中学数学复习辅导

湖北教育出版社

中学数学复习辅导

彭咏松 王建昌 刘佛清 林友智
陈传理 骆东平 王祖祥 朱泽俭
刘汉文 周世俊 樊 恺

湖 北 教 育 出 版 社

中学数学复习辅导

彭咏松　王建昌　刘佛清　林友智
陈传理　骆东平　王祖祥　朱泽俭
刘汉文　周世俊　樊　恺

*

湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行
武汉大学出版社印刷总厂印刷
787×1092毫米32开本　18.5印张　1插页　395,000字
1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷
印数：1—100,000
统一书号：7306·207　　定价：2.60元

说　明

按照1983年底教育部颁发的两种教学纲要的教学要求，根据当前中学数学的教学现状及使用教材的情况，在本书的编写中，我们在着重体现基本纲要教学要求的同时，也考虑了按较高教学要求进行教学的重点中学师生的实际，以适合各类学校、不同基础的读者的需要。为今后高中毕业生和社会青年准备参加高考以及报考电大、业大等提供一部较系统、完整、实用的学习、辅导材料。

全书分代数、立体几何、平面三角、平面解析几何和微积分初步五篇。每篇分若干章、节。每章或节由知识要点、练习、范例、习题几部分组成。

知识要点，一般是将重要的知识加以归纳，力求以简明的形式列出，以便读者在阅读时能抓住重点，掌握体系，对比异同，揭示规律、对不易明了的地方，还给出简要说明以帮助读者理解。

范例和训练分三个等级：即(1)练习；(2)范例(A)、习题(A)；(3)范例(B)、习题(B)。

练习，主要目的是供学生在学习范例之前自我复习基础知识之用。其特点是：难度较低，覆盖全面，形式新颖，有填空、选择、改错、讨论、正误辨析等。这不仅有助于读者从不同的角度去理解和深化概念、定理、公式、法则，而且能启迪思维、活跃思路。

范例(A)、习题(A)。着重帮助读者熟悉本章知识的基本应用、归纳基本题型的解法以及常用的数学方法和解题技巧，这部分内容难度适中，主要是针对一般学校中等水平的学生编拟的。

范例(B)、习题(B)。重点放在分析问题、解题能力的提高上。这部分题目难度稍高，综合性和技巧性较强。它主要是为基础知识较好的学生编拟的。

多数范例都有探讨解题途径的分析和解后的总结性说明，并力求"分析"切题，"说明"源于例题，高于例题，能揭示规律，帮助学生举一反三，触类旁通。

学校在使用本书时，最好能循序渐进，完成练习有困难时，不要急于进入范例的学习；完成习题(A)尚有困难时，一般也就不要急于进入范例(B)的学习。

通过自学，准备参加电大、业大以及其它高等教育招生考试的同志，在使用本书时，如果学习范例(B)、解答习题(B)有困难，则可以不作要求。教师指导学生按本书复习时，也应遵循一定原则。

参加本书编写工作的同志有：彭咏松(湖北省教育学院)，王建昌(武昌实验中学)，刘佛清(武汉市六中)，林友智(武汉中学)，陈传理(华师一附中)，骆东平(黄冈高中)，王祖祥(襄樊市教研室)，朱泽俭(宜昌市教育局)，刘汉文(黄冈地区教研室)，周世俊(荆州地区教研室)，樊恺(武汉市教育学院)。

代数部分由樊恺、彭咏松修改、定稿，其余部分均由彭咏松修改、定稿。冯善庆同志绘制了本书的全部插图。

由于时间仓促，又限于经验和水平，不妥和谬误之处，请读者批评、指正。

编　者

一九八四年十一月

目　录

第一篇 代　　数

初等代数起源于算术，所研究的对象主要还是"数".但是，代数讨论的内容及研究方法与算术有很大的区别，是算术的推广和发展.

1．数的范围从非负有理数集逐步扩充到了复数集,数的运算，在四则运算以外，又增添了乘方、开方以及指数运算和对数运算；

2．广泛地用字母表示数,讨论了用字母和运算符号构成的各种解析式的恒等变形，从而从具体的确定的数的关系的研究扩充到数和运算的一般性质的研究；

3．通过研究两个解析式的相等和不等关系,讨论了方程和不等式；

4．从常数开始发展到变数，讨论了函数和数列；

5．在必然现象以外，又从数量的角度初步接触了随机现象，讨论了排列、组合和概率.

