概率论基础及其应用

王梓坤 著

北京师范大学出版社

概率论基础及其应用

王 梓 坤

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论基础及其应用/王梓坤著．—北京:北京师范大学出版社,1996.3
ISBN 7—303—03632—6

Ⅰ.概… Ⅱ.王… Ⅲ.概率论 Ⅳ.0211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 01745 号

概率论基础及其应用
王 梓 坤
北京师范大学出版社出版发行
(邮编 100875 北京新街口外大街 19 号)
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/16 印张:22.75 字数:576 千
1996 年 5 月第 1 版 1996 年 5 月第 1 次印刷
印数:1—1 500 册
ISBN7—303—03632—6/O・183 定价:36.00 元

序

本书的目的是想比较严格地叙述概率论的基础知识，并介绍它的一些应用。总共八章，前三章是核心部分，其中包括概率论的基本概念和定理；第四章是随机过程的初步导引；后面四章分别介绍概率论在数理统计、随机模拟、计算方法以及可靠性问题中的一些简单应用。

随着科学和社会的进步，概率论获得了新的生命力。理论一与实际相结合，便立即呈现出“忽如一夜春风来，千树万树梨花开”的繁荣景象。目前，概率论已广泛应用到许多实际部门中，要在一本书内叙述各方面的应用是困难的。因此，本书所谓的应用，只不过是一些方面的一些应用。

在写作过程中，我们注意了下列两点：

1. 为了使叙述比较清楚，我们广泛使用了“概率空间”的概念。有了它才能明确地给出一些最基本的定义，如事件、随机变数等等，否则，恐怕很难回答象“随机变数的函数是否仍是随机变数”、“独立随机变数 ξ_1,ξ_2 的函数 $g(\xi_1),g(\xi_2)$ 是否仍独立”等这样一些无法避免的问题。但另一方面，由于引进了概率空间，就必须用到一些最基本的测度论知识，这似乎不属本书的范围。不过我们发现，如果只考虑概率论基础的需要，那么用到的测度论并不太多，在本书中完全可以自给自足，而且所用的篇幅很少。这样做还可以多少填平一些普通概率论与较高深的概率论分支之间的鸿沟。这种叙述方式也许还是一种新尝试。

2. 对于基本概念，我们希望能讲明它们的背景和应用。在实践中所体会到的直观形象有助于抓住本质，它常常是理论的先导，并为理论提供思路、模型与方法；严格的逻辑证明和计算有时无非是直觉的一种数学加工和精确化而已。虽然如此，严谨的数学论证仍是十分重要的。

书中列举了较多的例题，其中有些是著名的问题，它们在概率论的发展上起过一定的作用。前五章附有习题及详细解答，有些习题也可当作例题看，以利于自学。

§1.4 (三) 表示第一章第四节第三段。凡标有星号 (*) 的章、节、段、定理或证明，都可在初次阅读时略去，待必要时补看。

本书大部分内容曾在南开大学数学系多次讲授过。芦桂章、孙瑮二位老师为本书提供了习题及解答；吴荣老师详细审阅了全部底稿，并提出许多改进意见，作者对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中一定会有不少的错误和缺点，恳请批评指正。

作者　1976 年

第二版 前言

本书初版于1976年，后连印刷三次。承一些高等院校、科研单位用作教本或参考书。不少热心的读者提出了许多中肯的批评，甚至寄来勘误表；这些意见在这一版中已全被采纳，使本书为之生色。作者对他们的帮助表示最真诚的感谢。作者还衷心地感激韩丽娟、洪良辰、廖昭懋、蒋铎、洪吉昌等各位教授，他们关心本书的再版，并给于了许多帮助，第二版书末增加一附录《论随机性》，作为概率哲学的初探。

作者　1992年10月

内　容　简　介

本书叙述概率论的基本知识和它的一些应用。总共八章，前三章介绍概率论，第四章是随机过程的初步导引，后四章则分别介绍概率论在数理统计、随机模拟、计算方法和可靠性问题中的一些应用。读者对象为高等院校理工科学员、教师及科学工作者。

目　　录

各章间关系图

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 4 \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \\
 & & & 8 & &
\end{tikzcd}
$$

第一章 事件与概率

§1.1 概率论的现实背景

(一) 概率论的研究对象. 自然界有许多现象，我们完全可以预言它们在一定条件下是否会出现. 例如：“同性的电互相排斥”,“在标准大气压下，水加热到 100°C 时必定沸腾”等等是一定会出现的，而上述现象的反面，即“同性的电互相吸引”,“在标准大气压下，水加热到 100°C 时不沸腾”等等是必然不会出现的. 在一定条件下必然出现的现象叫必然事件；在一定条件下必然不出现的现象叫不可能事件. 必然事件的反面是不可能事件.

