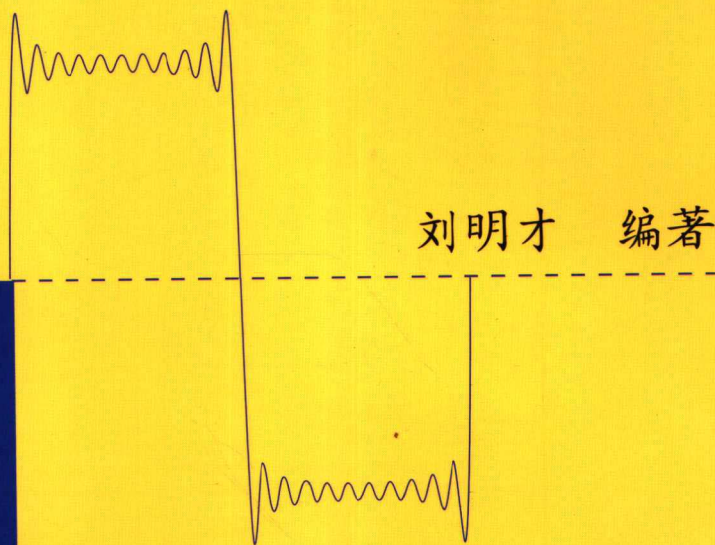


# 小波分析及其应用

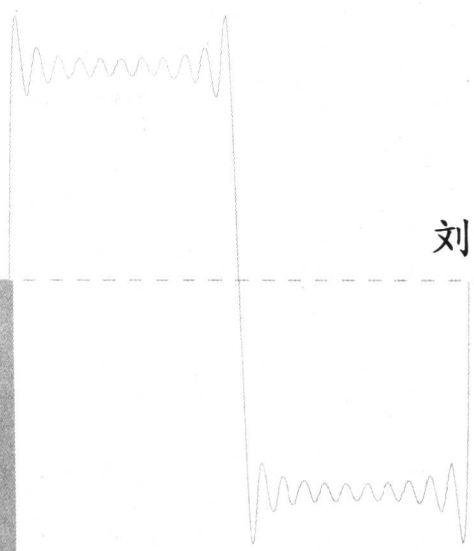
刘明才 编著



清华大学出版社

0241.86  
11

# 小波分析及其应用



刘明才 编著

北方工业大学图书馆



00596173

清华大学出版社  
北京

SCM 89/06

## 内 容 简 介

本书主要介绍小波分析及其应用,内容包括:多分辨分析、正交小波(主要介绍 Daubechies 小波和样条小波)、双正交小波、小波包、多小波、多元小波、区间上的小波和小波变换.应用方面主要介绍小波分析在信号处理、图像压缩和解积分方程方面的应用.

本书内容丰富、重点突出.在内容安排上,力争做到由浅入深、循序渐进,适合不同读者的需要.本书可作为理工科各专业本科生和研究生学习小波分析的教材,也适合作为希望在小波分析这一领域进行研究和应用的科技工作者的参考书.

版权所有,翻印必究.举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

### 图书在版编目(CIP)数据

小波分析及其应用/刘明才编著. —北京:清华大学出版社, 2005.9

ISBN 7-302-11359-9

I. 小… II. 刘… III. 小波分析—高等学校—教材 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 077538 号

出 版 者: 清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机: 010-62770175

地 址: 北京清华大学学研大厦

邮 编: 100084

客 户 服 务: 010-62776969

组稿编辑: 刘 颖

文稿编辑: 王海燕

印 刷 者: 北京四季青印刷厂

装 订 者: 三河市化甲屯小学装订二厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 185×230 印 张: 9.25 字 数: 201 千字

版 次: 2005 年 9 月第 1 版 2005 年 9 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-11359-9/O·476

印 数: 1~3000

定 价: 16.00 元

---

# 前 言

---

小波分析(wavelet analysis)是近 20 年来发展起来的数学分支,它是 Fourier 分析划时代发展的结果.它对数学和工程应用的发展都产生了深远的影响.小波分析广泛应用于信号处理、图像处理与分析、语音识别与合成、量子场论、地震勘探、CT 成像、机器视觉、机器故障诊断、自动控制、天体物理、分形等领域.原则上讲,传统上使用 Fourier 分析的地方,现在都可以用小波分析取代.小波分析优于 Fourier 分析的是,它在时域和频域同时具有良好的局部化性质.