此外，在中学代数中还讨论了集合论的最基本的内容，并把它们作为新的数学思想和方法渗透到了各个有关部分.

代数的内容比较庞杂，所牵涉到的概念、公式、法则和定理很多，掌握和理解这些基础知识不仅是学习代数，而且也是学习几何、三角、解析几何和微积分的基础.复习这些知识时，不能孤立地死记硬背，而要理解它们的本质，注意有关知识的

相互联系和转化，力求从整体上去掌握，并能正确地运用。

代数中的基本数学方法，如综合法、分析法等一般的思维方法，反证法、数学归纳法等常见的证题方法，以及配方法、换元法、待定系数法、消参数法等带一定技巧的解题方法，同样也是重要的基础知识。复习这些方法时，要认识它们各自的实质和特点以及在解题中所起的不同作用，这样才能运用自如。

从理论上讲，代数问题并不依赖于几何图形。但是，代数关系比较抽象，如果能对问题中的代数关系赋予一定的几何意义，问题往往就变得易于理解了。在数学中，“数”与“形”的转化通常都是借助于坐标系这个重要的辅助工具来进行的，其中函数的图象对于解决代数问题尤其有重要的作用。因此，在复习时还要把“数”与“形”相互沟通，注意利用几何直观帮助探索解决代数问题的途径。

第一章 集 合

知 识 要 点

一、基本概念

集合；集合的元素。一个集合完全被它所含的元素所确定.

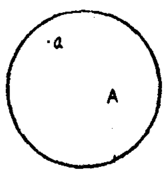
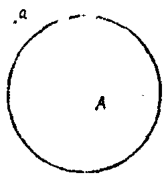
常用的数集的符号：N——自然数集；Z——整数集；Q——有理数集；R——实数集；C——复数集。

二、集合的表示方法

主要方法是列举法、描述法和图示法。此外，对于有关实数的集合，也常用不等式或区间来表示。一些常见的集合常用约定的特殊的符号或字母表示。

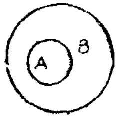
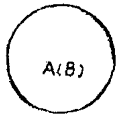
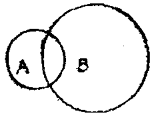
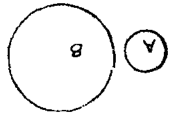
三、元素与集合的关系

表1—1—1

关 系	属 于	不 属 于
图示		
表示式	$a\in A$	$a\notin A$

四、集合与集合的关系

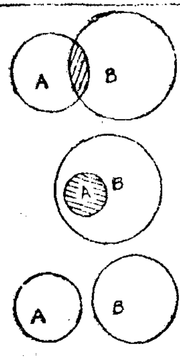
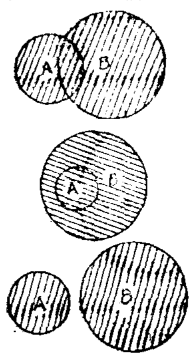
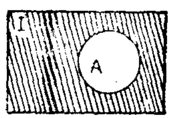
表1—1—2

关系	包含于		不包含于	
图示				
关系式	$A\subset B$ (A是B的真子集)	$A=B$ (A与B相等)	$A\not\subseteq B$ (A不是B的子集)	
	$A\subseteq B$ (A是B的子集)			

