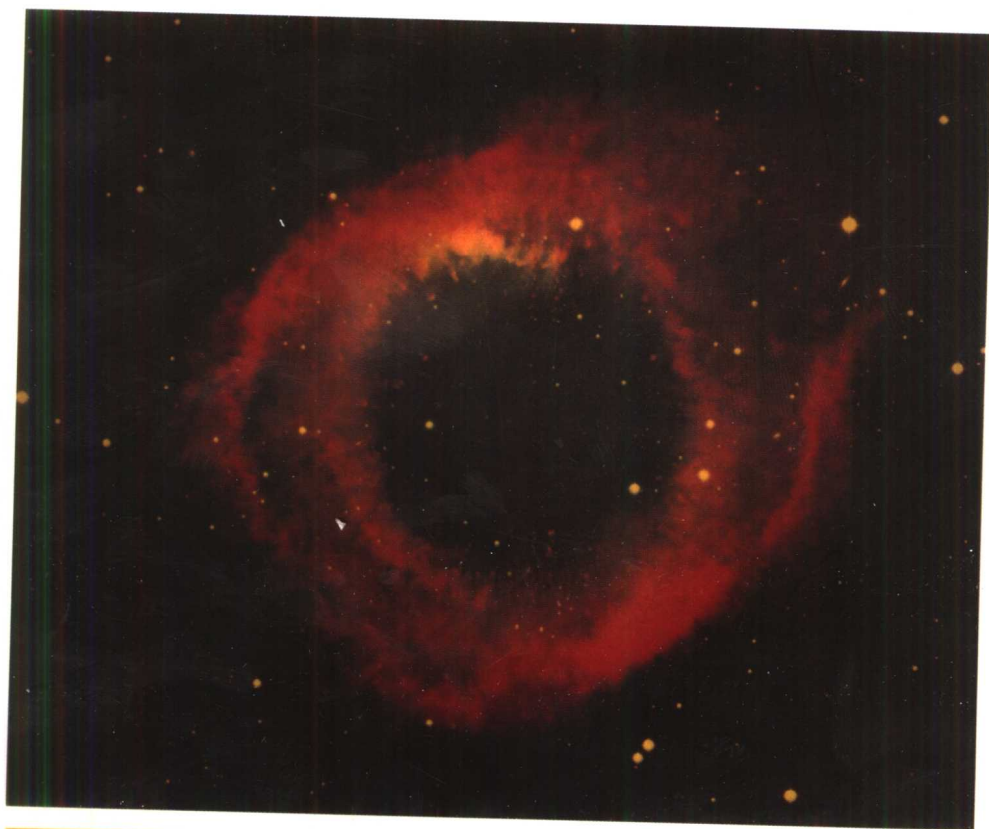



中国科学院国家天文台天体物理丛书

等离激元 坍塌动力学

——宇宙小尺度过程

李晓卿 著



 中国科学技术出版社

NAOC

中国科学院国家天文台天体物理丛书

等离子元坍塌动力学

——宇宙小尺度过程

李 晓 卿 著

中国科学技术出版社

· 北 京 ·

内 容 简 介

本书着重阐述现代天体物理中最为重要的小尺度过程,包括电流片孤波、自生磁场、间竭磁流以及非线性自引力系统的局域结构花样形成、发展,及其重要的实质性的作用:正是由于它们的存在,各类天体方才表现出各种各样的活动,诸如爆发、辐射精细结构、反常黏滞和反常阻抗、周期或规则的物质分布等等。在论述中,我们强调过程的物理实质,并辅之以详尽的数学推演,力求书中主线条清晰和首尾连贯,自成系统,以使读者易于理解。

本书的中心内容是我们二十年来潜心研究的焦点,可作为理工科研究生和从事近代天体物理、理论物理、等离子体物理及磁流体、再入物理和空间物理等工作的广大研究人员、工程技术人员和大学教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