然而自然界还有许多现象，它们在一定条件下可能出现也可能不出现，这种现象称为随机事件，或简称为事件. 例如“掷伍分钱硬币得正面”,“明年北京七月间的平均温度是 28° C”等等都是随机事件.

概率论是数学的一个分支，它研究的对象是随机事件的数量规律性.

我们常常通过随机试验来观察随机事件. 例如：事件“正面”是随机试验“掷硬币”的一个可能的结果，而事件“28°C”是随机试验“观察明年北京七月间的平均温度”的一个可能的结果.

一般地，设 E 为一试验，如果不能事先准确地预言它的结果，而且在相同条件下可以重复进行，就称为随机试验，以 ω 表它的一个可能的结果，称 ω 为 E 的一基本事件，全体基本事件的集 $\Omega=(\omega)$ 称为基本事件空间. 在具体问题中，十分重要的是：认清基本事件空间是由什么构成的，我们来举一些例子.

例1 E- 掷一枚普通的硬币而观察所出现的面[1]；ω_1- 正，ω_2- 反，于是 Ω 由两个基本事件构成，即 $\Omega=(\omega_1,\omega_2)$.

例2 E- 自标号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个同样的灯泡中任取其一，ω_i- 取得第 i 号，$\Omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$. 这时如果简记 ω_i 为 i, 则得 $\Omega=(1,2,\cdots,n)$.

例3 E- 计算某电话交换台在上午九点钟内所得呼唤次数；ω_i- 得 i 次呼唤；$\Omega=(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots)$. 如果简记 ω_i 为 i, 则得 $\Omega=(0,1,2,\cdots)$.

例4 E- 观察北京十月间的平均温度，ω_a- 平均温度为 a°C. $\Omega=(\omega_a,-\infty<a<\infty)$. 如果简记 ω_a 为 a, 则得 $\Omega=(-\infty,\infty)$, 即全体实数集 (实际上 Ω 中有许多点是多余的，因为温度不可能低于 -273°C, 等等).

例5 E- 向平面上某块有界区域 Ω 内随意投掷质点 (例如掷球) 而观察落点位置，以 $\omega(a,b)$ 表落点的坐标为 (a,b) 的一个试验结果. 如果简记 $\omega(a,b)$ 为 (a,b), 那么基本事件空间重合于此区域 Ω.

基本事件是事件中的一种，一般的事件总是由若干个基本事件共同组成的，因而是 Ω 的一个子集. 譬如说，在例 2 中，事件 A:“取得标号不大于 3 的灯泡”是由三个基本事件

[1]许多实际问题与此问题同类，例如：登记新生婴孩的性别，“女”或“男”, 产品“合格”或“不合格”, 明天天气“晴”或“非晴”, 射击“中的”或“不中的”等.

"取得第 1 号""取得第 2 号""取得第 3 号" 共同组成的，故 $A=(1,2,3)$. 同样，对事件 B:"取得标号为偶数的灯泡" 我们有 $B=\left(2,4,6,\cdots,2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$, 其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数. 又如在例 4 中，事件 C:"不高于 18°C" 可表为 $C=(-\infty,18]$. 由此可见，每一事件对应于 Ω 的一个子集.

当且仅当事件 A 所含的一个基本事件出现时称为 A 出现.

(二) **事件的运算**. 试引进事件间的一些重要关系及对事件的运算. 以下 A,B,A_i,B_i 都表事件.

1. 如果 A 出现必导致 B 出现，就说 A 是 B 的特款，或者说 B 包含 A, 记作 $A\subset B$; 如果 $A\subset B$ 而且 $B\subset A$ 就说 A 与 B 相等，并记作 $A=B$. 例如 A: 取得第 2 号灯泡" 是 B: "取得偶数号灯泡" 的特款；又如 A:"平均温度不高于 18°C 是 B:"平均温度低于 20°C" 的特款.

