相似理论及其在热工和化工中的应用

程尚模　季中　编著

华中理工大学出版社

相似理论及其在热工和化工中的应用

程尚模　季　中

责任编辑　易秋明

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：5.25　字数：108 000

1990年2月第1版　　1990 年2月第1次印刷

印数：1-1 000

ISBN　7-5609-0389-4/TK・14

定价：1.10元

内 容 简 介

相似理论是关于相似现象的理论，是指导实验的理论。它指出了实验时应测量的量，实验数据的整理方法和实验结果的推广应用范围。

全书共分五章。第一章概述了相似理论的发展史和相似三定理。第二章首先根据微分方程理论导出了 π 定理的正确的数学表达式，证明了巴肯汉的 π 定理仅是它的一个特例。随后证明了基尔皮契夫所介绍的相似第三定理也不完全正确。第三、第四和第五章是关于相似理论的实际应用。第三章结合几个典型实例，利用相似理论综合整理热工和化工实验数据的方法和步骤。第四章介绍和总结了有关微分方程的相似解问题。第五章讨论了模化并介绍了近似模化方法的一些新发展。

本书可以作为大学高年级学生和研究生的教学用书，以及可供大学教师、研究人员和工程技术人员等参考。

—

编 者 的 话

从50年代起，在动力、冶金、化工、机械等有关专业的教学中都设置了传热学这门课程，这门课讲授了热能传递的基本理论与规律，也讲授了三种热能传递方式在工程实际中的应用。作为传热学的基本理论之一的相似理论在对流换热中曾作了介绍，其效果是好的。

在多年的教学与科学研究实践中，我们认为相似理论不仅在传热学的实验研究中有用，而且在求某些问题的相似解中也是有用的。但是现有的传热学书中都没有详细介绍相似理论。这使我们产生编写此书的想法，希望能弥补传热学不详细介绍相似理论的不足。而且，相似理论也需要不断地完善。例如，巴肯汉定理（即相似第二定理）并不是普适定理；说明两现象相似的第三定理也需完善。我们对此进行了探索，提出了结论。作者之一，季中副教授作了仔细的论证。几年来我们合写了几篇文章，在有关的学术会议上宣读，有的已发表。

最近两年我们将有关内容向华中理工大学工程热物理专业高年级学生讲授过，使内容不断完善，最后整理成书。本书经武汉水运工程学院热工教研室林发森教授评审，在此，我们对林教授的辛勤劳动表示衷心的感谢。

华中理工大学　程尚模

青岛化工学院　季　中

1987年9月

本书符号说明

1. 物理量

A	加速度，m/s^2.
a	热扩散率（导温系数），m/s^2.
C	相似倍数；
	质量浓度；kg/m^3.
	积分常数.
C_f	摩阻系数.
C_p	定压比热，$J/kg\cdot℃$.
D	扩散系数，m^2/s.
D,d	直径，m.
e	自由空间率.
F	力，N.
F,f	面积，m^2.
G	质量流率，$kg\cdot m^2/s$.
g	重力加速度，m/s^2.
H,h	高度，m.
K,k	传质系数，m/s.
k	反应速率常数.
L,l	线性尺寸，m.
M	质量，kg.
N	摩尔通量，$kmol/(m^2\cdot s)$.
P,p	压力，Pa.
q	热流通量，W/m^2；
	热效应，J/kmol.
R	气体常数，$J/kg\cdot K$；
	半径，m.
r	汽化潜热，J/kg.

r_A	产生组分A的速率，$kmol/(m^3 \cdot s)$.
S	浸湿面积，m^2.
T, t	绝对温度，K.
T_0	张力，$kg \cdot m/s^2$.
U, u	速度，m/s.
U_∞, u_∞	来流速度，m/s
U	位移，m.
	湿周，m;
	电位，V.
V	体积，m^3.
v	速度，m/s;
	比容，m^3/kg.
W	阻力，N;
	重量流量，$kg \cdot m/s^3$
w	速度，m/s.
X	物理量.
$[x]$	测量单位.
x	X的量值;
	质量含汽率.
x, y, z	坐标.
z	可压缩性系数.