等离激元坍塌动力学:宇宙小尺度过程/李晓卿著.北京:中国科学技术出版社,2003.12

(中国科学院国家天文台天体物理丛书)

ISBN 7-5046-1499-8

I.等... II.李... III.天体动力学 IV.P13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第110628号

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街1号 邮政编码:100081

电话:62179148 62173865

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京长宁印刷有限公司印刷

开本:720毫米×1000毫米 1/16 印张:27.375 字数:440千字

2004年2月第1版 2004年2月第1次印刷

定价:50.00元

《中国科学院国家天文台天体物理丛书》序

我国组织出版系列的天体物理丛书，滥觞于二十几年前戴文赛先生的倡导，当时改革开放伊始，为了适应研究生制度的恢复，他策划了一个天体物理各个分支学科配套的丛书撰写方案，这在当时以及接下来的一段时间里，为我国天文学的重整旗鼓起了重要的作用。随后的这许多年中，学科高速发展，包括研究生教材在内的国际上的天文佳作源源引进，加上我国科学图书出版的种种变数，使我国天体物理书籍的出版不断自我调整以立足于新的背景，同时各自不断寻求可供依托的机遇。其间逐步淡化了系列化、突出了个性化，这是必然的，也可说是一种进步。但也增加了课题领域的随机性质、少了整体布局。

现在，在新的格局下，国家天文台着手组织一系列天文学丛书，我们接受委托编纂天体物理部分，为了和前面的衔接，这部丛书侧重于专著形式，首先邀请为我国天体物理各个不同分支的研究打下基础的主要科学家们，把他们的长期积累整理成有自己特色的专著。我们相信，这些著作，对于目前站在这些基础上工作和培养新生力量的学者们，将是有益的参考。同时它们也将表征着一个时期我国天体物理著述成果的收结。

总结同时又是开端的准备，我们期待着在若干年后的新版和新辑里，将看到又一个新的开始。

王绶琯

2002年1月于北京

《中国科学院国家天文台天体物理丛书》编委会

主 编 王绶琯

副主编 赵 刚 邹振隆 李宗伟

引 论

宇宙像一团巨大的永恒的谜展现在我们面前。

——爱因斯坦

黄金(universal)律：**20%的人喝掉了80%啤酒**。换言之，
重要的过程通常发生在小体积的局域结构之中。

Yankov V. : Phys.Rep.283(1997)147

在有幸跨入 21 世纪的时候，我们意识到，自然科学已经全面地进入了一个现代科学阶段。一种概念、思想或意识，必须得到现代数学(包括计算模拟)的定量描述，这就是现代科学。前苏联一位颇有成就的行星物理学家沙弗朗洛夫(V.A. Safronov)，针对 20 世纪 80 年代以前有关太阳系起源的各种臆想性的假说，指出：**没有详细计算所支撑着的定性说说的时代，已经过去了！**正因为如此，现在我们很少耳闻那种既是物理学家，又是化学家和数学家的有着几顶桂冠的科学家了。与此有关，认真的科学研究者，如果要作出成就，那么，在他大半的研究生涯中一定有一个研究中心，一个研究焦点或一条研究主线索。诚然，自觉不自觉地选择这种或那种研究主线，是和研究者的环境、自身修养和智慧及判断能力密切相关，个中的高见，恐怕是仁者见仁，智者见智的了。

原来，自然界存在有一条普适规律，称之为**黄金律 (universal law)**：**20%的人喝掉了 80%啤酒**。一个不争的事实是，正是不足人口的 20%的富豪拥有全世界的 80%财富。对物理学，这条规律意味着，**重要的物理过程通常发生在有结构花样的局部体积内**。黄金律对我们的启迪是直接的：**探究局域非均匀性和与它们密切相关的重要过程**，也许就能在被爱因斯坦称之为“谜样”的宇宙浩瀚大海所冲刷的沙滩上拾到一两个晶莹的贝壳。这就是本专著的中心内容，也就是我们 20 年来潜心研究的焦点，正如书名所示。

