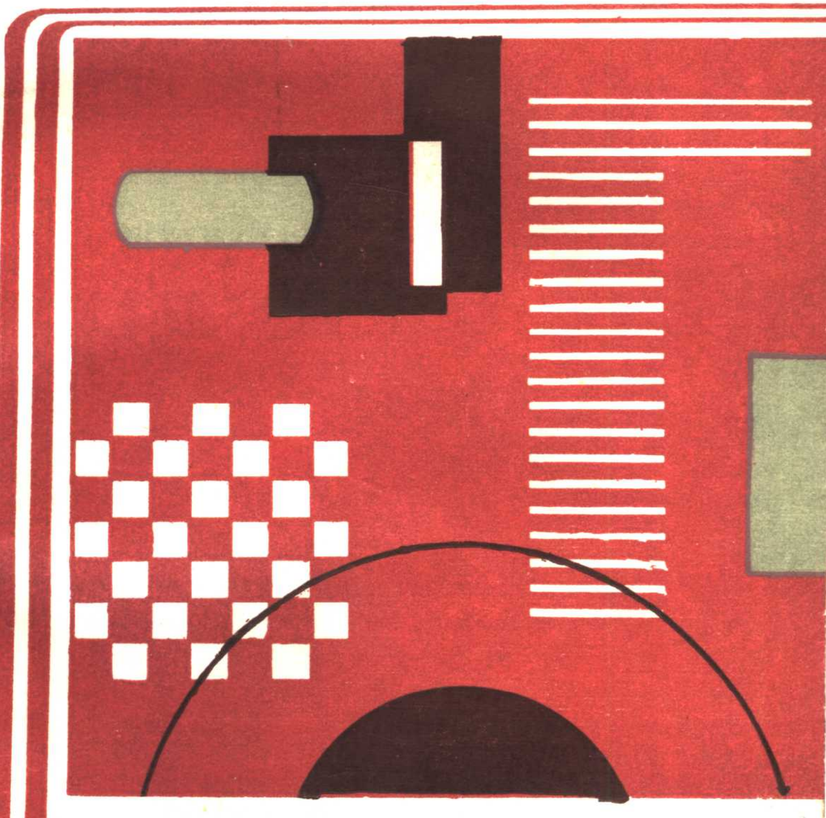
数列通项

冯君南



广西教育出版社

数列通项

冯君南 编著

广西教育出版社

数 列 通 项

冯君南 编著

●

广西教育出版社出版

（南宁市民族大道7号）

广西新华书店发行

广西民族语文印刷厂印刷

●

开本787×1092 1/32开 印张：5.875 127千字

1988年12月第1版第1次印刷

印 数：1—6,000册

ISBN 7—5435—0434—0/G·364

定价：1.70元

前　言

数列的通项公式，对于研究数列的性质和数列的求和是重要的．探讨数列通项公式的求法及其应用，不但能巩固数列的基本知识，而且对于培养归纳推理、演绎推理能力和分析探索的精神，都是相当有益的．1981年以来，在我国的高考数学试卷中，几乎连续出现了有关数列通项知识的试题，引起了广大中学师生对这部分内容的重视．但现行高中数学教材中，尚不可能系统地阐述有关数列通项方面的知识；一般的数学书刊中，有所介绍的也只见斑点．因此，教师深感资料短缺，学生对这方面的问题更感棘手．

鉴于这种情况，本书以现行高中数学教材为依据，从学生的实际出发，采用循序渐进、由浅到深、由易到难的方法，较系统地介绍数列的通项、数列通项的求法以及数列递推关系式与通项式间的关系及其应用等问题．书中，特别注意对求数列通项公式的问题与方法进行分类和归纳总结，并给出了一些新的结论；适当地进行一题多解，正误辩析；例题丰富、典型，解答力求详尽，许多解法灵活、新颖，并给出了现行教材中递归数列的通项公式的推导，选收了一些古典题目和国内外考卷中的一些有关试题．此外，书中还配备了适量的练习题(附有答案或提示)．这样，有利于集中式思维和发散式思维的培养，有利于教与学的研究，有利于边学习边巩固．因此，本书可作为高中生的课外读物、社会青年的自学用书，也可以作为高中数学教师或从事中等数学研究者的