本书详细论述了小波分析的基本概念、基本理论和基本算法,也介绍了小波分析的新热点——多小波等.在内容安排上,由浅入深、循序渐进.本书共分 9 章,具体如下:

第 1 章简要介绍了 Fourier 级数和 Fourier 变换的基本概念和主要结论,由此导出小波分析的主要概念——正交小波.

第 2 章以 Haar 小波为例详细介绍了小波分析的主要思想和方法.这一章主要是为初学者编写的,目的是为第 3 章的学习奠定基础.

第 3 章详细介绍了多分辨分析的基本概念、基本理论和基本算法.多分辨分析是小波分析的主要内容,因而本章也是全书的主要内容.本章的一般定理和结论都给出了详细证明,主要算法也给出了例子,以便于读者理解和掌握.

第 4 章介绍了 Daubechies 小波的构造方法,并给出了常用的数据.

第 5 章介绍了 B 样条的基本概念和主要性质,并由此构造了正交样条小波.

第 6 章介绍了双正交小波的构造方法和例子.

第 7 章介绍了正交小波包和双正交小波包的概念和理论.

第 8 章介绍了小波分析的其他方面,如多小波、多元小波、区间上的小波和小波变换等内容.

第 9 章主要介绍了小波分析在信号处理、图像压缩及解积分方程中的应用.

对于大学高年级学生,作者认为本书的第 1、2、3 章的全部内容、第 4 章的主要结论、第 7 章的第 1 节及第 8 章的第 4 节可作为一学期的选修课开设的主要内容.

本书作者多年来一直从事小波分析这一学科的教学和研究工作.作者根据多年的经

验积累,并参考了国内外许多专家的论文、著作编写了本书,引用了其中的观点、数据和结论,在此一并表示感谢。

由于作者学识有限,加上时间有限,书中错误疏漏之处在所难免,敬请读者批评、指正。

作 者

2005年6月

---

# 目 录

---

第 1 章 概论	1
1.1 Fourier 级数	1
1.2 Fourier 变换	3
1.3 小波分析简介	5
第 2 章 Haar 小波分析	7
2.1 Haar 尺度函数	7
2.2 Haar 小波	8
2.3 Haar 小波的分解与重构算法	11
2.3.1 分解算法	11
2.3.2 重构算法	13
第 3 章 多分辨分析	16
3.1 多分辨分析的主要理论	16
3.2 分解与重构算法	24
3.2.1 分解与重构算法的建立	24
3.2.2 分解与重构算法的实现	26
3.2.3 分解与重构算法的实例	28
3.3 尺度函数的一些重要性质	32
第 4 章 Daubechies 小波	39
4.1 一个简单的例子	39
4.2 Daubechies 小波的构造	41

---

4.3	Daubechies 小波的主要性质 .....	50
4.3.1	Daubechies 小波的支集 .....	50
4.3.2	Daubechies 小波的消失矩特性 .....	51
4.3.3	Daubechies 小波的光滑性 .....	54
4.4	Daubechies 小波的计算方法 .....	55
<b>第 5 章</b>	<b>样条小波 .....</b>	<b>59</b>
5.1	B 样条及其基本性质 .....	59
5.2	样条多分辨分析 .....	63
5.3	分解算法中的初始数据的计算 .....	72
5.4	线性相位与对称性 .....	73
<b>第 6 章</b>	<b>双正交小波 .....</b>	<b>75</b>
6.1	双正交小波的概念 .....	75
6.2	双正交小波的构造理论 .....	76
6.3	双正交小波的一些性质 .....	79
6.4	双正交小波的构造例子 .....	80
<b>第 7 章</b>	<b>小波包 .....</b>	<b>88</b>
7.1	正交小波包 .....	88
7.1.1	正交小波包的概念 .....	88
7.1.2	正交小波包的性质 .....	89
7.1.3	$L^2(\mathbb{R})$ 的正交分解 .....	92
7.2	双正交小波包 .....	97
7.2.1	双正交小波包的概念 .....	97
7.2.2	双正交小波包的性质 .....	99
7.2.3	$L^2(\mathbb{R})$ 的双正交分解 .....	105
<b>第 8 章</b>	<b>小波分析的其他方面 .....</b>	<b>109</b>
8.1	多小波 .....	109
8.1.1	多小波的概念与主要性质 .....	109
8.1.2	多小波的例子 .....	111
8.2	多元小波 .....	113
8.2.1	多元小波的概念 .....	114