20 世纪 50 年代到 60 年代末，太阳大气存在非常均匀的磁场为多数天文学家所认同；随着观测技术的发展和概念的更新，这种均匀场的观点受到质疑。现在很清楚，完全均匀的场是一种臆猜的理想场，它并非是一种实在。近代的观测表明，太阳上的磁场都有结构，而且所有磁结构，除黑子以外，都有相当小的尺度，为目前仪器所不能分辨(Stenflo, 1989)；即便是黑子，内部也存在小尺度强场区和大间隙弱场区这样的非均匀结构。这种元磁流的磁流力学过程却是统一理解太阳物理的关键(Stenflo, 1989)。为什么会如此这般，简单地说，是因为均匀性与黄金律相悖。

太阳及其他恒星的耀斑，是宇宙中典型的爆发现象，其爆发机制——磁重联，是迄今人们惟一研究最为清楚的。引起爆发的“雷管”是一种薄薄的电流片，它一定具有狭长的构形：厚度远小于边长；若不然，就不可能耗散足够的磁能；“冻结”在一块的磁场和物质从电流片两边流进，磁流发生耗散而物质沿细长的通道加速喷出；喷出的速度最高为光速，因而质量守恒要求流进的速度必须很小，以致能耗很慢，表现为一种缓慢的爆发，与观测到的快爆发的耀斑不符。为适应观测到的耀斑快爆，携带磁场进入电流片的流速必须足够大，但喷出的速度以光速为限，因此，宛如物质被阻塞在电流片内。有证据表明，爆发时被阻塞的物质应该从电流片内弹射出来(Deng & Matsumoto, 2001)；换言之，电流片内应有一枝冒烟的“枪”，这就是具有孤波型的元结构，没有它，我们就观测不到快爆发的耀斑了。

宇宙有一类活动的天体，包括 X-射线源，灾变变星、年轻星、类星体和活动星系核，它们的辐射谱与所予期的中心天体（致密星、黑洞和中子星）有不同的特征；此外，偶然地也观测到双峰的谱线轮廓。据此，天文学家相信，这类中心天体吸积外围物质，形成一种绕转的盘结构。最近，从哈勃空间望远镜传送回来的照片清晰地展现了活动星系核 NGC4261 中心的美丽的盘结构(Balbus & Hawley, 1998)。天文学家的推断正确无误。最近一个报告指出，活动星系核的吸积盘几乎有和太阳相类似的大气结构(Zang *et al.*, 2000)；盘内也应该有目前更难用仪器分辨的强间竭磁流，或“磁涡”；确实，已经查明，在吸积盘内，脉动小尺度磁场比宏观磁场高出几个量级(Schramkowski & Torkelsson, 1996)。最为重要的是，吸积盘的黏性是反常的，至少比通常物质大八个量级以上。如此巨大的反常黏滞是

怎样产生的，一直困扰着天体物理学家。黄金律启示我们，作为中心剧变天体表现活动的大舞台，吸积盘内应有局域不均匀性的磁结构，正是这种凹凸不平表现为粗糙性的磁结构间的“内摩擦”，导致了吸积盘物质的巨大黏性。

茫茫宇宙，朗朗乾坤；浩瀚无垠的宇宙中，繁星灿烂。用现代科学语言，我们可以说，宇宙到处呈现物质成团的非均匀性。现在可看到，如果没有非均匀，也即没有成团性，那么就不会有星系，有我们的银河，没有太阳系，就更没有我们赖以生存的地球了，我们人类也就不存在了。一个基本的而又古老的宇宙学问题是，在甚大宇宙背景上为什么呈现大尺度不均匀性？简单的回答是，如若不然，那么它就又与黄金律相悖：在座的食客均分了上桌的啤酒。

