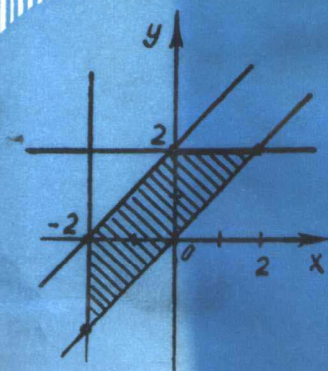
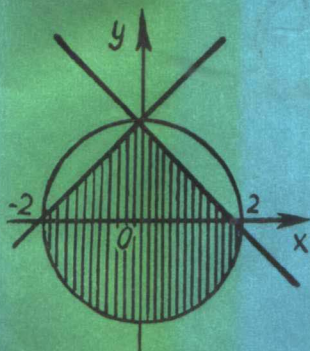
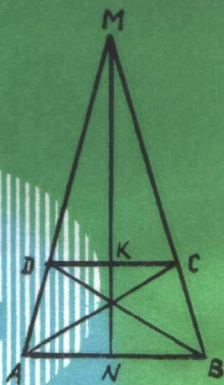
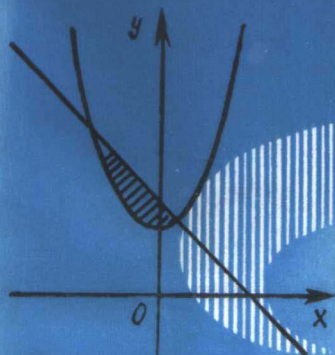


怎样学会解数学题

ENYANG XUEHUI JIE SHUXUETI



怎样学会解数学题

Л. М. 弗里特曼

〔苏〕 E. H. 杜列茨基 编著

B. Я. 斯捷欣柯

梁法驹 译

湖北人民出版社

怎样学会解数学题

Л·М·弗里特曼

〔苏〕Е·Н·杜列茨基 编著

В·Я·斯捷欣柯

梁 法 驹 译

湖北人民出版社出版 湖北省新华书店发行

咸宁地区印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 7.125印张 161,000字

1982年2月第1版 1982年2月第1次印刷

印数：1—26,400

统一书号：7106·1603 定价：0.62元

译 者 的 话

在学习数学过程中，解答数学问题对于巩固学生所学的知识，培养和提高他们分析问题、解决问题的能力以及创造能力，有着极其重要的意义。1980年春天，我看到这本《Как научиться решать задачи》（莫斯科教育出版社 1979年）。翻阅一遍，觉得它对正确而有效地培养学生的解题能力，有一定的帮助，因此着手把它译成中文。

本书结合学生的实际情况，比较系统地介绍了解数学题的有关基本知识和一般方法。全书由互相独立的两部分组成。第一部分讲关于问题和它们的解法的一般知识，讨论分析问题和寻找解题的一般方法。第二部分讨论某些最常见的问题类型的解法。在书中所举出的问题，一般都是选自中学教科书和某些试卷。本书适合于作为普通中学，中等专业学校和职业技术学校的学生课外阅读，也可供教师教学时参考。读者如果选择一本合适的数学学习题集和本书配合起来使用，效果可能会更好些。

原书所采用的数学符号，都是现行苏联中学教科书中所采用的符号，少数符号与我国现行中学数学课本所采用的略有不同，为使读者阅读方便，翻译时我们对个别符号作了改动，并在本书正文前列出了符号表。

湖北省教育学院揭秉让、陈纪绵、张家佑和武汉市教育学院郑隆圻同志，对本书的译稿提出了很多宝贵的意见，在此一并向他们表示感谢。

由于译者水平所限，不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

译 者

前 言

解题在数学教学中占有极其重要的地位。正因为这样，很多人都重视学习解题，但直到目前为止，大概教授解题的唯一方法就是：给出某些类型问题的解题方法，并且为了掌握这些方法做相当数量的练习。因此，给学生作为学习解题用的参考书，都是编写成习题集的形式（附有解答和某些提示）。

近年来出现一些叙述关于解题和寻找解题方法的某些一般性的提示和建议（启发式）的参考书。在这种书中，首先是 G·波里亚的书^①，其次是某些编得比较好的升学参考书。但是，这些参考书对于与解数学题有关的问题，叙述得不够完全，缺乏所必需的系统性，也没有考虑到难度是否符合于学生的实际。

