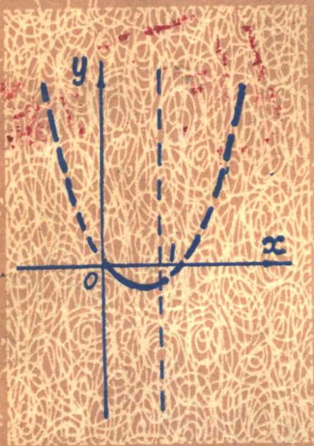

赵凤石　时承权 编

函数极值解题法

函数极值解题法

赵凤石　时承权 编

黑龙江人民出版社
1981年·哈尔滨

责任编辑：田兆民
封面设计：蒋　明

函数极值解题法

赵凤石　时承权　编

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江省绥棱印刷厂印刷　　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张5 8/16·字数100,000
1981年8月第1版　　1981年8月第1次印刷
印数1—　6.500

统一书号：13093·49　　定价：0.46元

出版说明

为加速实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的建设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解答几十种。这本《函数极值解题法》就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围，按照二次函数、三角函数、一次函数、几何法、导数法和不等式求解法等六部分，全面系统、深入浅出地讲述函数极值的解题思路和各种方法。

本书可供中学生、知识青年自学之用，也可供中学数学教师参考。

目　　录

一 引 言

（一）函数的极值

1. 函数的极小值、极大值

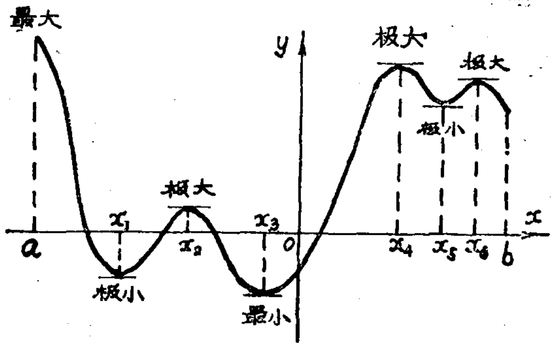

图 1

图 1 是函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象。其中点 $x=x_1$（或 x_3, x_5）所对应的函数值是"谷底"，点 $x=x_2$（或 x_4, x_6）所对应的函数值是"峰顶"，我们分别称它们为函数的**极小值**和**极大值**。准确一点说，就是：

如果函数 $y=f(x)$，在 $x=x_0$ 的值，比邻近各点的函数值都小（或都大），即，只要正数 δ 充分地小，总有

$$f(x_0 \pm \delta) > f(x_0), \ [\text{或 } f(x_0 \pm \delta) < f(x_0)]$$

那么就把 $f(x_0)$ 叫做函数 $f(x)$ 的**极小值**（或**极大值**）。点 $x=x_0$ 叫做函数的**极小值点**（或**极大值点**）。

函数的**极小值**和**极大值**，统称为**极值**．函数的**极小值点**和**极大值点**，统称为**极值点**．函数的极小值记为 $y_{极小}$，函数的极大值记为 $y_{极大}$．

这里说的函数的极小值（或极大值），是就一个小区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 的局部来考察的，是局部性的．因此某一局部的极小值可能比另一个局部的极大值还要大．如图 1 中，函数在点 $x=x_5$ 处的极小值 $f(x_5)$ 比它在点 $x=x_2$ 处的极大值 $f(x_2)$ 还要大．

2. 函数的最小值、最大值

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a,b]$，如果在 $[a,b]$ 上的一点 $x=x_0$ 处的函数值 $f(x_0)$ 不大于（或不小于）此区间上任意点的函数值，即

$$f(x_0)\leqslant f(x),\quad x\in[a,b]$$

或者 $$f(x_0)\geqslant f(x),\quad x\in[a,b]$$

那么 $f(x_0)$ 就叫做函数 $y=f(x)$ 在这个区间上的**最小值**（或**最大值**）．如图 1 中，函数的最小值是 $f(x_3)$，函数的最大值是 $f(a)$．