太阳系内行星的分布，所谓提丢斯-波德律，提供了又一例证。原来初始均匀的太阳星云盘在演化进程中出现非均匀性，分裂为几个有规律分布的环带，它们最后演变为行星体。按照黄金律，一定又是发生了**重要物理过程**，导致出现距中心体(太阳)有**规则分布的若干环带**。美丽的土星光环的情况也是类似的。

繁星点点的银河，伸展了两条瑰丽的旋臂，呈现了相当大的非均匀性。线性的密度波理论不能解释这种旋臂结构，因为线性波包会发生漂移，宛如行云流水，结果，我们就观测不到奇特而又壮观的漩涡星系了。由此可见，黄金律中所指的重要过程一定是某种非线性过程，由它导致到产生这种硕大的非均匀性。有报告(Dutrey *et al.*, 1991)说，猎户分子云的条状结构呈现为规则分布的碎片，碎片间的距离约为1pc。和旋臂相似，它也是某种非线性作用导致自组织现象，形成有规则分布的局域结构花样。

1990年 Broadhurst *et al.*(1990)报道了用锥形波束探测的结果，发现星系峰分布存在128Mpc的周期性。这种周期性可以理解为一种类密度波扰动的结果。然而，由线性理论推知，这种类波扰动的特征波长是金斯波长 λ_j 的量级，大致相应于星系团、超团的尺度，远小于周期性尺度。因而再一次表明，这个导致周期性的**重要过程，一定是非线性的**。这种周期分布实际上是沿某一方向自聚焦现象。

因此，在宇宙中，不论是以电磁作用为主的还是以引力作用为主的系统，都普遍呈现了非均匀性，即到到处存在局域有结构的花样。黄金律告诉

我们，这种局域结构虽然占有很小的体积，但却是最为重要的实体(entities)。这种重要性有两方面的意义。其一，这些结构花样(patterns)一定是非线性实体，它们之间相互作用很弱，因而，一旦形成后，作为呈现非均匀性的标识而长久保存下来，不像稍纵即逝的漂荡云层；其次，正是由于它们的存在，各类天体方才表现出各种各样的活动，诸如爆发、辐射精细结构、反常黏滞和反常阻抗、周期或规则的物质分布等等。在 20 世纪 80 年代末，美国著名的太阳物理学家 E.M.帕克就指出(Parker, 1989)，大多数太阳活动是来自于目前地面仪器所不能分辨的百公里以下尺度的元磁流。此外，黄金律还告诉我们，导致形成标识非均匀的局域结构的过程是重要的过程，不待言，这一定是某种非线性过程。That is all——这就是黄金律给我们的全部启示录(Revelation)。那么，为什么总会出现非均匀性？与它们密切相关的重要过程是什么？这就是我们天体物理研究者所要探究的。本书的主要内容，也即我们 20 年来专心研究的方向，都聚焦到这两个互有联系的两个重要课题。在书中相关章节，对许多迥然各异的情况，读者都可以找到我们给出的答案，当然，这决不是最终的答卷！

最后，说句本引论题外的但并非客套话：由于作者水平有限，书中的缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

目 录

引 论

第一章 等离子体介质的电磁响应	1
1.1 等离子体介质中电磁场.....	1
1.2 介电张量和空间色散.....	3
1.3 介电张量的性质.....	7
1.4 色散方程和极化矢量.....	11
1.5 等离激元和朗道约定.....	14
1.6 等离子体中的自发辐射.....	19
1.6a 磁单极子的自发辐射.....	19
1.6b 切伦柯夫(Cerenkov)辐射.....	20
1.6c 荷电粒子的回旋辐射.....	23
1.6d 相对论性电子在弯曲磁场中的辐射.....	26
1.6e 波—粒子康普顿散射.....	32
第二章 动力论和线性效应	36
2.1 等离子体动力论.....	36
2.2 线性和非线性流.....	38
2.3 介质线性响应.....	40
2.4 色散函数.....	43
2.5 朗缪尔等离激元.....	47
2.6 朗道阻尼.....	48
2.7 非等温等离子体中的离声等离激元.....	51
2.8 横等离激元.....	53
2.9 相对论性等离激元.....	54
2.10 外磁场等离激元.....	63
第三章 等离激元诱发的自生磁场	75