参考资料。

本书旨在帮助读者较系统地学习有关数列通项方面的知识，掌握求数列通项式与递推式的方法、技巧，养成严谨准确的推理习惯，提高分析问题和解决问题的能力。但限于本人的水平，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

冯君南

1987年7月

目　　录

一、数列的通项

如果一个数列$\{a_n\}$的第 n 项a_n 与项数 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式，这个数列就叫做有通项的数列；如果一个数列$\{a_n\}$的第 n 项a_n与项数 n 之间的函数关系不能用一个公式来表示，就说这个数列没有通项公式，这个数列就叫做无通项的数列。如：

例1. 由$\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10}$所组成的数列，它的通项公式是$a_n=\frac{1}{n+2}(n\leqslant 8)$，它是一个有通项的数列。

例2. lg3的精确到$\frac{1}{10},\frac{1}{10^2},\frac{1}{10^3},\cdots,\frac{1}{10^n},\cdots$的不足近似值所组成的数列：0.4,0.47,0.477,0.4771,…，它的第 n 项a_n与项数 n 之间无法用一个公式来表示，它是一个无通项的数列。

对于无通项的数列，只能用语言描述的方法给出，如由小到大的全体素数（质数）组成的数列和例 2 中的数列。无通项的数列是不存在求数列通项问题的。

对于有通项的数列，通常用下列几种方法给出：

方法Ⅰ 给出数列的全部项或前有限项。如例 1 中的数列；又如数列：1,6,11,18,27,…。

方法Ⅱ 给出数列的初始值和接邻项之间的关系式。如：

$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$（参见"课本"*第44页练习第4题）。因为据此可以依次写出该数列的各项。

方法Ⅲ　给出数列的通项式$a_n=f(n)$。因为有了它，就可以写出该数列的任意一项。

方法Ⅳ　给出数列的前n项和公式。如：$S_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。因为前$n$项和$S_n$与通项$a_n$有着十分密切的联系。

当然，对于简单的有通项的数列，有时也可用语言描述的方法给出。如由所有自然数所组成的数列等等。

给出一个有通项的数列，才有可能求该数列的通项公式。值得一提的是，由方法Ⅰ给出的数列，其通项公式未必是唯一的。如：

例3. 已知一个数列是：1,3,5,7,…,那么这个数列的通项公式可以是

$$a_n=2n-1;$$

也可以是

$$a_n=n^4-10n^3+35n^2-48n+23;$$

还可以是

$$a_n=2n^4-20n^3+70n^2-98n+47;$$

……… ……… ………

更一般地，可写成

$$a_n=\frac{2n+p(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)-1}{1+q(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)},$$

其中p、q取任意不同的数值时，就可得到无数多个不同的通

---

* 本书的"课本"均指现行高中数学课本（甲种本）代数第二册.

项公式.

这里，已知数列的各个通项公式虽然形式不一，其对应的数列相异(从第五项起所有的后继项就不一定全相同)，但其对应的前四项相同，揭示了已知项构成的规律(不是该数列的整个构成规律)。所以，这些通项公式都是正确的.

一般地，如果给定了一个数列的前有限项，那么它的通项公式可以有无穷多个。因此，在一般情况下，只要求写出该数列通项的一个较简单的表达式就可以了。如例3，取 $a_n = 2n-1$ 即可.