附注：空集是任何集合的子集，即$\phi\subseteq A$

五、集合的运算

表1—1—3

运算	交	并	补
图示			
表示式	$A\cap B$	$A\cup B$	$\overline{A}$

六、由子集、交集、并集、补集的定义得到的一些关系式

如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$；

如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，那么 $A=B$；

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$A\cap A=A\cup A=A$；

$\overline{\overline{A}}=A$；

$A\cap\phi=\phi$，$A\cup\phi=A$；

$A\cap\overline{A}=\phi$，$A\cup\overline{A}=I$。

练　　习

1．判断下面所给的对象能否构成集合，并将能构成的集合用适当的方法表示出来：

(1) 很大的数；

(2) 所有小于零的数；

(3) 数轴上与原点相距很近的点；

(4) 坐标平面上与点(1，1)的距离小于或等于0.1的所有的点；

(5) 使$x=x+5$的所有实数x。

2．选用集与集、集与元的从属关系的适当的符号填空：

(1) 0_R，-3_Z，$\sqrt{2}$_Z，0_$\{0\}$；

(2) N_Z，N_R，R_Z，Q_R；

(3) $\{a, b\}$_$\{b, a\}$，a_$\{a, b\}$，$\{a\}$_$\{a, b\}$，

$\{a, b\}$ __ ϕ；

（4） $A\cap B$ __ A， $A\cup B$ __ B， $A\cap B$ __ $A\cup B$，

$A\cup A$ __ $A\cap A$。

3．写出下列各集合里的元素：

（1） $\left\{x \,\middle|\, |x| = 5，x\in R\right\}$；

（2） $\left\{m \,\middle|\, |m| < 3，m\in N\right\}$；

（3） $\left\{x \,\middle|\, |x-2| \leqslant 3，x\in Z\right\}$；

（4） $\left\{x \,\middle|\, 2x^2+3x-2=0，x\in Q\right\}$。

4．{正方形}∩{菱形}＝？ {正方形}∪{矩形}＝？

5．设$I=R=$\{实数\}，$A=$\{有理数\}，$B=$\{无理数\}，求$A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}$。

6．用集合的符号表示：

（1）与α角终边相同的所有角；

（2）方程$\sin x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$（a、b为非零实数）的所有解；

（3）不等式$x^2-3x+2<0$的解；

（4）以原点为圆心，r为半径的圆。

7．下题的答案只有一个是正确的，试把正确答案的代号填在括号内：

$X=\{(2n+1)\pi，n\in Z\}$，$Y=\{(4k\pm1)\pi，k\in Z\}$，它们之间的关系是（　　）。

(A)$X\subset Y$；(B)$X\supset Y$；(C)$X=Y$；(D)$X\neq Y$。

8．证明：对于集合A，B，C，如果$A\subseteq B$，$B\subset C$，那么$A\subset C$。

范 例 (A)

例1 写出集合$A=\{a, b, c, d\}$的所有子集。

解 集合A的所有子集是：

空集ϕ；

由A的一个元构成的子集 $\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$；

由A的二个元构成的子集 $\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{b, c\}$，$\{b, d\}$，$\{c, d\}$；

由A的三个元构成的子集$\{a, b, c\}$，$\{a, b, d\}$，$\{a, c, d\}$，$\{b, c, d\}$；

集合A本身$\{a, b, c, d\}$。

说明 写A的子集时不要遗漏了空集ϕ和A本身(写A的真子集时则不计A本身)。

一般来说，由n个元素构成的集合的子集的总数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n(\text{个}).$$

作为特例，在本例中，A的子集的总数为$2^4=16$(个)。

例2 设全集 $I=\{$不大于10的自然数$\}$，$A=\{$奇数$\}$，$B=\{$偶数$\}$，$C=\{$质数$\}$，$D=\{$合数$\}$. 求$A\cup B$，$B\cap C$，$C\cup\overline{D}$，$\overline{C}\cap\overline{D}$。

解 $I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$；

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$；$B=\{2, 4, 6, 8, 10\}$；

$C=\{2, 3, 5, 7\}$， $\overline{C}=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$；

$D=\{4, 6, 8, 9, 10\}$， $\overline{D}=\{1, 2, 3, 5, 7\}$.

$\therefore$ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}=I$；

$B\cap C=\{2\}$；

$C\cup\overline{D}=\{1, 2, 3, 5, 7\}$；

$\overline{C}\cap\overline{D}=\{1\}$.

说明 整数按其是否能被2整除分类，有

$$\{整数\}=\{奇数\}\cup\{偶数\};$$

自然数按其除1和本身以外是否还有其它(正)因数分类，有

$$\{自然数\}=\{质数\}\cup\{合数\}\cup\{1\}.$$

需要注意，1既不是质数也不是合数。

例3 设 $A=\{x|\ x^2-5x-6>0\}$，

$B=\left\{x\,\middle|\,|x-2|<5,\ x\in R\right\}$，$C=\{x|\lg x<1\}$。求$A\cup B$，$A\cap B$，$(A\cap B)\cap C$。