2. "二事件 A,B 中至少有一个出现" 也是一事件，称此事件为 A,B 的和，记作 $A\cup B$; 显然，$A\cup B$ 也是事件："或 A 出现，或 B 出现", 类似地，事件 "$A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一出现" 称为 $A_1,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$; 事件 "$A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一出现" 称为可列多个事件的和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 其次，"$n$ 个事件 $A_1,\cdots,A_n$, 都出现" 也是一事件，称为 $A_1,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 类似定义 $A_1\cap A_2\cap\cdots$ 并简写为 $A_1A_2\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 譬如说，在例 3 中，"呼唤次数为偶数" 是基本事件 "2""4""6"$\cdots$ 等的和，而 "呼唤次数为偶数" 与 "呼唤次数为 3 的倍数" 的交是事件 "呼唤次数是 6 的倍数".

3. "A 出现而 B 不出现" 也是一事件，称为 A 与 B 的差，记作 $A-B$. 例如："呼唤次数不小于 6" 与 "呼唤次数不小于 7" 的差是 "呼唤次数为 6"; 而 "呼唤次数不小于 6" 与 "呼唤次数为偶数" 的差是 "呼唤次数为不小于 7 的奇数".

4. 不可能事件与必然事件通常也看成随机事件，分别用记号 $\emptyset$ 及 Ω 表示. 如果二事件 A,B 满足关系

$$AB=\emptyset, \tag{1}$$

也就是说，如果 A,B 不可能同时出现，就说 A,B 是互不相容的. 例如："呼唤次数大于 10" 与 "呼唤次数小于 10" 是互不相容的.

二事件 A,B 如果满足关系

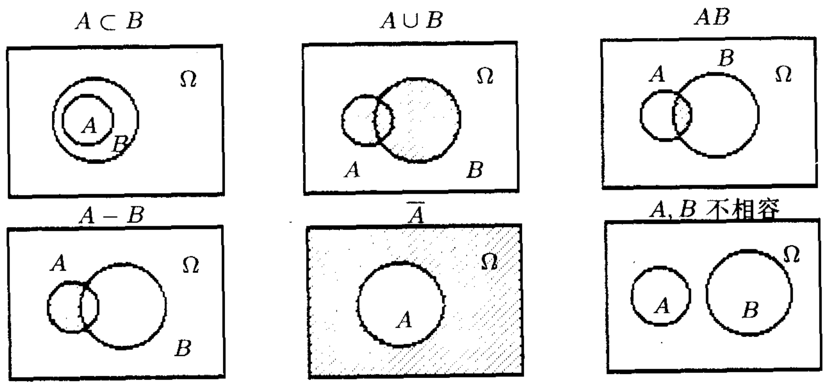
$$A\cup B=\Omega,\quad AB=\emptyset, \tag{2}$$

也就是说，A,B 中必出现其一，但 A,B 不能同时出现，就说 A 与 B 互逆，或者说 A 是 B(或 B 是 A) 的对立事件，记作 $A=\overline{B}$. 例如 "呼唤次数大于 10" 是 "呼唤次数不大于 10" 的对立事件，但却不是 "呼唤次数小于 10" 的对立事件.

上面说过，事件 A 可表为基本事件空间 Ω 中的一个子集，这子集仍然记为 A, 于是我们也可以从集合论的观点来看待事件，结果发现这种观点非常有用，因为上面对事件所引进的关系恰好和通常对集所引进的相应的关系一致，譬如说，设事件 A 是事件 B 的特款，于是 A 出现必导致 B 出现. 考虑含于 A 的一基本事件 ω, 当 ω 出现时，A 出现，由假

定这时 B 也出现，故此 ω 必含于 B, 从而证明了集 A,B 间有集合论中所定义的包含关系 $A\subset B$. 反之，设集 A 含于集 B, $A\subset B$; 当事件 A 出现时，必定有 A 中的某基本事件 ω 出现，既然此 $\omega\in A$, 因而 $\omega\in B$, 故事件 B 也出现，这说明 A 是 B 的特款．由此可见，"事件 B 包含事件 A" 与 "集 B 包含集 A" 二概念是一致的．类似地可以看到其他相应概念的一致性：事件的 "相等","和","交","差" 分别与集的 "相等","和","交","差" 一致，不可能事件 $\emptyset$ 及必然事件 Ω 分别与空集 $\emptyset$ 及全空间 Ω 一致．从而关系式 (1),(2) 也可按集合论中意义来理解，因此，"A 是 B 的对立事件" 与 "集 A 是集 B 关于 Ω 的补集" 是一致的．