心理学上对于训练解题这个问题的研究指出，学生在解题中没有形成一般的解题本领和能力，其基本原因在于缺乏经常的分析解题本身的活动，没有从中分出一般的有效方法和它们的理论基础。

因此，有必要为学生编写这样一种关于解题的参考书，这种参考书能够帮助学生在解数学题中形成一般的本领和能力。

本书就是编写这种参考书的初步尝试。它收效如何，请读者评定。

作 者

① 这里指的是美籍匈牙利数学家 G. Polya 所著的《How To Solve It?》，1945年。《Mathematics And Plausible Reasoning》，1954年。和《Mathematical Discovery》I，1962年，II 1964年。——译者

符号表

符 号	它 们 的 意 义
N	所有自然数的集合.
Z	所有整数的集合.
R	所有实数的集合.
$[a, b]$	始点为 a , 终点为 b 的闭区间, 等价于不等式 $a \leq x \leq b$.
(a, b)	等价于不等式 $a < x < b$ 的开区间.
$(a, b], [a, b)$	分别等价于不等式 $a < x \leq b$ 和 $a \leq x < b$ 的半开区间.
$(-\infty, a], (a, +\infty)$	分别等价于不等式 $x \leq a$ 和 $x > a$ 的无穷区间.
$\Rightarrow$	推论的符号.
$\Leftrightarrow$	等价性的符号.
$\in$	属于的符号.
$n \in Z$	数 n 属于整数的集合.
$A \in \Phi$	A 点属于图形 Φ .
$A \notin \Phi$	A 点不属于图形 Φ .
$\cup$	并的符号.
$A \cup B$	集合 A 和 B 的并集, 即这个集合中的每一个元素, 至少属于 A 和 B 这两个集合中的一个.
$\cap$	交的符号.

符 号	它 们 的 意 义
$A \cap B$	集合 A 和 B 的交集(公共部分), 即这个集合中的每一个元素, 同时属于 A 和 B 这两个集合.
$\{x x \in N, a < x < b\}$	属于集合 N , 而且满足不等式 $a < x < b$ 的 x 的集合.
$\subset$	包含的符号.
$N \subset R$	集合 N 包含在集合 R 中, 即集合 N 中的每一个元素都是集合 R 中的元素.
(AB)	通过 A 和 B 这两点的直线.
$[AB]$	端点为 A 和 B 的线段.
$\lceil AB$	始点为 A , 通过 B 点的射线.
$ AB $	线段 AB 的长度.
$\Phi_1 \cong \Phi_2$	图形 Φ_1 和 Φ_2 全等, 即叠加时重合.
$\Phi_1 \sim \Phi_2$	图形 Φ_1 和 Φ_2 相似, 相似系数为 k .
$\Phi_1 \cap \Phi_2 = M$	M 点是图形 Φ_1 和 Φ_2 的交.
$\angle ABC$	顶点为 B , 并且边为 $\lceil BA$ 和 $\lceil BC$ 的角.
$\widehat{ABC}$	角 ABC 的大小.
(ABC)	通过 A, B 和 C 三点的平面.
$\widehat{(ABC)(ABD)}$	平面 (ABC) 和 (ABD) 之间的二面角的大小.
S_l	关于直线(轴) l 对称.
$(O; OA), (O; r)$	圆心为 O , 半径为 OA (或者 r) 的圆.

目 录

前 言	I
符号表	II

第一部分 问题和它们的解法

第一章 问题的组成部分	1
I.1 解题从何着手?	1
I.2 问题的条件和要求	2
I.3 分析问题的方向	6
I.4 问题的条件由什么构成	10
I.5 问题的简略写法	14
I.6 利用图来作出问题的简略写法	18
第二章 解数学题的实质和结构	28
II.1 解数学题意味着什么?	28
II.2 解题过程的结构	33
II.3 常规问题和它们的解法	48
II.4 非常规问题和它们的解法	59
第三章 寻找解数学题的计划	66
III.1 识别问题的类型	67
III.2 用转化为以前解过的问题的方法来 寻找解题计划	73
III.3 在一堆石头中怎样捕捉老鼠?	83
III.4 在解题的过程中制作模型	95