解 $A=\{x\,|x<-1$ 或 $x>6\}$，$B=\{x\,|-3<x<7\}$，$C=\{x\mid 0<x<10$。所以

$$A\cup B=R;$$

$$A\cap B=(-3,\ -1)\cup(6,\ 7);$$

$$(A\cap B)\cap C=\{(-3,\ -1)\cup(6,\ 7)\}$$
$$\cap(0,\ 10)=(6,\ 7).$$

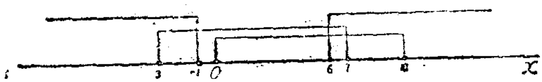


图 1—1—1

说明 实数的集的交与并，利用数轴图示的方法比较直观易求。

同样，求关于实数对的集的交与并时，可以采用在坐标平面上图示的方法。

例如，设$A=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$B=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$。那么$A\cap B$是图1—1—2(甲)中的阴影部分；$A\cup B$是图1—1—2(乙)中的阴影部分。

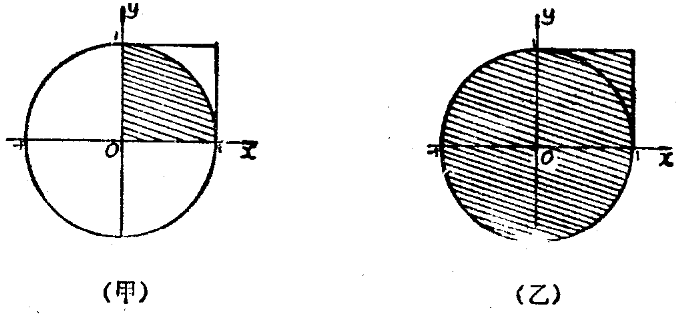


图 1—1—2

习　题　1—1(A)

1. 把下列集合用描述法表示出来：

(1) $\{-3, -1, 1, 3\}$；　(2) $\{6, 8, 10, 12\}$；

(3) $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$；

(4) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \cdots\right\}$；

(5) $\{1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots\}$；

(6) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \cdots\right\}$.

2. 用集合的符合表示：

(1) 点A在直线l上；点A在平面α内；

(2) 直线l在平面α内；

(3) 平面α与平面β平行；平面α与平面β相交，交线l是 .

3. 下题的答案只有一个是正确的，试把正确答案的代号填在括号内：

满足$\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$的集合A的个数为(　　)。

(A) 4；(B) 6；(C) 8；(D) 以上都不对.

4. 设 $I=\{a, b, c, d, e\}$，$A=\{a, b, c\}$，$B=\{a, c, d, e\}$，$C=\phi$。求$\overline{A}$，$(A\cup B)\cap C$，$\overline{(A\cup C)\cap(B\cup C)}$，$(A\cup B)\cup C$，$\overline{B\cup C}$，$\overline{B}\cap\overline{C}$，$\overline{A}\cap B$。

5. 设全集$I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，$A=\{a|a=3x, x\in I\}$，$B=\{b|b=3x-1, x\in I\}$，$C=\{c|c=3x-2, x\in I\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$，$\overline{A}$，$(A\cup B\cup)C$，$\overline{B\cup C}$。

6. 设全集 $I=\{x|2\leqslant x\leqslant 20, x\in Z\}$，$A=\{4$ 的倍数$\}$，$B=\{3$ 的倍数$\}$，$C=\{$质数$\}$，$D=\{$偶数$\}$．求 $A\cup B$，$B\cap C$，$C\cap\overline{D}$，$\overline{D\cap C}$。

7. 设$I=R$，$A=\left\{x\,\middle|\,|x-5|>2\right\}$，

$B=\left\{x\,\middle|\,|x+2|<5\right\}$，求$\overline{A\cap B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$。

8. 取全集为坐标平面上的点集，若

$A=\{(x, y)|x^2+y^2<4\}$，$B=\{(x, y)|x+y>2\}$，试在坐标平面上用图示的方法表出$A\cup B$，$A\cap\overline{B}$。

9. 写出方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\3x-y=1\end{cases}$$

的解集并进行化简。

10. 试用图表示下列各集合之间的关系：

$A=\{$三角形$\}$，$B=\{$直角三角形$\}$，$C=\{$等腰三角形$\}$，$D=\{$等腰直角三角形$\}$。

范　例　(B)

例1　设集合I，A，B的关系如图1—1—3所示，试用阴影表示下列集合：(1) $A\cap\overline{B}$；(2) $(\overline{A\cup B})\cup(A\cap B)$；