---

8.2.2 张量积小波.....	115
8.3 区间上的小波 .....	117
8.4 小波变换 .....	120
8.4.1 基本小波的概念.....	120
8.4.2 小波变换.....	121
<b>第 9 章 小波分析的应用.....</b>	<b>125</b>
9.1 小波在信号处理中的应用 .....	125
9.1.1 小波在信号消噪处理中的应用.....	126
9.1.2 小波在信号奇异性检测中的应用.....	126
9.2 小波在图像压缩方面的应用 .....	129
9.3 小波在解积分方程中的应用 .....	132
<b>参考文献.....</b>	<b>134</b>



# 第 1 章 概 论

小波分析 (wavelet analysis) 是近 20 年来发展起来的一门新兴数学分支, 它是 Fourier 分析划时代发展的结果. 小波分析的出现, 无论对数学, 还是对其他学科都产生了深远的影响, 并有广泛的应用领域. 本章主要介绍 Fourier 分析的一些主要内容和小波分析的基本概念.

在本书中, 我们采用如下符号:  $\mathbb{Z}$  表示整数集,  $\mathbb{Z}^+$  表示非负整数集,  $\mathbb{R}$  表示实数集 (实轴),  $\mathbb{C}$  表示复数集.

Fourier 分析的主要内容包括 Fourier 级数和 Fourier 变换两个方面. 下面分别给以介绍.

## 1.1 Fourier 级数

设  $f(t)$  是定义在实数集  $\mathbb{R}$  上以  $2\pi$  为周期的函数, 即  $f(t) = f(t + 2\pi)$ , 且在  $(0, 2\pi)$  上平方可积, 即有

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty,$$

其中  $|f(t)|^2 = f(t)\overline{f(t)}$ , 而  $\overline{f(t)}$  是函数  $f(t)$  的共轭函数. 一般情况下, 我们考虑复值函数, 实值函数可看作复值函数的特殊情况. 如果  $f(t)$  是实值函数, 则有  $\overline{f(t)} = f(t)$ .

我们用  $L^2(0, 2\pi)$  表示在实数集  $\mathbb{R}$  上以  $2\pi$  为周期且在  $(0, 2\pi)$  上平方可积函数的全体.

类似地, 我们也可以定义函数空间  $L^1(0, 2\pi)$  为在实数集  $\mathbb{R}$  上以  $2\pi$  为周期且在  $(0, 2\pi)$  上绝对可积函数的全体. 函数  $f(t)$  绝对可积是指  $\int_0^{2\pi} |f(t)| dt < +\infty$ .

可以验证, 函数空间  $L^2(0, 2\pi)$  是  $L^1(0, 2\pi)$  的子集, 即  $L^2(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$ . 由于  $L^2(0, 2\pi)$  (实际上它是一个 Hilbert 空间) 具有许多好的性质, 而且在实际应用中遇到的以  $2\pi$  为周期的函数, 一般都属于  $L^2(0, \pi)$ , 同时一般的周期函数也可以变换为以  $2\pi$  为周

期的函数,因此我们只讨论  $L^2(0, 2\pi)$  空间的函数.

在  $L^2(0, 2\pi)$  中定义内积为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.1.1)$$

对于  $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ , 如果  $\langle f, g \rangle = 0$ , 则称  $f, g$  是正交的, 并记作  $f \perp g$ .

在  $L^2(0, 2\pi)$  中定义范数为

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (1.1.2)$$

下面给出  $L^2(0, 2\pi)$  空间上的一些主要结论.

**定理 1.1.1** 对于任意  $f, g \in L^2(0, 2\pi)$ , 有 Schwarz 不等式

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (1.1.3)$$

以及三角不等式

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (1.1.4)$$

成立.

由于  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ , 通过计算可知

$$\langle e^{ikt}, e^{int} \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

所以函数系  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是标准正交系. 进一步有下面定理.

**定理 1.1.2** 函数系  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $L^2(0, 2\pi)$  的标准正交基, 即对任意  $f \in L^2(0, 2\pi)$ , 有

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}, \quad (1.1.5)$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (1.1.6)$$

我们称  $c_k$  为 Fourier 系数, 称 (1.1.5) 式的右端是  $f(t)$  的 Fourier 级数.