事件间的关系既然与集间相应的关系一致，我们就可以用图形来表达，如下图：



($A\cup B, AB, A-B, \overline{A}$ 分别为图中阴影部分)

(三) 概率．当我们多次做某一随机试验 E 时，常常会察觉某些事件出现的可能性要大些，也就是说，这事件出现的次数要多些，而另一些事件出现的可能性要小些．例如 "抽得偶数号灯泡" 的可能性大于 "抽得第 2 号灯泡" 的可能性，因为后一事件是前一事件的特款．既然各事件出现的可能性有大有小，自然使人想到该用一个数字 $P(A)$ 来标志事件 A 出现的可能性，较大的可能性用较大的数字来标志，较小的就用较小的数字．这数字 $P(A)$ 就称为事件 A 的概率．

然而，对于已给的事件 A, 到底应该用哪个数字来作为它的概率呢？就是说，怎样从数量上来规定 $P(A)$ 呢？这决定于所研究的随机试验 E 及 A 的特殊性，不能一概而论．但在下列两种特殊的 (即古典型的和几何型的) 随机试验中，事件的概率容易合理地规定，并能满足实际的需要．

(A)古典型．先考虑一个特例，即例 2. 自标号为 $1,2,\cdots,n$ 的共 n 个同样的灯泡中任取其一，如果抽取时把这些灯泡完全平等看待，不特别侧重或特别看轻某些灯泡，那么，每个灯泡被取出的可能性应该是相同的，也就是说，一切基本事件 ω_i-"取得第 i 号灯泡" 都是等可能的 (为了要实现等可能，譬如说可以这样做：在 n 张同样的纸片上各写上一个数字，从 1 到 n, 然后把纸片折好，并把次序随意搅乱，再从中任取一张，它上面的数字就代表被取中的灯泡号码)．在此例中，只有 n 个不同的基本事件．

一般地，如果随机试验 E 具有下列二性质：

1) 只有有穷多个不同的基本事件 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$,

2) 一切基本事件都是等可能的．

就说 E 是古典型的随机试验.

由上所述可见，例 2 及例 1 中的 E 都是古典型的.

对古典型的随机试验 $E, \Omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$, 设事件 A 由 $k(\leqslant n)$ 个不同的基本事件组成，我们就定义 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{3}$$

不可能事件 $\emptyset$ 的概率定义为

$$P(\emptyset)=0. \tag{4}$$

譬如，在例 2 中，如果设 $n=100$, 那么事件

$$A=(\text{取得偶数号灯泡})=(\omega_2,\omega_4,\cdots,\omega_{100}),\ P(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2};$$

$$B=(\text{取得号数不大于 10 的灯泡})=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}),\ P(B)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10};$$

$$C=(\text{取得号数为 3 的倍数的灯泡})=(\omega_3,\omega_6,\cdots,\omega_{99}),\ P(C)=\frac{33}{100}.$$

关于古典型的定义再说几句话：那里的第二个条件要求一切基本事件都是等可能的，即等可能地出现，然而，所谓“基本事件等可能地出现”又是什么意思呢？对此我们不能下数学定义而只能做一些解释：当从问题有关的各个方面来考虑 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 时，如果它们完全处于平等的地位，谁也不比谁特别些，这时就可把它们看成是等可能的. 在目前很难用更简单的概念来定义“等可能”, 就像集合论中“集合”的概念没有明确的数学定义一样. 我们无需对此感到惊异，因为如果概念甲是由较简单的概念乙来定义，那么乙也必须用更简单的概念丙来定义，如此下去，最后势必会遇到一个最基本的概念，我们再不能也不必用其它概念去定义它了，这时只需用一些例子或直观的语言去解说它的含义. “等可能”正是一个这样的基本概念.