从函数的观点来说，数列的通项公式是以自然数(或它的有限子集)为自变量的函数表达式。所以，有些数列的通项公式可以用几个解析式来表示，即表示成分段函数

$$a_n = \begin{cases} f_1(n), \\ f_2(n), \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

的形式。有些数列的通项公式，在形式上不是唯一的，如：

例4. 由 -1 和 1 依次组成的数列：$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$。其通项公式可以写成

$$a_n = \begin{cases} 1 (n\text{为奇数时}), \\ -1 (n\text{为偶数时}); \end{cases}$$

或写成

$$a_n = (-1)^n; \quad a_n = \cos n\pi.$$

这些通项公式尽管形式不同，但都表示同一数列.

二、求数列通项的方法与技巧

求数列$\{a_n\}$的通项公式，就是寻求数列中的第 n 项 a_n与 n 之间的函数表达式$a_n=f(n)$。

然而，数列问题千姿百态，其规律难以捉摸，求其通项公式没有划一之法。为了从千变万化中寻找规律，下面我们将求数列通项的若干问题，大体分类进行研究，并就其类型给出相应的方法。

（一）常见数列的通项

我们常见一类数列，它的前有限项所揭示的数列的内在规律是比较浅显易见的，因而它的通项公式，通常用“观察归纳法”来求得。

所谓观察归纳法，就是观察所给数列的前有限项，摸清各项符号的变化规律，搞清各项中不变的数（或式）和不变的运算，然后再探求各项中变化部分与序号 n 之间的关系（这是关键的一步），从而归纳出构成规律，写出该数列的通项公式。为判断答案的正确性，可以将所得的结果逐个（令$n=1,2,3,\cdots$）检验，看其是不是所给数列的相应项，若是即为所求。

在观察的过程中，有时把所给数列的各项分解成若干部分，可使规律明瞭。在分解和归纳的时候，常应用到有关质因数分解、数位、数的整除性、幂指数性质等。

例1. 分别写出下面各数列的一个通项公式：

(1) $1,2,4,8,\cdots$;

(2) $\dfrac{17^2-11}{2\cdot4\cdot6},\dfrac{37^2-11}{3\cdot5\cdot7},\dfrac{57^2-11}{4\cdot6\cdot8},\dfrac{77^2-11}{5\cdot7\cdot9},\cdots$;

(3) $\log_8 15,\log_9 45,\log_{10}135,\log_{11}405,\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{6},\dfrac{11}{12},\dfrac{19}{20},\cdots$;

(5) $1,1+\dfrac{1}{2^2},1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3},1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^4},\cdots$.

解：(1) 在所给数列的前四项中，从第2项起的后三项都与 2 有关，可分解为$2^1,2^2,3^3$，而首项又可写成与2有关的形式2^0。可见，每项中不变的是2，变的是指数 0,1,2,3，它与序号 n 的关系是 $n-1$。所以原数列的一个通项公式为 $a_n=2^{n-1}$。

(2) 所给数列的前四项中，符号不变，运算法则、指数 2 及分子中的第二项11也不变。其余的数或因数都在随着序号 n 的变而变。于是可得原数列通项的一个模式为

$$a_n=\frac{\square^2-11}{\square\cdot\square\cdot\square}.$$（方格□表示待求变式）

现先考虑分子中第一项的底数17,37,57,77,…的变化规律：其个位数字均是7，十位数字1,3,5,7,…与 n 的关系是 $(2n-1)$，故其通项式为 $10(2n-1)+7=20n-3$；再考虑分母中各因数的变化规律：显然，各因数分别是从 2 或 4 或 6 起的连续自然数，它们各自的通项式依次为$n+1$、$n+3$、$n+5$。因此，将这些通项式填到方格中去，便得到原数列的一个通项公式为

$$a_n=\frac{(20n-3)^2-11}{(n+1)(n+3)(n+5)}.$$

(3) 显然，对数的底与序号 n 的关系是$n+7$；将对数的真数：15,45,135,405,…进行质因数分解后可写成：$5\cdot3^1$，$5\cdot3^2,5\cdot3^3,5\cdot3^4,\cdots$其通项为 $5\cdot3^n$. 所以可得原数列的一个通项公式为

$$a_n=\log_{n+7}5\cdot3^n.$$

(4) 原数列可改写为

$$1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{6},1-\frac{1}{12},1-\frac{1}{20},\cdots$$