第二部分 解题的方法

第四章 表达式的变换问题	100
IV.1 表达式的类型和它们的变换的实质	106
IV.2 化表达式成为常规形式的问题	119
IV.3 化简表达式的问题	123
IV.4 分解因式	132
IV.5 表达式的微分	137
第五章 方程, 不等式, 方程组和不等式组	142
V.1 方程和不等式, 它们的解法的实质	142
V.2 有理方程	149
V.3 有理不等式	152
V.4 无理方程和无理不等式	158
V.5 指数与对数的方程和不等式	163
V.6 三角方程和三角不等式	167
V.7 方程组	178
V.8 两个变数的不等式和不等式组	186
第六章 证明题	197
VI.1 证明的实质和方法	197
VI.2 恒等式的证明	203
VI.3 不等式的证明	209
VI.4 完全数学归纳法	212

第一部分 问题和它们的解法

第一章 问题的组成部分

I.1 解题从何着手?

想一想, 如果你们从事解题, 你们从何着手?

某些人可能认为, 这个问题毫无特殊的意义: 本来好象很明显, 想解决问题, 就必须从解它的某一个尝试着手. 应当指出, 实际上很多的学生就是这样做的: 拿到问题以后, 就立即从某一个解法的试验着手.

苏联心理学家 Л. Я. 加尔彼林恰如其份地把这种人的思维活动叫做“布朗的”^①, 即乱七八糟的. 这些人忙于做某一些解法的尝试, 俗话说, 做试验. 当证实了尝试是错误的; 他们马上又做第二个尝试——又错误了, 接着再做第三个尝试, 这样直到把所有的解题尝试都做完为止, 还是常常出乎意料之外, 没有找到正确的解法.

这种解题方法, 最主要的是对问题缺乏深入的、全面的分析. 从某种意义上来说, 解题总是应当从分析问题着手.

正是这样, 我们首先来学习进行分析问题.

① 指分子物理学中的布朗运动.——译者

I.2 问题的条件和要求

拿到问题以后，自然地，我们要注意地阅读它。

【问题1】在直角三角形中，内切圆的切点将斜边分为长5cm和12cm的两条线段。求这个三角形的直角边。

在阅读这道题目时，我们容易发现：在问题中有某些论断和要求。这个问题的论断是“在直角三角形中，内切圆的切点将斜边分为长5cm和12cm的两条线段”。问题的要求是要“求出三角形的直角边”。

问题的要求通常被陈述为问句的形式。但是，任何一个问句一定要求找出这一问句的答案。因此，任何一个问句都可以用要求来代替。

【问题2】旅行者乘船在河上航行了90公里，在陆地上步行了10公里。并且在步行的路程上所花的时间比在河上航行的路程所花的时间少4小时。如果旅行者步行的时间和航行的时间相同，那么他步行的距离和航行的距离就相等。问旅行者步行和航行各多少时间？

这个问题的问句可以用这样的要求来代替：求出旅行者步行的时间和他在河上航行的时间。

正象我们所看到的，任何一个问题的陈述都是由某些论断和要求所组成。问题的论断叫做问题的条件^①。

由此很清楚，在分析问题时，第一件需要做的事情就是把问题的陈述分开为条件和要求。我们注意到，在问题中通常不是只有一个条件，而是有若干个互相独立的基本（即不能再进

① 我们注意，有时候问题的条件也叫做问题的假设。

一步分开的) 条件。在问题中要求也可能不只一个。因此, 必须把问题的所有论断和要求分开为单个的基本条件和要求。

问题 1 可以分出这样的基本条件:

- 1) 问题中所讲的三角形是直角三角形;
- 2) 在这个三角形中内切一个圆;
- 3) 圆和斜边的切点分斜边为两条线段;
- 4) 这两条线段中一条长为 5cm ;
- 5) 另一条线段长为 12cm 。

这个问题的要求可以分开为两个基本的要求:

- 1) 求出三角形一直角边的长度;
- 2) 求出三角形另一直角边的长度。

问题 2 的论断可以分开为下面的条件:

- 1) 旅行者乘船在河上航行了 90 公里;
- 2) 他步行了 10 公里;
- 3) 在步行的路程上所花的时间比在河上航行的路程上所花的时间少 4 小时。

4) 如果旅行者步行的时间和航行的时间相同。这时, 他步行的距离为 S_1 ;

5) 而他航行的距离为 S_2 ;

6) 距离 S_1 等于 S_2 。

由这个问题的问句, 可以分出这样的两个要求:

- 1) 求出旅行者步行的时间;
- 2) 求出他在河上航行的时间。

把问题的陈述分开为条件和要求, 并不都是容易做到的。在很多情况下, 为了分开条件和要求, 还需要重新理解问题, 变更问题。例如

【问题 3】数 2^{100} 含有多少位数字(在十进位制中)?