附带指出，在实际问题中，往往只能“近似地”出现等可能，“完全的”等可能是很难见到的. 以掷硬币为例，严格说来，正、反二面也不能认为完全是等可能的. 因为两面的花纹不同，凸凹的分布不同等. 不过这些因素对出现正 (或反) 面的影响很小，因而可以把它们忽略而仍认为是等可能的.

定理1 对古典型随机试验 E, 概率具有下列性质:

(i) 对任意事件 A, $1\geqslant P(A)\geqslant 0$;

(ii) $P(\Omega)=1$;

(iii) 设事件 $A_1,\cdots,A_m$ $(m\leqslant n)$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i). \tag{5}$$

证. 由 (3) (4) 可见 (i) 是显然的. 由于 Ω 由 n 个不同的基本事件构成，故由 (3)

$$P(\Omega)=\frac{n}{n}=1.$$

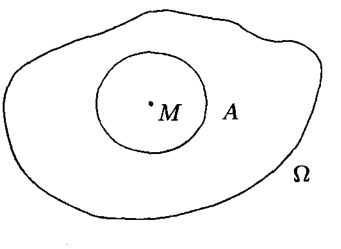
下证 (iii): 设 $A_i=(\omega_1^{(i)},\cdots,\omega_{k_i}^{(i)})$ 含 $k_i(\leqslant n)$ 个不同的基本事件；由 (3) $P(A_i)=\frac{k_i}{n}$ 显然

$$\bigcup_{i=1}^m A_i=(\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{k_1}^{(1)};\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{k_2}^{(2)};\cdots;\omega_1^{(m)},\cdots,\omega_{k_m}^{(m)})$$

共含 $\sum\limits_{i=1}^m k_i$ 个基本事件；由于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 互不相容，这些基本事件是互不相同的. 因此

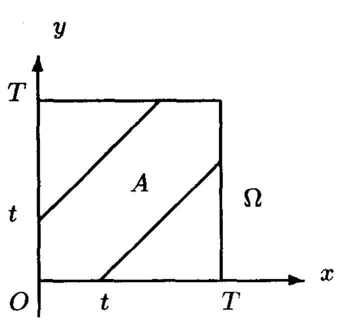
$$P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)=\frac{\sum\limits_{i=1}^m k_i}{n}=\sum_{i=1}^m\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^m P(A_i).\ \square$$

(B) **几何型**. 几何型随机试验是例 5 中 E 的一般化与精确化. 设 Ω 是 n 维空间中的勒贝格 (Lebesgue) 可测集，具有有限的测度 $L(\Omega)>0$($L(\Omega)$ 表 Ω 的勒贝格测度，直观地说，对一维区间它是长度，对二维区域是面积，三维是体积 $\cdots$). 向 Ω 中投掷一质点 M, 如果 M 在 Ω 中均匀分布，那么就称这随机试验 (掷点) 是几何型的. 所谓 "M 在 Ω 中均匀分布" 的详细内容是："点 M 必定落于 Ω 中，而且落在可测集 $A(\subset\Omega)$ 中的可能性大小与 A 的测度成正比，而与 A 的位置及形状无关". 这时 Ω 中每一点 ω 是一基本事件："M 落于 ω 上", 故有无穷多个基本事件而不能用 (3). 如果以 $P(A)$ 表 "M 落在 A 中" 的概率，考虑到均匀分布性，自然应定义



$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)},\tag{6}$$

其中 $L(A)$ 表 A 的测度，我们认为空集 $\emptyset$ 也是可测的而且 $L(\emptyset)=0$.



注意，这里概率 $P(A)$ 只是对可测集 A 才有定义，而不是对 Ω 的所有子集都有定义，因为有不可测的子集存在.

例 6 (约会问题) 二人约定于 0 到 T 时内在某地见面，先到者等 $t(t\leqslant T)$ 时后离去，试求二人能会见的概率 p.

解 以 x,y 分别表二人到达时刻,

$$0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T,$$

这样的 (x,y) 构成边长为 T 的正方形 Ω. 二人能会见的充分条件是 $|x-y|\leqslant t$, 这条件决定 Ω 中一子集 A. 由 (6)

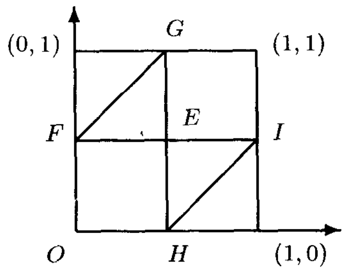
$$p=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.\ \square$$

注意，例 6 可抽象化为：设有二点 A,B 分别几何型地落于 $[0,T]$ 中，试求 A,B 的距离不超过 $t(t\leqslant T)$ 的概率 p.