也即

$$1-\frac{1}{1\times2},1-\frac{1}{2\times3},1-\frac{1}{3\times4},1-\frac{1}{4\times5},\cdots$$

$$\therefore\quad a_n=1-\frac{1}{n(n+1)}.$$

(5) 观察归纳，得

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}.$$

应当指出，常数列的通项即为其所给的常数本身. 如常数列4,4,4,4,…的通项公式为 $a_n=4$. 如果需要的话，其通项还可表示成 $a_n=n^2-(n+2)(n-2)$等形式.

需进一步指出：类似上述命题，如果所给数列的前有限项之构成规律的确难以观察归纳，那么一种有效的方法就是用“待定系数法”求解.

例2. 求数列1,4,12,27,…的一个通项公式.

解：设满足所给数列前四项的一个通项公式为关于 n 的三次多项式

$$a_n=an^3+bn^2+cn+d.$$

分别令$n=1,2,3,4$，得

$$\begin{cases} a+b+c+d=1, & ① \\ 8a+4b+2c+d=4, & ② \\ 27a+9b+3c+d=12, & ③ \\ 64a+16b+4c+d=27. & ④ \end{cases}$$

运用消元法可解得$a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{5}{6}, d=1$。故原数列的一个通项公式为

$$a_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n+1.$$

一般地，已知数列的前 n 项，总可以用一个次数为$n-1$次的有理整函数表示其通项。

练　习　一

1．你能写出数列 15, 25, 35, 45, … 的两个通项公式吗？如果能，试写出来。

2．写出下列各数列的一个通项公式：

（1）$\frac{3}{5}, \frac{4}{8}, \frac{5}{11}, \frac{6}{14}, \cdots$；

（2）21, 43, 85, 167, …；

（3）$\frac{\sqrt{5}+1}{3}, \frac{\sqrt{10}+1}{8}, \frac{\sqrt{17}+1}{15}, \frac{\sqrt{26}+1}{24}, \cdots$；

（4）$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{16}, \frac{17}{256}, \cdots$；

（5）$\lg\frac{1}{3}, \lg\frac{10}{3^2}, \lg\frac{100}{3^4}, \lg\frac{1000}{3^8}, \cdots$；

（6）$\frac{1\cdot3\cdot5}{48}, \frac{3\cdot5\cdot7}{192}, \frac{5\cdot7\cdot9}{480}, \frac{7\cdot9\cdot11}{960}, \cdots$。

3. 试用“待定系数法”，分别求出下列各数列的一个通项公式：

(1) 1,5,14,30,…；

(2) 0,5,3,8,…；

(3) $1^2,2^2,3^2,4^2,\cdots$.

（二）特殊数列的通项

1. 等差数列、等比数列的通项

对于一个数列，如果从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差；如果从第2项起，每一项与它的前一项的比等于同一常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比.

等差数列的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$，其中 a_1 为首项，d为公差.

等比数列的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$，其中a_1为首项，q为公比.

例1. 写出数列1.8,2.1,2.4,2.7,…的一个通项公式.

解： 因为1.8,2.1,2.4,2.7所构成的是以1.8为首项，0.3为公差的等差数列，所以此数列的一个通项公式为

$$a_n=1.8+(n-1)\cdot 0.3=0.3n+1.5.$$

一般来说，给出一个数列的前有限项虽然可以有无数多个通项公式，但当要求其中一个，且它的前有限项构成等差（或等比）数列时，我们可以将这个数列看作等差(或等比)数列来求解．这样求出来的通项公式将是一个比较简单的通项公式．例1正是这样做了.