需要指出的是, 在公式 (1.1.5) 中, 两端相等是几乎处处相等, 而且级数的收敛是指在  $L^2(0, 2\pi)$  中按下式收敛

$$\lim_{M, N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right|^2 dt = 0,$$

即平方平均收敛.

如果对  $L^2(0, 2\pi)$  中的函数再加上一定的条件, 还可得到其他的收敛形式.

**定理 1.1.3** 设  $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$  在  $[0, 2\pi]$  分段连续, 并在  $t$  点的左右导数存在, 则它的 Fourier 级数在  $t$  点收敛, 即

$$\lim_{M, N \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] - \sum_{k=-M}^N c_k e^{ikt} \right| = 0;$$

如果还在  $t$  点连续, 则有  $f(t+0)=f(t-0)=f(t)$ .

**定理 1.1.4** 设  $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$  在  $[0, 2\pi]$  上连续且分段光滑, 则它的 Fourier 级数一致收敛于  $f(t)$ .

对于函数及其 Fourier 系数还有一个重要的关系式, 即下面定理成立.

**定理 1.1.5** 对于公式(1.1.5)中的  $f(t)$  和  $\{c_k\}$ , 有 Parseval 恒等式

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (1.1.7)$$

成立.

在实际应用中, 各种信号可看作时间的函数, 而各种周期信号可用一个周期函数表示. 我们知道, 基函数  $e^{ikt}$  是一个“正弦波”, 而且  $k$  越大, 频率就越高. 所以可以将一个周期为  $2\pi$  的信号(函数)按公式(1.1.5)分解成各种频率的正弦波( $e^{ikt}$ )之和, 然后根据不同的需要进行不同的处理. 另外, 一个信号  $f$  的范数  $\|f\|$  常常解释为它的能量. 如果信号  $f \in L^2(0, 2\pi)$ , 则  $f$  是一个周期为  $2\pi$  的能量有限的信号. 从(1.1.5)式可以看出, 每个信号的 Fourier 系数的平方可表示对应频率成分的能量. 所以, 对 Parseval 恒等式(1.1.7)的物理解释是, 一个信号的能量等于它所包含的不同频率的能量之和.

## 1.2 Fourier 变换

我们知道, 如果一个函数是定义在某个有限区间上, 可将该区间变换到  $[0, 2\pi]$ , 并将这个函数周期化, 变成实数集  $\mathbb{R}$  上的周期函数. 然而, 在各种问题中常出现定义在实数集  $\mathbb{R}$  上的非周期函数, 例如  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $g(t) = e^{-t^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  等. 这些函数无法周期化, 从而不能展开成前面介绍的 Fourier 级数.

设  $p \geq 1$  是任何自然数, 令  $L^p(\mathbb{R})$  是由所有满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt < +\infty$$

的函数组成的集合.

在  $L^p(\mathbb{R})$  中定义范数为

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

在不产生混淆的情况下, 常将  $\|\cdot\|_p$  记为  $\|\cdot\|$ .

我们主要考虑空间  $L^1(\mathbb{R})$  和  $L^2(\mathbb{R})$ . 注意, 空间  $L^1(\mathbb{R})$  和  $L^2(\mathbb{R})$  互不包含. 我们常用的函数一般都属于  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

由于函数  $e^{ix}$  不属于  $L^2(\mathbb{R})$ , 所以  $L^2(\mathbb{R})$  中的函数不能写成像(1.1.5)式的 Fourier 级数那样的离散形式的和式, 但可写成连续形式的和式, 即积分.

设  $f(t)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数,  $f(t)$  的 Fourier 变换定义为

$$\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (1.2.1)$$

$\hat{f}(\omega)$  的 Fourier 逆变换定义为

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.2)$$

下面给出 Fourier 变换的一些主要结论.

**定理 1.2.1** 对任意  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 则  $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ , 并且

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.3)$$

对于  $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$  定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.2.4)$$

那么, 对前面定义的范数, 有

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

**定理 1.2.2** 对于任意  $f(t), g(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 有 Parseval 恒等式成立:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle. \quad (1.2.5)$$

特别地,  $\|f\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\hat{f}\|_2$ .