3. 函数的极值与最小值（或最大值）的关系

函数的极值和最小值（或最大值）是不同的概念，极小值不一定是最小值，极大值也不一定是最大值．两个概念之间有联系又有区别，主要的区别是：

(1) 函数的极值是就一点 $x=x_0$ 的邻近的一个小区间来考察的，它是局部性的，而最小值（或最大值）是在整个定义域（或指定区间）上来考察的．

(2) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有最小值（或最大值），

则这个最小值（或最大值）必出现在 $f(a)$，$f(b)$和$f(x)$ 在(a, b)内的极值之中。

4. 求函数的最小值（或最大值）的一种基本依据

中学里，除掉微分的应用部分求极值的问题外，其他部分的极值问题，大都是函数的最小值（或最大值）问题。

对于函数 $y=f(x)$，如果能设法从函数表达式或者从已知条件中推出下列三种情形之一，便可以求得最小值（或最大值）。这三种情形是求最小值(或最大值)的基本依据)导数法除外)。当下列各式中的"="能够成立时，

（1）如果能推出$f(x)\geqslant m$，那么函数只有最小值

$$y_{最小}=m;$$

（2）如果能推出$f(x)\leqslant M$，那么函数只有最大值

$$y_{最大}=M;$$

（3）如果能推出 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,那么函数同时存在最小值和最大值 $y_{最小}=m$。$y_{最大}=M$.

例如求函数 $y=|x|$的极值，因为$|x|\geqslant 0$，所以根据（1）便得到 $y_{最小}=0$。

（二）几种简单复合函数的最小值（或最大值）定理

设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即

$$u=\varphi(x).$$

如果对于 x 在集合 M 上的每一个值，u 所对应的值，使 $f(u)$都有意义，那么 y 就可以看成是 x 的函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，它的定义域是 M，u 叫做**中间变量**。

例如，函数 $y=\sqrt{2-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=2-x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域是 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

1. 如果 $f(x)$ 有最小值 m，那么函数 $y=kf(x)$（k 为非零常量）。

当 $k>0$ 时，$y_{最小}=km$；当 $k<0$ 时，$y_{最大}=km$。

如果函数 $f(x)$ 有最大值 M，那么函数 $y=kf(x)$（k 为非零常量）。

当 $k>0$ 时，$y_{最大}=kM$；当 $k<0$ 时，$y_{最小}=kM$。

2. 如果函数 $f(x)$ 有最小值 m，那么函数 $y=a-f(x)$ 有最大值，$y_{最大}=a-m$（a 为常量）；

如果函数 $f(x)$ 有最大值 M，那么函数 $y=a-f(x)$ 有最小值，$y_{最小}=a-M$。

3. 如果函数 $f(x)$ 有最小值 $m(m>0)$，那么函数 $y=\dfrac{a}{f(x)}$（a 为非零常量）；

当 $a>0$ 时，有最大值 $y_{最大}=\dfrac{a}{m}$；

当 $a<0$ 时，有最小值 $y_{最小}=\dfrac{a}{m}$。

4. 如果函数 $f(x)$ 有最小值 $m(m\geqslant 0)$，那么函数 $y=\sqrt{f(x)}$ 有最小值 $y_{最小}=\sqrt{m}$。

5. 如果函数 $f(x)$ 有最大值 M（$M>0$），那么函数 $y=\sqrt{f(x)}$ 同时存在最小值和最大值

$$y_{最小}=0,\quad y_{最大}=\sqrt{M}.$$

注意：上述几种简单复合函数的最小值（或最大值）定理，都可以根据前面介绍的基本依据得到证明．如定理 3 的第一部分可证明如下：

证 $\because$ 函数有最小值 m，$(m>0)$

$\therefore$ $$f(x)\geqslant m,$$

由不等式的性质得

$$\frac{1}{f(x)}\leqslant\frac{1}{m}.\ (\because\ f(x),\ m \text{ 均为正数})$$

当 $a>0$ 时，有

$$\frac{a}{f(x)}\leqslant\frac{a}{m},$$

即 $$y\leqslant\frac{a}{m},$$

所以 $$y_{\text{最大}}=\frac{a}{m}.$$

其他几个定理的证明，读者可仿照上面的方法自己完成．

二　二次函数的最小值和最大值

（一）常用公式

1．定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

（1）如果 $a>0$，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值

$$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a};$$

（2）如果 $a<0$，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最大值

$$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

注意：除了记住上面的结果外，还可以用配方法将二次函数化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，然后直接从解析式中看出来。

2．$x\in[\alpha, \beta]$ 的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的最小值（或最大值）可以分为下列两种情况来讨论：