2. 希腊字母

α	化学计量数;
	换热系数，$W/(m^2 \cdot K)$.
β	体积膨胀系数，K^{-1};
	化学计量数.
γ	重度，kg/m^3.
δ	厚度，m.
ε	空泡份数.
η	相似参数.
θ	过余温度
λ	导热系数，$W/m \cdot {}^\circ C$.

M, μ	动力粘度，$N \cdot s/m^2$。
ν	运动粘度，m^2/s．
P, ρ	密度，kg/m^3。
σ	表面张力，kg/s^2．
τ	切应力，$kg/(m \cdot s^2)$
T, τ	时间，s。
ϕ	塔板开孔率；填料因子．
ψ	流函数； 水的密度和液体的密度之比

3．上标和下标

Ⅰ上标

0	定解条件中的量。
Ⅰ，Ⅱ	第一和第二现象．
m_{kp}, m_{kf}	幂指数．

Ⅱ下标

A, B	组分
C	临界(*Critical*)
e	当量(*Equivalent*)
f	流体(*Fluid*)
G, g	气相(*Gas*)
l	液体(*Liquid*)
m	平均(*Mean*)； 模型(*Model*)
p	原型(*Prototype*)
s	饱和(*Saturation*)
TP	两相(*Two phase*)
v	蒸汽(*Vapor*)
w	壁面(*Wall*)
∞	来流或远离壁面．

4．相似准则及无单位参数

Co	分布参数

$\mathrm{Eu}=\dfrac{p}{\rho w^2}$　欧拉(Euler)准则（数，下同）

$\mathrm{Fo}=a\tau/l^2$　付立叶(Fourier)准则

$\mathrm{Fr}=gl/w^2$　弗鲁德(Froude)准则

$\mathrm{Gr}=g\beta l^3\Delta t/\nu^2$　葛拉晓夫(Grashof)准则

$\mathrm{Ga}=gl^3/\nu^2$　伽利略(Galileo)准则

$\mathrm{Ho}=w\tau/l$　谐时准则

$\mathrm{L}_s=y/x$　长度准则

$\mathrm{Nu}=\alpha l/\lambda$　努赛尔(Nusselt)准则

$\mathrm{Pe}=wl/a$　贝克列(Peclet)准则

$\mathrm{Pr}=\nu/a$　普朗特(Prandtl)准则

$\mathrm{Re}=wl/\nu$　雷诺(Reynolds)准则

$\mathrm{Sc}=\nu/D$　施米特(Schmidt)准则

$\mathrm{Sc}=\dfrac{C_{pl}(T_w-T_s)}{r}$，过热度比

$\mathrm{St}=\dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}}=\dfrac{\alpha}{w\rho c_p}$ 斯坦顿(Stanton)准则

$\mathrm{T}_s=Tf/Tw$　温度准则

$\mathrm{We}=\dfrac{\rho w^2 l}{\sigma}$　韦伯(Weber)准则

$\mathrm{W}_s=v/u$　速度准则

目　　录

第一章 绪　论

相似理论是关于相似现象的理论，是指导实验的理论。实验是科学研究的基础，特别是，对新的基本现象来说，实验研究是有效的研究方法。

自从电子计算机广泛应用以来，数值计算方法已成为解决工程技术问题的强有力的手段之一[1]。但这并没有丝毫降低实验研究的重要性。诚然，数值计算方法具有不少的优点，只要能够较经济地解决工程技术问题，就应首先采用它，但是数值计算方法也有它的局限性和应用限度。首先，它的结果的可靠性和可用性取决于数学模型的正确与否，而数学模型的正确性则需要经过实验的检验。其次，对于某些复杂的现象，目前还不能给出适当的数学描写。再者，即使某些现象有适当的数学描写，但对于那些形状复杂的、非线性的、变化极其迅速和小尺寸的现象，其数值解也难于得到或者得出的解会超过实际可能。另外，数值解中的某些数据需要由实验提供。由此可见，实验是计算的基础。最佳的方法应是两者适当的结合。

对于实验，需要有指导实验研究的理论，这个理论便是相似理论。在进行实验时，必须解决下述三个方面的问题：(1)在实验中应该测量哪些量？(2)应当如何处理实验的结果？(3)处理后的实验结果的应用范围如何？