**定理 1.2.3** 设  $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则有

- (1)  $|\hat{f}(t)| \leq \|f\|_1, t \in \mathbb{R}$ ;
- (2)  $\hat{f}$  在  $\mathbb{R}$  上一致连续;
- (3) 如果  $f$  的导数  $f'$  也存在并且属于  $L^1(\mathbb{R})$ , 则

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega \hat{f}(\omega);$$

- (4) 如果  $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ , 则  $\hat{f}(\omega)$  可微, 并且

$$[\hat{f}(\omega)]' = \mathcal{F}[-itf(t)];$$

- (5) 当  $\omega \rightarrow -\infty$  或  $\omega \rightarrow +\infty$  时,  $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ ;

设  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f$  与  $g$  的卷积定义为

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x) dx. \quad (1.2.6)$$

显然有  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ .

**定理 1.2.4** 设  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , 则  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ , 并且有

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \quad (1.2.7)$$

以及

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (1.2.8)$$

以上我们介绍了 Fourier 变换的一些主要性质. Fourier 变换能较好地刻画信号的频率特性,但不能提供信号在时频上的任何局部信息. 利用 Fourier 变换研究信号的频域特性时,必须获得该信号在时域中的全部信息. 给定一个信号  $f(t)$ ,在许多情况下令人感兴趣的是信号局部范围内的特性,然而如果通过 Fourier 变换,信号的时域信息丢失了,就很难知道事件发生的确切时间. 小波变换解决了 Fourier 变换面临的时域和频域局部化的矛盾.

## 1.3 小波分析简介

我们知道,函数集  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  构成  $L^2(0, 2\pi)$  的标准正交基,使  $L^2(0, 2\pi)$  中的任意函数都能展成 Fourier 级数. 基函数  $e^{ikt}$  可看作是基本“建筑块”,一般的函数可由这些基本建筑块构成,从而给分析问题带来了方便. 另外,正交基  $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是由一个简单函数  $w(t) = e^{it}$  的“膨胀”形成的,即  $w_k(t) = w(kt), k \in \mathbb{Z}$ . 由此,我们可以将  $L^2(0, 2\pi)$  看作是由单个函数  $e^{it}$  生成的空间. 我们知道,  $L^2(\mathbb{R})$  中的函数就不能写成 Fourier 级数的形式,这是由于  $L^2(\mathbb{R})$  是和  $L^2(0, 2\pi)$  完全不同的两个函数空间. 特别是,因为  $L^2(\mathbb{R})$  中的每个函数(的局部平均值)在  $\pm\infty$  必须“衰减”到零;显然“正弦波”函数  $w(t) = e^{it}$  不属于  $L^2(\mathbb{R})$ . 实际上,如果我们寻找产生  $L^2(\mathbb{R})$  的“波”,那么这个波在  $\pm\infty$  就衰减到零,而且在实际应用中,这个衰减应该是非常快的. 也就是说,我们要寻找小的波或称“小波”这样的函数  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ,来生成  $L^2(\mathbb{R})$ . 下面先介绍正交小波的概念(一般小波的概念在本书的 8.4 节介绍). 记

$$\psi_{jn}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - n), \quad j, n \in \mathbb{Z}; \quad (1.3.1)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.2)$$

**定义 1.3.1** 设一个函数  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 如果函数族  $\{\psi_{jn}\}_{j, n \in \mathbb{Z}}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  的一个标准正交基, 即

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{km} \rangle = \delta_{jk} \cdot \delta_{nm}, \quad j, k, n, m \in \mathbb{Z}, \quad (1.3.3)$$

则称  $\psi(t)$  为一个正交小波.

由定义,如果函数  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  是一个正交小波, 则函数族  $\{\psi_{jn}\}_{j, n \in \mathbb{Z}}$  构成  $L^2(\mathbb{R})$  的一个标准正交基, 从而对任意函数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 有如下展开式:

$$f(t) = \sum_{j, n=-\infty}^{+\infty} c_{jn} \psi_{jn}(t), \quad (1.3.4)$$

其中(1.3.4)式中的级数是在  $L^2(\mathbb{R})$  中收敛的, 即

$$\lim_{J, K, L, M \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{j=-J}^K \sum_{n=-L}^M c_{jn} \psi_{jn} \right\|_2 = 0.$$

在(1.3.4)式中的级数称为函数  $f(t)$  的小波级数, 其中  $c_{jn}$  称为小波系数. 在(1.3.4)式中, 两边关于  $\psi_{jn}$  取内积, 注意到正交性条件(1.3.3), 得到小波系数  $c_{jn}$  为

$$c_{jn} = \langle f, \psi_{jn} \rangle. \quad (1.3.5)$$

正交小波的最简单的例子是 Haar 小波:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Haar 小波最初是由数学家 Haar 在 1910 年提出的, 那时还没有小波的概念, 叫做 Haar 函数. 按现在的观点, 它属于正交小波. 在第 2 章将给出关于 Haar 小波的较为详细的讨论, 并由此说明一般小波函数的构造方法.