3.1 低频横激元场方程	75
3.2 高频横激元场方程	77
3.3 谱空间动力学场方程	78
3.4 高频横激元的时空包络场方程	80
3.5 扰动密度	81
3.6 驱动的离声运动	83
3.7 自生磁场方程	85
附录 A 耦合矩阵元的估算	89
第四章 磁流体模和旋转不稳定性	97
4.1 等离子体矩方程	97
4.2 零级矩、一级矩和二级矩	99
4.3 碰撞积分	101
4.4 双流方程和单流体描述	103
4.5 磁流体动力学(MHD)方程	107
4.6 库特流和瑞利判据	111
4.7 磁化库特流	115
4.8 吸积盘中弱磁场不稳定	120
第五章 有质动力和坍塌的等离激元孤子	126
5.1 高频场的有质动力	126
5.2 萨哈罗夫方程	133
5.3 守恒量和二维以上的场的坍塌	137
5.4 自类似坍塌和能量密度谱	141
5.5 一维传播孤波	144
5.6 非线性薛丁格方程的逆散射解法	148
附录 B 最小作用量原理与诺忒定理	179
第六章 驱动的磁重联和耀斑	186
6.1 MHD-有质动力耦合方程	186
6.2 电流片中孤波	189
6.3 被驱动的阻抗不稳定	192
6.4 局部爆发不稳定性	200
6.5 电流片的反常阻抗	203

6.6	低层太阳大气中的磁重联	205
6.7	太阳冕环增亮和耀斑爆发	208
第七章	太阳自生间歇磁流	213
7.1	天体磁场发电机理论	215
7.2	磁元和有质动力	219
7.3	磁塌缩和小尺度强磁流	223
7.4	活动区等离子激元及其加速	228
7.5	磁调制不稳定和高度间歇磁流	234
7.6	坍塌的自生磁场的数值模拟	243
7.7	自生磁场理论实验检验	260
第八章	吸积盘中坍塌磁流引起的反常黏滞	269
8.1	黏性吸积盘	269
8.2	不稳定性与湍流	271
8.3	走向湍运动	272
8.4	自生磁场的自类似塌缩	273
8.5	反常阻抗和磁黏滞	275
8.6	反常耗散对磁旋转不稳定性影响	279
8.7	塌缩不稳定性 and 阈	281
8.8	坍塌初态和终态吸积率	286
8.9	磁化薄吸积盘中的结构	288
8.9a	薄盘中 MHD 方程	288
8.9b	薄盘中自洽磁场	295
8.9c	有反常黏滞的稳态盘结构	300
第九章	自引力系统非线性结构	308
9.1	金斯不稳定和物质成团	309
9.2	泽利多维奇近似和薄饼结构	313
9.3	引力系统动力学描述	318
9.4	自引力系统非线性效应	324
9.5	引力塌缩和薄饼结构的形成	331
9.6	自引力流体模的结构方程	336
9.7	分子云塌缩谱	343

9.8	自引力薄盘中的自坍塌和自聚焦	348
9.8a	动力学结构方程	349
9.8b	猎户 A 分子云碎片周期分布及旋臂结构	360
9.8c	星云盘自类似塌缩和提丢斯—波德定则	365
9.8d	孤粒子结构与美丽的土星环	372
9.9	大尺度周期性和星系峰的分布	380
附录 C	四波相互作用矩阵元计算	388
第十章	隐身空间飞行器的反隐身对策	390
10.1	空间环境参量	390
10.2	飞行器与等离子体相互作用动力论	392
10.3	中性粒子的碰撞相互作用	394
10.4	电双层的形成	397
10.5	远尾区飞行器诱发的耦合方程	399
10.6	坍塌的密度空穴	406
	参考文献	413
	索引	422

第一章 等离子体介质的电磁响应

麦克斯韦方程……“不正是上帝写下的符号?!”