例 7 在线段 AD 上任意 [1] 取两点 B,C, 在 B,C 处折断此线段而得三折线，试求此三折线能构成三角形的概率.

解 设 AD 的长度为 l, A, D 的坐标各为 $(0,0),(l,0)$. 假定 B,C 的横坐标分别是 xl 及 yl, 那么 $0 \leqslant x,y \leqslant 1$. 由此可见 B,C 二点与正方形 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上的点 (x,y) 是一一对应的. 先设 $x<y$, 这时 AB,BC,CD, 构成三角形的充分必要条件是

$$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{CD},\quad \overline{BC}+\overline{CD}>\overline{AB},\quad \overline{CD}+\overline{AB}>\overline{BC},$$



其中 $\overline{AB}$ 表 AB 的长. 注意 $\overline{AB}=xl$, $\overline{BC}=(y-x)l$, $\overline{CD}=(1-y)l$, 代入上面的三个不等式中，得

$$y>\frac{1}{2},\quad x<\frac{1}{2},\quad y-x<\frac{1}{2}. \tag{7}$$

(7) 式决定正方形内一三角形 GEF, 它的面积是 $\frac{1}{8}$. 次设 $y<x$, 同样可得三角形 EHI, 面积也是 $\frac{1}{8}$. 注意 $x=y$ 时 B,C 重合而不可能得三角形. 这样一来，我们的问题等价于向边长为 1 的正方形上均匀分布地掷点而求点落于 ΔGFE 或 ΔEHI 中的概率. 由 (6) 得所求概率为 $2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$. 注意此概率与 l 无关. □

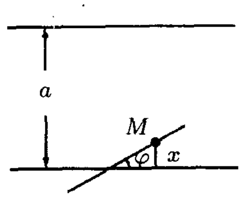
例 8 (蒲丰 [Buffon] 问题) 平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线，向平面任意投一长为 $l(l<a)$ 的针，试求针与一平行线相交的概率 p.

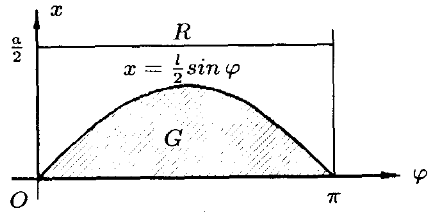
解 以 M 表落下后针的中点， x 表 M 与最近一平行线的距离， φ 表针与此线的交角，易见

$$0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

这二式决定 $x\varphi$ 平面上一矩形 R; 其次，为了使针与一平行线 (这线必定是与 M 最近的平行线) 相交，充分与必要条件是

$$x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi.$$





这不等式决定 R 中一子集 G. 因此，我们的问题等价于向 R 中均匀分布地掷点而求点落于 G 中的概率 p. 由 (6) 得

$$p=\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\varphi\,d\varphi\Big/\frac{a}{2}\pi=\frac{2l}{\pi a}. \ \square \tag{8}$$

注意 p 只依赖于比值 $\frac{l}{a}$, 故当 l,a 成比例地变化时， p 的值不变，这正与直观符合. (8) 式提供了一个求 π 的值的方法：如果我们能事先求得 p, 那么由 (8) 就可以求出 π(续看 §2.9 例 7) [2].

[1] 所谓“任意”, 严格地说，应理解为“B 及 C 都在 AD 上独立地均匀分布”.

[2] 此实验已由多人做过，例如， 1850 年 Wolf 掷针 5000 次得 π 之估值为 3.1596; 1901 年 Lazzerini 掷 3408 次得估值为 3.1415929. 后者掷的次数少反而得到好的结果，原因是他在合适的次数上停止了试验. 但如事先不知 π 的真值时，应在何时停止实验？这是所谓“最佳停止问题”, 值得研究.