## 第 2 章 Haar 小波分析

在这一章,我们以 Haar 小波为例介绍多分辨分析的基本思想和方法.

### 2.1 Haar 尺度函数

定义 2.1.1 Haar 尺度函数定义为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

由于  $\varphi(x)$  只在区间  $[0, 1)$  上为 1, 在  $[0, 1)$  外恒为零, 我们称  $\varphi(x)$  的支集为  $[0, 1]$ .

现在考虑函数  $\varphi(x-k)$ ,  $k$  为任意整数, 即  $k \in \mathbb{Z}$ . 可以看出  $\varphi(x-k)$  的支集为  $[k, k+1]$ , 即  $\varphi(x-k)$  在  $[k, k+1]$  外恒为零, 并且  $\varphi(x-k)$  的图形是  $\varphi(x)$  的图形向右 ( $k > 0$ ) 或向左 ( $k < 0$ ) 移动  $|k|$  个单位. 令  $l^2$  是由所有满足条件  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$  的数列  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, c_k \in \mathbb{R}$  组成的空间, 且  $V_0$  是如下所有函数组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x-k), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (2.1.2)$$

其中  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$ . 为了讨论方便, 我们只要求  $k$  属于某个有限整数集, 即 (2.1.2) 式中只有有限项求和. 由于  $\varphi(x-k)$  只在  $x=k$  和  $x=k+1$  不连续, 所以  $V_0$  中的函数是分段常函数, 其不连续点只能是某些整数点. 由于  $\varphi(x-k)$  的支集为  $[k, k+1]$ , 并且 (2.1.2) 式中只有有限项求和, 所以  $V_0$  中的任意函数在某个有限区间外恒为零. 这样的函数称为具有紧支集的 (即函数值不恒为零的定义域区间是有限的).

下面再考虑函数  $\varphi(2x)$ , 其支集为  $[0, 1/2]$ , 而函数  $\varphi(2x-k) = \varphi(2(x-k/2))$  的支集是  $[k/2, (k+1)/2]$ , 其图形是  $\varphi(2x)$  的图形向右 ( $k > 0$ ) 或向左 ( $k < 0$ ) 移动  $|k/2|$  个单位. 令  $V_1$  是由如下所有函数组成的空间:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2x-k), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad (2.1.3)$$

其中  $k$  属于某个有限整数集, 即 (2.1.3) 式中只有有限项求和.  $V_1$  是由分段常函数组成的

空间,每个函数都是紧支集的,并且不连续点只可能是某些  $k/2$  点,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**定义 2.1.2** 设  $j$  是任意非负整数,即  $j \in \mathbb{Z}^+$ ,令  $V_j$  是由函数集

$$\varphi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$$

所张成的空间,即  $V_j$  是由所有分段常函数组成的空间,且该空间中的任意函数具有紧支集,其不连续点只能是某些  $k/2^j$  点,  $k \in \mathbb{Z}$ .

注意到  $V_0$  中的任意函数也属于  $V_1$ ,既有  $V_0 \subset V_1$ . 一般地,有

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

且这种包含关系是严格的. 例如  $\varphi(2x) \in V_1$ , 但  $\varphi(2x) \notin V_0$ , 因为  $\varphi(2x)$  在  $x=1/2$  不连续.

由上述定义,很容易得到下面结论.

**定理 2.1.1** (1)  $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$ ; (2)  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} x) \in V_0$ .

**证明** (1) 若  $f(x) \in V_0$ , 则  $f(x)$  可由  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  的线性组合表示出来(线性表出, 如(2.1.2)式), 从而  $f(2^j x)$  可由  $\{\varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  线性表出. 反之也成立. 结论(2)的证明与(1)的证明类似.