（1）$-\dfrac{b}{2a}\in[\alpha, \beta]$

① $a>0$，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值

$$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

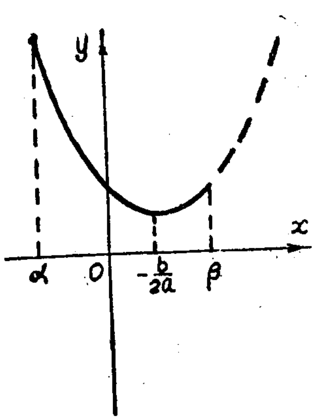

图 2

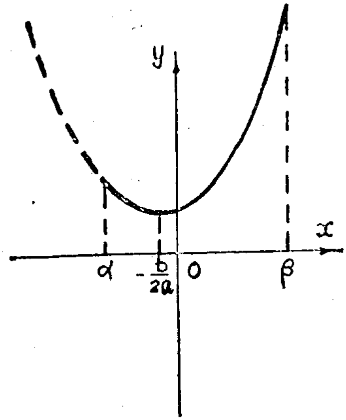

图 3

如果 $f(\alpha)\geqslant f(\beta)$，那么 $y_{最大}=f(\alpha)$（图 2）。

如果 $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$，那么 $y_{最大}=f(\beta)$（图 3）。

② $a<0$，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，函数有最大值

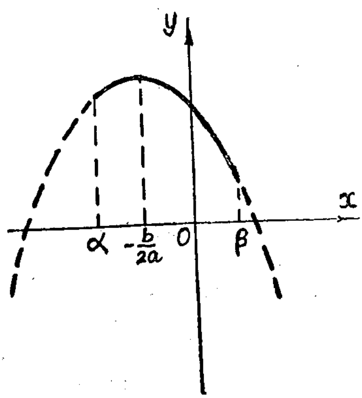

图 4

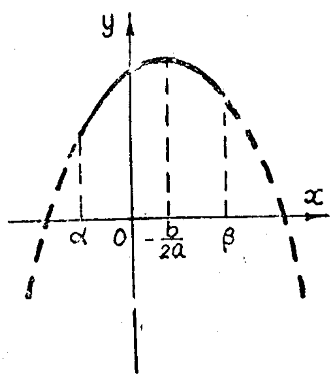

图 5

$$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

如果 $f(\alpha)\geqslant f(\beta)$，那么 $y_{最小}=f(\beta)$（图 4）。

如果 $f(\alpha)\leqslant f(\beta)$，那么 $y_{最小}=f(\alpha)$（图 5）。

(2) $-\frac{b}{2a}\notin[\alpha,\beta]$

如果 $f(\alpha)>f(\beta)$，那么 $y_{最大}=f(\alpha)$，$y_{最小}=f(\beta)$（图 6）。

如果 $f(\alpha)<f(\beta)$，那么 $y_{最大}=f(\beta)$，$y_{最小}=f(\alpha)$（图 7）。

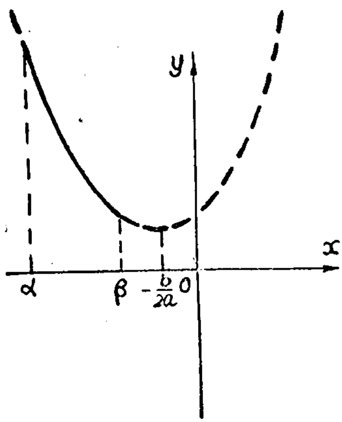

图 6

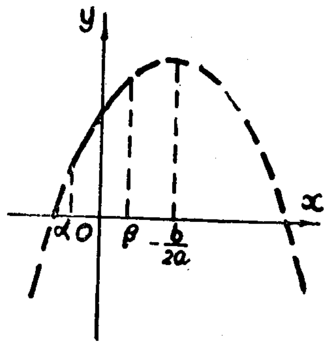

图 7

3. 可以化为二次函数的复合函数的极值，除运用上述公式外，还要注意复合函数本身的性质，如

(1) 形如 $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ 的函数，可设 $u=x^2$，那么 $y=au^2+bu+c$，此时要考虑到 $u\geqslant 0$。

(2) 形如 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$ 的函数，要考虑到 $ax^2+bx+c\geqslant 0$。