与定理 1 类似，可以证明下列定理：

定理 2 对几何型随机试验 E, 概率具有下列性质：

(i) 对任意可测集 $A, 1 \geqslant P(A) \geqslant 0$;

(ii) $P(\Omega)=1$;

(iii) 设可列多个可测集 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相交，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \tag{9}$$

证 由定义中的 (6) 式立得 (i)(ii). 利用测度的完全可加性：对可列多个互不相交的可测集 $A_1, A_2, \cdots$, 有

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} L(A_i);$$

由此立得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\frac{L\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{L(\Omega)}=\sum_i \frac{L(A_i)}{L(\Omega)}=\sum_i P(A_i). \ \square$$

(四) 频率. 设 E 为任一随机试验，A 为其中任一事件，在同样条件下，把 E 独立地重复做 n 次，以 $f_n(A)$ 表事件 A 在这 n 次试验中出现的次数，比值

$$F_n(A)=\frac{f_n(A)}{n}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率，而 $f_n(A)$ 称为 A 在这 n 次试验中出现的频数. 例如掷 100 次硬币中得到 51 次正面，那么 “得正面” 这一事件在这 100 次试验中的频率为 $\frac{51}{100}$, 频数为 51.

容易想到，一般地如 A 出现的可能性愈大，频率 $F_n(A)$ 也愈大，反之，如果 $F_n(A)$ 愈大，那么可以设想 A 出现的可能性也愈大. 因此，频率与概率间应有紧密的关系. 的确，以后可以证明：在相当广泛的条件下，当 $n \to \infty$ 时，在一定意义下 $F_n(A)$ 趋于 A 的概率 $P(A)$.

因此，当 n 充分大时，可以取频率作为概率的近似值. 在许多实际问题中，当概率不易求出时，往往就是这样做的.

频率的重大意义，这一方面是由于它能适当地反映 A 出现可能性的大小，另一方面，频率的概念比较简单，容易掌握，我们常常可以根据频率的性质去推想概率的性质. 这就是我们为什么在这里要引进频率的原因.

定理 3 对任意随机试验 E, 频率具有下列性质：

(i) 对任意事件 $A, 1 \geqslant F_n(A) \geqslant 0$;

(ii) $F_n(\Omega)=1$;

(iii) 对任意有穷多个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 即 $A_iA_j=\emptyset$, $i \neq j$, 有

$$F_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} F_n(A_i), \tag{10}$$

其中 n 为任意正整数.

证 由 $F_n(A)$ 的定义 (i) 是显然的. 既然 Ω 是必然事件, $f_n(\Omega)=n$, 故得 (ii), 最后, 根据这些事件的互不相容性得

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i),$$

以 n 除上式两边就得 (10). □

作为频率的应用, 再来考虑蒲丰氏问题. 以 A 表事件: "针与一平行线相交". 如上所述, 当 n 充分大时, $F_n(A)$ 接近于 $P(A)$, 故由 (8) 得

$$\pi\approx\frac{2l}{F_n(A)a},$$

"≈" 表 "近似". 因而我们可以用实验的方法来求 π 的近似值. 这种思想在计算数学的 Monte-Garlo 方法中得到广泛应用. (参看 §3.3 例 1 及第六, 七章)

关于几何概率的例, 还可见 §1.6.

定理 1-3 启示我们在一般情况下 (不限于古典型或几何型随机试验) 应该如何定义概率, 在 §1.3 中将讨论这个问题.

§1.2 古典型概率

(一) **复合随机试验**. 设已给 n 个随机试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$, 其中 E_i 的基本事件记为 $\omega^{(i)}$, 因而 $\Omega_i=(\omega^{(i)})$ 是 E_i 的基本事件空间. 我们可以把 $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ 看成为一个复合的随机试验 $\widetilde{E}$, 就是说, 把 $\widetilde{E}$ 做一次相当于把 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 顺次各做一次, 于是 $\widetilde{E}$ 的试验结果是由 n 次试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的结果顺次联合组成的. 我们称 $\widetilde{E}$ 为由 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 组成的 n 次复合随机试验, 并记

$$\widetilde{E}=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=\prod_{i=1}^{n} E_i. \tag{1}$$

显然, $\widetilde{E}$ 的任一基本事件 $\widetilde{\omega}$ 是具有 n 个分量的点:

$$\widetilde{\omega}=(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(n)}), \tag{2}$$