——波尔兹曼

给我一个支点，我将撬动地球。

——阿基米得

1.1 等离子体介质中电磁场

按照电动力学的观点,等离子体首先是一种介质,但是它又不是一种普通的介质。对等离子体介质,除了时间色散以外,还必须引入空间色散。换句话说,等离子体中的介电张量不仅依赖于频率 ω ,而且也密切与波矢 \mathbf{k} 有关。因而有必要对这种介质的电动力学性质作概略的叙述。

作为一种介质,在场的作用下,其内会出现感应电荷和感应电流,它们之间满足如下方程:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_0), & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中的 ρ_0 和 \mathbf{j}_0 是外场源的电荷密度和电流密度。同时, ρ_0 和 \mathbf{j}_0 以及感应的电荷密度 ρ 和电流密度 \mathbf{j} 之间的关系可从上式得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1.2a)$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_0 = 0. \quad (1.2b)$$

在介质中,通常的麦克斯韦(Maxwell)方程组为:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \quad (1.3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{crot}\mathbf{M}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (1.4)$$

(1.4) 式规定了电感应矢量 \mathbf{D} 、磁场强度 \mathbf{H} 与电场强度 \mathbf{E} 及磁感矢量 \mathbf{B} 之间的关系。应该指出,上面两组麦氏方程是等价的。例如,我们从(1.1)式并利用(1.4)式便可得到(1.3)式。然而,在第二组麦氏方程(1.3)和(1.4)中,我们引进 $\operatorname{rot}\mathbf{M}$ 这一项。在缓变场情况下,由于极化矢量时变项, $\partial\mathbf{P}/\partial t$, 较小, \mathbf{M} 作为物体的单位体积磁矩,有其确定的物理意义。事实上,在此情况下,从(1.4)式有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV &= \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{M})] dV \\ &= \frac{1}{2} \oint [\mathbf{r} \times (d\mathbf{S} \times \mathbf{M})] - \frac{1}{2} \int (\mathbf{M} \times \nabla) \times \mathbf{r} dV \\ &= -\frac{1}{2} \int (\mathbf{M} \times \nabla) \times \mathbf{r} dV = \int \mathbf{M} dV, \end{aligned}$$

由于在导体外 $\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{M} = 0$, 故上式面积分为零; 利用如下公式:

$$(\mathbf{M} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -\mathbf{M} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M},$$

最后的积分等式是明显的。众所周知,环流量 $\mathbf{r} \times \mathbf{j}/2c$ 是导体的磁矩,因而 \mathbf{M} 是单位磁矩。但在交变电磁场,尤其是在快变场情况下,这时 $\partial\mathbf{P}/\partial t$ 不可忽略, \mathbf{M} 就失去了它的明确的物理意义。因而,在所研究的情况下,以下一套方程是合适的:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho_0, & \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

利用如下关系:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \quad (1.6)$$

并考虑到电荷连续性方程 (1.2), 就容易将 (1.5)式化为 (1.1) 式。这就是说,方程 (1.5)、(1.6) 以及 (1.2) 与场方程 (1.1) 完全等价的。

自然,方程组 (1.5)并不是完全的。我们还必须考虑介质的电磁响应: 引进描述介质电磁性质的本构方程。在等离子体介质中,交变场的变化时标往往小于介质的特征弛豫时标,介质的状态不仅取决于时刻 t 的场,而

且也依赖于以前时刻的场；另一方面，由于场在空间上的变化，远点场对给定空间点的介质电磁性质亦有影响。因此，本构方程表示了场 \mathbf{E} 及 \mathbf{D} 的一种非局域的关系。在线性电动力学框架内，这种一般的非局域关系为

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (1.7)$$

式中张量 $\varepsilon_{ij}(t-t', \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 为响应函数，描述介质对电磁响应的性质。它对时间宗量 $(t-t')$ 的依赖形式，是考虑到介质的时间均匀的结果：没有一个时刻是特殊的。如果介质对空间亦是均匀的，则上式可写为