例2. 根据下面所给条件，分别写出各数列的通项公式：

(1) $a_1=5, a_{n+1}=a_n+3$;

(2) $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}$.

本题虽未指明所给数列是什么数列，但由所给条件是容易判断其类型的。

解：(1) ∵ $a_{n+1}=a_n+3$,

∴ $a_{n+1}-a_n=3$(常数).

∴ 数列$\{a_n\}$是一个以 3 为公差的等差数列.

因此，由等差数列的通项公式可得所求数列的通项公式为 $a_n=3n+2$.

(2) ∵ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$(常数),

∴ $a_n=2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{3^{n-1}}$.

一般地，如果给定数列$\{a_n\}$的项满足 $a_1=a, a_{n+1}=a_n+b$ 或$a_{n+1}=ba_n$(其中 b 是一个与 n 无关的常数)，那么由等差数列或等比数列的通项公式易得所给数列的通项公式.

如果命题指明要求等差(或等比)数列的通项公式，那么解题的关键是确定该数列的首项及其公差(或公比). 此时公差（或公比）有明显的，也有不明显的. 对于不明显者一般通过建立方程组求得.

例3. 写出等比数列 $\{a_n\}$: $-\dfrac{1}{2}, 1, -2, 4, \cdots$的通项公式.

解：∵ 等比数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=-\dfrac{1}{2}$，公比$q=-2$,

$$\therefore\quad a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)^{n-1}=(-1)^n\cdot 2^{n-2}.$$

注：本数列是一个确定给出的等比数列，它的通项公式是唯一确定的。

例4.（1）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3=9$，且$a_1\cdot a_2\cdot a_3=15$，求它的通项公式。

（2）已知等比数列$\{a_n\}$的$a_1+a_3=10, a_4+a_6=\frac{5}{4}$，求它的通项公式。

解：（1）在等差数列$\{a_n\}$中，a_2是a_1与a_3的等差中项，所以$a_1+a_3=2a_2$。

$\because\quad a_1+a_2+a_3=9$，

$\therefore\quad 3a_2=9$，即$a_2=3$。

于是，由方程组

$$\begin{cases}a_1+a_3=6.\\a_1\cdot a_3=5.\end{cases}$$

解得$a_1=1$或5，从而$d=a_2-a_1=2$，或$d=3-5=-2$。

$\therefore\quad a_n=2n-1$，或$a_n=-2n+7$。

（2）由$a_1+a_3=10, a_4+a_6=\frac{5}{4}$，利用等比数列的通项公式，得

$$\begin{cases}a_1+a_1q^2=10,\\a_1q^3+a_1q^5=\frac{5}{4}.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a_1(1+q^2)=10, & ①\\a_1q^3(1+q^2)=\frac{5}{4}. & ②\end{cases}$$

因为 $a_1 \neq 0, 1+q^2 \neq 0$，故可用②除以①，得

$$q^3=\frac{1}{8}，即 q=\frac{1}{2}.$$

将 $q=\frac{1}{2}$ 代入①得 $a_1=8$.

$$\therefore \quad a_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-4}}.$$

例5.（1）已知某等差数列的 $a_{m+n}=A, a_{m-n}=B(m>n)$，求它的通项 a_n。

（2）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，首项为 a，且对任意的项数 m 及 n 来说总有 $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$，其中 S_m 与 S_n 分别表示数列的前 m、n 项和．求它的通项公式，

解:（1）设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，则有

$$\begin{cases} a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d, & ① \\ a_{m-n}=a_1+(m-n-1)d, & ② \\ a_n=a_1+(n-1)d. & ③ \end{cases}$$

①－②，得

$$d=\frac{a_{m+n}-a_{m-n}}{2n},$$

即
$$d=\frac{A-B}{2n}.$$

③－②，得

$$a_n=a_{m-n}+(2n-m)d,$$

$$\therefore \quad a_n=B+(2n-m)\cdot\frac{A-B}{2n}$$