其中 $\omega^{(i)}\in\Omega_i$. 因此, $\widetilde{E}$ 的基本事件空间 $\widetilde{\Omega}$ 由一切这样的点所构成, 即

$$\widetilde{\Omega}=\{(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots,\omega^{(n)})\}, \tag{3}$$

有时记为

$$\widetilde{\Omega}=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n=\prod_{i=1}^{n}\Omega_i. \tag{4}$$

特别, 当 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 重合于一个随机试验 E 时, 简记 $\widetilde{E}=E^n$, 并称 $\widetilde{E}$ 为 E 的 n 次重复随机试验, 这时 (2),(3) 及 (4) 分别化为

$$\widetilde{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n);\quad \widetilde{\Omega}=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\}=\Omega^n, \tag{5}$$

其中 $\omega_i \in \Omega$.

例 1 设 E_1 为掷一枚硬币，$\Omega_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)})$, $\omega_1^{(1)}$ 表得正面，$\omega_2^{(1)}$ 表得反面；E_2 为自标号为 1,2,3 的三个球中任意抽取一球，$\Omega_2 = (\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)})$, 其中 $\omega_i^{(2)}$ 表取得标号为 i 的球，$i = 1, 2, 3$. 于是对 2 次复合随机试验 $\widetilde{E} = E_1 \times E_2$, 做一次 $\widetilde{E}$ 相当于先掷一次硬币再抽取一球，故 $\widetilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2$ 共含六个基本事件，$(\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)})$, $(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(2)})$, $(\omega_1^{(1)}, \omega_3^{(2)})$, $(\omega_2^{(1)}, \omega_1^{(2)})$, $(\omega_2^{(1)}, \omega_2^{(2)})$, $(\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(2)})$.

例 2 设 E 为掷一枚硬币，$\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1(\omega_2)$ 表得正 (反) 面，将 E 重复 n 次而得 n 次重复随机试验 $\widetilde{E} = E^n$, 于是 $\widetilde{E}$ 的一个基本事件是由总共 n 个元："正面" 或 "反面", 构成的. 显然 Ω^n 共有 2^n 个不同的基本事件.

例 3 设 E_i 共有 m_i 个不同的基本事件，则 $\widetilde{E} = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ 共有 $\prod_{i=1}^{n} m_i$ 个不同的基本事件. 特别，如 $\widetilde{E} = E^n$, 且 E 共有 m 个不同的基本事件，那么 $\widetilde{E}$ 的不同的基本事件共有 m^n 个.

设已给可列多个随机试验 $E_1, E_2, \cdots$, 类似地可以考虑由它们组成的可列次复合随机试验

$$\widetilde{E} = E_1 \times E_2 \times \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} E_i. \tag{6}$$

如果 $\Omega_i = (\omega^{(i)})$ 是 E_i 的基本事件空间，那么 $\widetilde{E}$ 的任一基本事件 $\widetilde{\omega}$ 是一点列：

$$\widetilde{\omega} = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots), \ (\omega^{(i)} \in \Omega_i). \tag{7}$$

因而 $\widetilde{E}$ 的基本事件空间 $\widetilde{\Omega}$ 是所有可能的点列的集

$$\widetilde{\Omega} = \{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots)\} \tag{8}$$

有时记为

$$\widetilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega_i. \tag{9}$$

特别，当 $E_i = E$ 时，$(i = 1, 2, \cdots)$, 简记 $\widetilde{E} = E^\infty$, 并称 $\widetilde{E}$ 为 E 的可列次重复随机试验，这时 (7) 及 (8)(9) 分别化为

$$\widetilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots); \ \ \widetilde{\Omega} = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots)\} = \Omega^\infty, \ (\omega_i \in \Omega). \tag{10}$$

例如，考虑例 2 中的 E, 这时 E^∞ 中任一点是由一列 "ω_1- 正面""ω_2- 反面" 构成的. 譬如说

$$(\omega_1, \omega_1, \omega_2, \omega_1, \omega_2, \cdots)$$

就是一基本事件，而 Ω^∞ 是所有这种序列的集.

(二) 排列与组合. 为了计算古典型随机试验中事件的概率，需要一些排列与组合的基本知识.

三个数字 1,2,3 共有 6 种不同的排列：123,132,213,231,312,321. 一般地，试问 n 个不同的元共有几种排列？每个排列共有 n 个位置，第一个位置上可以放进这 n 个元中的任何