相似理论的三个相似定理对上述问题一一作了明确的回答。这就是：测量相似准则包含的所有的量；把实验结果整理为准则关系方程；这些关系方程可以应用到所有与实验现象相

似的现象群中。两现象是否相似，要根据相似第三定理的必要与充分条件来确定。这样，从个别现象的实验中所获得的结果，就不仅适用于被实验现象本身，而可以推广到与实验现象相似的现象群中。

目前，相似理论已被广泛地应用于热工、化工、土木、建筑、航空、造船，并逐渐被应用到现代天体物理学的研究中[2]。甚至在生物学这类自然科学中，相似理论也可应用。相似理论不仅已经成为实验科学的基础，而且还被用来对微分方程的组合和求解[3]。

“相似”的概念首先出现在几何学里。1686年牛顿提出了机械运动相似的概念[4]。1848年法国科学院院士伯特兰对力学现象，严格地确定了其“物理相似”的基本性质[5]，从而得出了相似第一定理，即关于相似准则存在的定理。相似第一定理指出，彼此相似的现象具有数值相等的同名相似准则。在伯特兰提出相似准则（无量纲数）之后，有许多学者应用它，以准则形式来处理实验数据，例如，雷诺应用雷诺数Re来判断流体流动状态。1914年美国学者巴肯汉提出著名的π定理[6]，随后爱林费斯特—阿法那赛夫也发表了相应的论文[7]。相似第二定理，实质上就是π定理。π定理指出，任何物理方程均可转换为无量纲量（数）之间的关系方程。对相似现象来说，无量纲方程的形式是相同的。相似第三定理指出两现象相似的必要与充分条件。它是由苏联学者基尔皮契夫和古赫曼提出的，并由基尔皮契夫在1930年予以证明[8]。

可是，巴肯汉的π定理及基尔皮契夫的相似第三定理都有局限性，巴肯汉的π定理仅是本书将要导出的新的π定理的一个特例。

相似理论与量纲分析理论的发展是有关系的。π定理的导

出并不需要利用量纲的概念，而只需要利用有关物理量的单位及单位制的知识即可。这样导出的 π 定理可作为导出相似第一定理和相似第三定理的基础，即这两个定理均可根据相似的定义，在 π 定理的基础上导出。因此，新的 π 定理应该是相似理论的核心内容。

第二章　π定理和相似三定理

§1. 物理量、单位和单位制

迄今为止，对物理量还没有一个严格的定义。ISO（国际标准化组织）31/0和我国GB3101—82都指出："物理量是 用于定量地描述物理现象的概念。"因而可以得出：

(1) 物理量是用来描述物理现象的。由于有各种不同的物理现象，因此，也就有名 称（力学的、热学的……）和 性 质（标量、矢量……）各异的物理量。又由于物理现象 是 变 化的，因而描述物理现象的物理量，在物理变化过程中也是变化的，它们之间存在着函数关系，并可以进行数学运算[9]；

(2) 物理量既然用于定量地描写物理现象，那么对于每一个物理量，就需要有一个测量单位。所谓测量单位，就是把各种物理量按属性分类，每类包括相互比较的量，在同一类中选定一个量为参考量，这个参考量称为这个物理量的测量单位，其他同类物理量都可用这个单位的多少分之一或多少 倍 来 表达，即

$$X_i = x_i[x_i] \tag{2-1-1}$$

式中，X_i为（被测量的）物理量；$[x_i]$为测量单位；x_i为 用$[x_i]$测量X_i时的数值。

式(2-1-1)表明，物理量既可用符号X_i表示，也可 用 $x_i[x_i]$表示。

在理论上测量单位$[x_i]$可以任意选定。例如对每 一 类 物

理量，都可以选取该类中的任一量作为该类的测量单位。一般，先选定几个物理量作为基本量，它们的测量单位称为基本单位，以符号$[x_p]$（$p=1,2,\cdots,k$。其中，k是基本量的数目）表示。其他各量称为导出量，它们的单位则根据物理定律的数学表达式或该量的定义式，由基本单位导出，称为导出单位，用符号$[x_j]$（$j=k+1,k+2,\cdots,n$）表示。对基本量的选取不同（包括种类和数目k的不同），将构成不同的单位制。每种单位制是一组自成体系的单位群，其中每一个物理量都有一个单位。同一个导出量在不同的单位制中，其导出单位也不同。目前常用的单位制有三种：国际单位制，cgs制，重力单位制。本书采用国际单位制。