这个问题的陈述由一个问句组成。但是，仔细想一下这个问题，我们可以由它分出这样的条件：

- 1) 2^{100} 是自然数；
- 2) 在十进制中，它可以用普通的方法写成多位数的形式。

这时，这个问题的要求是：这个多位数含有多少位数字。

【问题 4】解方程 $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 。

这个问题的陈述由一个要求组成。但是，分析这个要求，由它可以分出条件和本来的要求。条件： $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 是一个方程，而要求：解这个方程。

当然，不能停止在这上面，并且应该继续分析。我们注意到，在这个方程中含有两个字母： a 和 x 。自然，假定你们知道了这些字母表示什么：字母 a ——参数，即在这个问题的范围内被看作是常数； x ——变数，它的变化范围是数集，例如实数集（通常在问题中预先说明某一个数集）。此外，记住方程的含意是有益的。这时，问题的条件就是：

- 1) a 是参数；
- 2) x 是变数，它的变化范围是实数集；
- 3) $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$ 是关于变数 x 的命题。

这时，这个问题的要求可以这样来叙述：在变数 x 的变化范围内求出它所有这样的值，对于这些值所讲的命题成立。

问题的分析还可以继续深入一步。可以问：在所给条件下，求出变数 x 的值是什么意思？找出这个问句的答案，本身就使得问题的要求明确化。这个问句可以这样回答：求出这样一个依赖于 a 的 x 的表达式，使得它代替所给命题中的 x 时，命题对参数 a 的所有的允许值都成立。

正象我们所看到的，分析问题以及分开它的条件和要求，

可以进行到不同的深度。分析的深度主要依赖于你是否熟悉给出的问题所属的那个类型问题，同时也依赖于你是否熟悉这类型问题的一般解法。如果是熟悉，那么我们比较简单的分析——确定这个问题的类型就够了。如果不熟悉，那么为了找出问题的解法，就需要比较深入的分析。

习 题 一

试试自己分析下列问题，对每一个问题指出它所有的基本条件和要求。

1.1 当 x 取什么值时，命题 $2^x > 4$ 成立？

1.2 已知点 $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(1, 1)$, $D(3, 5)$, 作向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 之和。

1.3 有一列火车以 72 公里/小时的速度由 A 开往 B 。经过 45 分钟后，另一列火车以 75 公里/小时的速度由 B 开往 A 。 A 和 B 的距离是 348 公里。问距离 B 多远的地方两列火车相遇？

1.4 一个立方体的棱长为 a ，问这个立方体的棱之间的距离等于多少？

答 案

1.1 条件：1) $2^x > 4$ 是关于变数 x 的命题；2) 变数 x 的变化范围是集合 R 。要求：求出这样的集合 $X \subset R$ ，使得对于所有的 $x_0 \in X$ ，命题 $2^{x_0} > 4$ 成立。

1.2 条件：1) A 点的坐标为 $(-1, 2)$ ；2) B 点的坐标为 $(2, 3)$ ；3) C 点的坐标为 $(1, 1)$ ；4) D 点的坐标为 $(3, 5)$ ；5) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点为 A ，终点为 B ；6) 向量 $\overrightarrow{CD}$ 的始点为 C ，终点为 D 。要求：作一个向量，使它等于向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 之和。

1.3 条件：1) 由 A 开往 B 的火车的速度为 72 公里/小时；2) 由 B

开往 A 的火车的速度为 75 公里/小时；3) 第一列火车由 A 开出后 45 分钟，第二列火车由 B 开出；4) A 和 B 之间的距离等于 348 公里。要求：确定 B 到这两列火车相遇地点的距离。

1.4 条件：1) 已知一个立方体；2) 立方体的边长等于 a 。要求：1) 求出在同一个边界面上立方体相对的棱之间的距离；2) 求出立方体的相对边界面上平行的棱之间的距离；3) 求出立方体交叉的棱之间的距离。