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(t-t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') E_j(\mathbf{r}', t'), \quad (1.8)$$

因此，在等离子体介质中，场方程 (1.5)、本构方程 (1.8)、电荷连续性方程 (1.2) 以及 (1.6)，便是一套适合于我们目的的麦氏方程组 (Silin V.P., Rukhadze, 1961)。

然而，这套麦氏方程是超定的：包括分量方程在内，共有 15 个方程；而未知场量 $(\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \rho)$ 只有 13 个。一般来说，超定方程组是没有自洽解的。但对麦氏方程，取 (1.5) 第二式的散度可得 $\partial(\text{div}\mathbf{B})/\partial t = 0$ ；于是，只要在初始时刻磁感应矢量是无散的管量场，则它在任意时刻都是无散的。注意到这点，我们就可把 (1.5) 第四式看成为初值条件。类似地，我们取 (1.5) 第三式的散度，并利用式 (1.2b)，可得 $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\mathbf{D} - 4\pi\rho_0) = 0$ ；于是， $\text{div}\mathbf{D} - 4\pi\rho_0 = C$ ， C 为与时间无关的常数；如果初始时刻，(1.5) 第一式成立，则任何时刻也成立。因而我们也可把 (1.5) 第一式看成为另一个初值条件。除开这二个初始条件，这套麦克斯韦方程组就是适定的：13 个方程决定 13 个未知场量。

1.2 介电张量和空间色散

作为时一空坐标点的连续函数的电磁场，我们可以通过傅里叶(Fourier)变换，把它分解为各种频率和波矢的谐波叠加，这就是所谓谱分析。本书采用的傅氏变换及相应的的逆变换为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\omega d\mathbf{k}, \quad \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) = \int \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \frac{dtd\mathbf{r}}{(2\pi)^4}. \quad (1.9)$$

除特别声明情况外，没有标出积分上、下限的，通常是指积分分布在无限大的时一空区域；上式中函数 $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k})$ 是函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 的傅里叶变换的核，

两者绝不相同,只是出于一种书写上方便的考虑。此变换存在的必要条件是积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)| dt$ 收敛。我们对真实的场量,总认为满足自然边界条件,即在时一空的无限远点处,一切场量及其各阶导数都趋于零。因此在通常意义下存在这种傅里叶变换。写下两个函数乘积的傅里叶展开式:

$$F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')G(\mathbf{r}', t') = \int d\omega d\mathbf{k} d\omega' d\mathbf{k}' \\ \times \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega(t - t')] \cdot \exp[i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' - i\omega't'] F(\omega, \mathbf{k}) G(\omega', \mathbf{k}')$$

利用 δ -函数定义

$$\delta(\omega)\delta^3(\mathbf{k}) \equiv \delta(\omega)\delta(k_x)\delta(k_y)\delta(k_z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1.10)$$

可得

$$\int dt' \int d\mathbf{r}' F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') G(\mathbf{r}', t') \\ = (2\pi)^4 \int d\omega d\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] F(\mathbf{k}, \omega) G(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.11a)$$

或它的一维形式,

$$\int dt' F(t - t') G(t') = 2\pi \int d\omega \exp[-i\omega t] F(\omega) G(\omega). \quad (1.11b)$$

这就是所谓卷积定理。

现在我们对(1.8)式中的电矢量场进行傅里叶变换,

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{k} d\omega \varepsilon_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}')} E_j(\omega, \mathbf{k}) \\ = \int d\mathbf{k} d\omega \left[\int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})} E_j(\omega, \mathbf{k}) \right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

根据傅氏表象 (1.9) 式,这就得到

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} E_j(\omega, \mathbf{k}),$$

即
$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad (1.12)$$

其中

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} dt \int d\mathbf{r} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t). \quad (1.13)$$