下面讨论  $V_j$  的基底. 我们先从  $V_0$  开始.  $V_0$  是由  $\varphi(x)$  及其平移  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的空间. 函数  $\varphi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  在  $L^2(\mathbb{R})$  中具有单位范数, 即

$$\|\varphi(x-k)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x-k) dx = \int_k^{k+1} 1 dx = 1.$$

如果  $k$  和  $n$  是不同的整数, 则  $\varphi(x-k)$  和  $\varphi(x-n)$  的支集不相交, 从而有

$$\langle \varphi(x-k), \varphi(x-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) \varphi(x-n) dx = 0, \quad k \neq n.$$

所以函数集  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_0$  的标准正交基. 同样的讨论可得到一般的结果.

**定理 2.1.2** 函数集  $\{2^{j/2} \varphi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  是  $V_j$  的标准正交基.

由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(2^j x - k) dx = 1/2^j$ , 所以要将  $\varphi(2^j x - k)$  乘以系数  $2^{j/2}$ , 使其范数为 1.

## 2.2 Haar 小波

前面讨论了由 Haar 尺度函数  $\varphi(x)$  所生成的一组嵌套空间  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ .  $j$  越大, 空间  $V_j$  就越精细, 包含的信息就越多. 空间的精细程度可由分辨率来描述. 就像一幅图像, 如果图像越精细, 它所包含的信息就越多, 分辨率就越高. 空间  $V_j$  的分辨率为  $2^j$ . 当  $j$  越大, 分辨率就越高. 在实际应用中, 可用空间  $V_j$  来逼近空间  $L^2(\mathbb{R})$ . 对于实际存在的各种信号(时间的函数), 一般都属于  $L^2(\mathbb{R})$ . 如果用某种仪器测量某信号, 由于精度(分辨率)的限制, 得到的信号  $f(x)$  只是实际信号的一个近似表示, 即可将  $f(x)$  看作属于某个空间  $V_{j+1}$ . 如果信号  $f(x)$  含有噪声, 例如某个尖峰信号, 想把噪声滤掉, 由于一般噪



声的频率比有用信号的频率高,我们就需要把  $f(x)$  中的属于  $V_{j+1}$  但不属于  $V_j$  的部分去掉(滤波).这就产生了小波的概念.我们的目标是把空间  $V_{j+1}$  分解为  $V_j$  与另一空间  $W_j$  的正交和,记为

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.2.1)$$

即对任意函数  $f \in V_{j+1}$ , 都有惟一分解  $f = p + g, p \in V_j, g \in W_j$ , 并且  $p \perp g$  (即  $\langle p, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)g(x)dx = 0$ ).  $W_j$  也叫做  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的正交补空间.

如何构造  $W_j$  呢? 先从  $j=0$  开始. 由于  $V_0$  是由  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的空间, 因此希望构造某一函数  $\psi$ , 使  $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  也能张成  $V_0$  在  $V_1$  中的正交补空间  $W_0$ . 在构造  $\psi$  时要满足以下两个条件:

(1)  $\psi \in V_1$ , 从而有  $\psi(x) = \sum_n c_n \varphi(2x-n), c_n \in \mathbb{R}$ , 且只有有限个  $c_n$  不为零;

(2)  $\psi \perp V_0$ , 即  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x-k)dx = 0$ , 对任意  $k \in \mathbb{Z}$ .

由条件(2), 当  $k=0$  时有  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0$ .

由条件(1),  $\psi(x)$  可由  $\varphi(2x)$  及其平移线性表出, 而  $\varphi(2x)$  的支集为  $[0, 1/2]$ , 从而可知如下函数

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

即

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) \quad (2.2.3)$$

满足上述要求.

**定义 2.2.1** 函数  $\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)$  定义为 Haar 小波函数.

为了说明  $W_0$  就是由  $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  张成的空间, 先证明如下结论.

**引理 2.2.1** 对任意  $f_1(x) = \sum_k c_k \varphi(2x-k) \in V_1$ , 有  $f_1 \perp V_0$ , 即  $f_1(x) \perp \varphi(x-l), l \in \mathbb{Z}$ , 当且仅当  $c_{2n} = -c_{2n-1}, n \in \mathbb{Z}$ .

**证明** 先证必要性: 假设  $l$  为任意整数, 由  $f_1(x) \perp \varphi(x-l)$ , 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f_1(x), \varphi(x-l) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\varphi(x-l)dx \\ &= \int_l^{l+1} f_1(x)dx \\ &= \int_l^{l+1} \sum_k c_k \varphi(2x-k)dx \end{aligned}$$