(3) 形如 $y=\log_m(ax^2+bx+c)$ $(a\neq 0, m>0$ 且 $m\neq 1)$ 的函数，要考虑到 $ax^2+bx+c>0$。

(二) 基本解法

二次函数的最小值（或最大值）问题，数量多，变化大，下面仅就几种基本类型分析一下解法：

1. 如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的定义域是实数集合，即 $x\in(-\infty, +\infty)$，那么可用前面介绍的公式求解。此时，若 $a>0$，二次函数只有最小值没有最大值；若 $a<0$，二次函数只有最大值没有最小值。

2. 在一定的约束条件下求函数的极值，称为条件极值问题。我们在实际中碰到的问题多数是条件极值问题。二次函数的条件极值问题实质上就是 $x\in[\alpha, \beta]$ 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的极值问题。

这类问题通常有下列几种情况：

(1) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 中的 a、b、c 是固定常数，且明确给出 $x\in[\alpha, \beta]$。这是最简单的一类题目，可用前面介绍的公式求解。

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 中的 a、b、c 是固定的常数，但 $x\in[\alpha, \beta]$ 没有明确给出，而是暗含在某个已知条件中。这类问题必须首先从暗含的条件中确定出 x 的取值范围，然后按公式求解。

某些复合函数及应用问题基本上都属于这种情况。

注意：二次函数的定义域也可能是$[\alpha, \beta)$，$(\alpha, \beta]$或(α, β)。对于这三种情形，首先还是判断$-\frac{b}{2a}$是否属于该区间。其次，对于$[\alpha,\beta)$只考虑$f(\alpha)$；对于$(\alpha, \beta]$只考虑$f(\beta)$；对于(α, β)就不再考虑$f(\alpha)$和$f(\beta)$了。

(3) 二次函数$y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$的系数中含有某个参变数，$x\in[\alpha, \beta]$或明或暗给出。此时，由于$x=-\frac{b}{2a}$是变化的，所以$-\frac{b}{2a}$不一定属于$[\alpha, \beta]$，因此问题的答案就不能唯一。解这类问题，需要将参变数划分成几个区间来讨论函数的极值。参变数划分成的区间集合的并集应该是题中允许的数集，要注意做到不重不漏。每一个参变数应该怎样划分，要视具体问题的情况而定。

3. 二次函数极值的应用题

应用问题实质上是一个条件极值问题，它的特点是没有直接给出函数表达式。解应用问题的关键在于选好自变量，列出适当的函数表达式。列函数表达式是一个难点，很象列方程解应用题。需要我们熟悉数学、物理、化学及生产实践中的某些基本知识。列函数表达式时，要仔细审题，认真分析。同时，要注意根据问题的条件确定出函数的定义域，以便选择相应的解法。

(三) 解法举例

例 1 在实数范围内，求函数$y=5-\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}}$的最小值。

分析 这是一个复合函数，首先应确定它的定义域。因

为判别式 $\Delta=(-1)^2-4\times1\times1<0$，所以 $x\in(-\infty, +\infty)$ 时，$x^2-x+1>0$。即函数的定义域是实数集合。

解 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$(x^2-x+1)_{最小}=\frac{3}{4}$，

$$\because\quad (\sqrt{x^2-x+1})_{最小}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore\quad \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)_{最大}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore\quad y_{最小}=5-\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{15-4\sqrt{3}}{3}.$$

例 2 当 p 为何值时，方程 $x^2+(p-2)x+(p-3)=0$ 的两根的平方和为最小？

分析 首先应该列出二根平方和关于自变量 p 的函数表达式，而题中给出的是一个二次方程，容易想起利用根与系数的关系来解决问题。

解 设方程的两根为 α,β，则得

$$\alpha+\beta=-(p-2),\quad \alpha\beta=p-3.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(p-2)^2-2(p-3)\\&=(p-3)^2+1.\end{aligned}$$

又 $\Delta=(p-2)^2-4(p-3)=(p-4)^2\geqslant0$，故 p 为任意实数时，原方程都有实数根。所以

当 $p=3$ 时，　　$(\alpha^2+\beta^2)_{最小}=1$。

注意：上例中，用 Δ 判别 p 的取值范围是必要的。如求二次方程 $4x^2-4mx+(m+2)=0$ 的二根的平方和的最小