I.3 分析问题的方向

回到问题 3。在分析这个问题时，我们分出了这样的条件：1) 2^{100} 是自然数；2) 它可以用普通的方法写成多位数的形式。

由问题的陈述为什么正好只分出这些条件呢？本来还可以分出另外一些条件，例如： 2^{100} 是数 2 自乘 100 次，或者 2^{100} 是实数等等。但是，为什么我们不分出这些条件，而只分出上面所讲的条件呢？

这是因为，在进行分析问题，由问题的陈述分出它的条件时，我们任何时候都应该把这种分析和问题的要求相比较，也就是经常要注意到要求。换句话说，分析问题总是以问题的要求为方向。

事实上，在问题 3 中，我们要确定的是数 2^{100} 含有多少位数字。自然地，这就预先需要：第一，这个数被看作是自然数（因为一般的，在其它类的数的写法中，数字的个数是不计算的，而事实上由幂的定义得出它是自然数），第二，这个自然数用通常的方式写成了多位数的形式。这就是我们在分析问题时，分出来的两个条件。我们再来看一些例子。

【问题 5】汽船顺水走了 20 公里以后，又逆水走了 20 公里。问它在整个往返的路程上所花的时间，比它在静水中走过 40

公里的路程所需要的时间，是少或是多？

初步分析这个问题，可以分出这样的条件：

1) 汽船顺水走了 20 公里；2) 它逆水走了 20 公里；3) 它在静水中走了 40 公里。

但是，比较这些条件和要求：汽船在第一和第二段路程一起所花的时间与第三段路所花的时间相比较，是多或是少，我们发现，所进行的分析是不够的。不够的地方表现在条件中甚至连时间都没有讲到，而问题的要求在于比较时间的多少。因此，需要继续分析。为此考虑问题的要求。应当比较这个汽船在河中往返的时间与它在静水中所走的时间。而这时间和什么有关系呢？显然，和汽船本身的速度，水流的速度，当然还和所走过的距离有关。但是，如果所走过的距离在问题的陈述中已经给出，那么汽船和水流的速度甚至没有提到，怎么办？在这种情况下，因为没有这些量解决问题是不可能的，所以我们可以把这些量取作不确定的参数。例如，我们假定汽船本身的速度为 v 公里/小时，水流的速度为 a 公里/小时。现在我们可以分出这样的条件：

- 1) 汽船本身的速度为 v 公里/小时；
- 2) 水流的速度为 a 公里/小时；
- 3) 汽船顺水走了 20 公里；
- 4) 它逆水走了 20 公里；
- 5) 汽船在河中往返的整个路程上共花 t_1 小时；
- 6) 在静水中汽船走了 40 公里；
- 7) 在这段路程上它花了 t_2 小时。

问题的要求：比较 t_1 和 t_2 ，并确定出它们相等或是不等，如果不相等，那一个较大。

【问题 6】 在所有相同体积的圆柱体中，求出具有最小全

面积的圆柱体。

这个问题的条件(“在所有相同体积的圆柱体中”)可以这样来理解,考察体积等于某一个数 V 的圆柱体的集合(这里 V 是参数)。问题的要求是,由这个圆柱体的集合中求出全面积最小的圆柱体。

把这个要求和所讲的条件相比较。明显的,所考察的圆柱体的全面积可以作为变数。需要求出这个变数的最小值。为此,显然应该把这个变数表示为其它的变数的函数。例如,可以取圆柱体底面的半径 r 作为这其它的变数。因此,应当求出 r 的这样的值(对给定的参数 V),使得对于这个值 $S(r)$ 取最小值,其中函数 $S(r)$ 是依赖于半径 r 的圆柱体的全面积。

于是,这个问题的条件就是:

- 1) 考察体积为 V (V 是参数)的圆柱体的集合;
- 2) 这些圆柱体的底面半径是变数 r ;
- 3) 这些圆柱体的全面积 S 是某一个函数 $S(r)$ 。

问题的要求: 1) 求出函数 $S(r)$;

2) 求出 r 的这样的值,对于这个值函数 $S(r)$ 取最小值。

以问题的要求为分析它的方向,还一定要特别注意弄清楚问题的要求的实质,在问题中,需要求出什么,要做到清晰明确。

【问题7】 证明表达式 $\frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} - \frac{b+c}{bc}$ 的值的集合由一个元素组成。

这个问题明显的条件是: $\frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} - \frac{b+c}{bc}$ 是两个变数 b 和 c 的表达式。

问题的要求的实质是什么呢? 证明所给表达式的值的集合由一个元素组成,这个意思是什么呢?