国际单位制，即SI制，以m（米）、kg（千克）、s(秒)、K（开尔文）、A（安培）、mol（摩尔）、cd（坎德拉）等为基本单位。SI制已为世界上大多数国家所采用。

SI制采用了7个基本单位，这仅仅是为了实用上的方便，理论上，可以选取三个或三个以下的基本单位[9][10]。

基本单位和导出单位之间的关系式是多种多样的，有时甚至不能用解析式表示。在众多的物理量之间的关系式中，有些可表示为幂函数积的形式。一般来说，物理定律的数学表达式和物理量的定义式就是这种形式[11]。例如，牛顿第二运动定律的表达式为[12][13]

$$F=CMA \tag{2-1-2}$$

式中C为比例常数；F、M、A分别代表力、质量和加速度。

由上述定律的数学表达式或定义式，就可用基本单位来导出其导出单位。例如通过式(2-1-2)，由基本单位$[m]$（质量的单位）、$[l]$（长度单位）和$[s]$（时间单位），可导出力F的单位$[f]$。为了便于导出$[f]$，可令比例常数$C=1$。此时，

为

$$F = MA \tag{2-1-3}$$

由式(2-1-3)可得

$$[f] = [m][a] = [m][l]/[s]^2 \tag{2-1-4}$$

若k个相互独立的基本量（即任一基本量不能由其他的基本量导出）X_1，X_2，…，X_k，有相应的基本单位$[x_1]$，$[x_2]$，…，$[x_k]$，则任一导出量$X_j(j=k+1,k+2,\cdots,n)$与X_1，X_2，…，X_k的幂函数形式的关系式可表示为[14]

$$X_j = CX_1^{m_{1j}} \times \cdots \times X_k^{m_{kj}} \tag{2-1-5}$$

而X_j的单位$[x_j]$与$[x_1]$，$[x_2]$，…，$[x_k]$的关系式为

$$[x_j] = [x_1]^{m_{1j}} \times \cdots \times [x_k]^{m_{kj}} \tag{2-1-6}$$

上述分析具有下述特点：

(1) 当基本单位$[x_p](p=1,2,\cdots,k)$改变时，两个同类量A_1和A_2的比值不变。

(2) 虽然物理规律与单位制的选取无关，但物理规律在采用某种单位制来描述时，其表达式便具有与该单位制相应的形式。对于不同单位制，其表达式可能不同，例如牛顿第二运动定律可表示为式(2-1-2)或式(2-1-3)等不同形式。

(3) 对于在国际单位制基础上建立的物理方程，当改变基本单位$[x_p]$的大小时，其形式不变。同时，物理量方程和相对应的数值方程在形式上完全相同。

以牛顿第二运动定律为例，其物理量方程是

$$F = MA \tag{2-1-7}$$

单位方程是 $[f] = [m][a] = [m][l][t]^{-2}$ (2-1-8)

根据式(2-1-1)，将式(2-1-7)改写为

$$f[f] = m[m]a[a] = ma[m][l][t]^{-2} \tag{2-1-9}$$

由式(2-1-8)和(2-1-9)，得

$$f = ma \tag{2-1-10}$$

即物理量方程(2-1-7)与数值方程(2-1-10)在形式上完全相同。

设在n个量中有k个基本量X_1，X_2，…，X_k和$n-k$个导出量X_{k+1}，X_{k+2}，…，X_n，构成如下任意形式的函数关系

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_k, \cdots, X_n) = 0 \tag{2-1-11}$$

则相应的数学方程为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n) = 0 \tag{2-1-12}$$

式中，$x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$是用$[x_i]$测量$X_i$时的数值。

(4) 根据式(2-1-1)和(2-1-6)有

$$X_j/x_j = (X_1/x_1)^{m_{1j}} \times \cdots \times (X_k/x_k)^{m_{kj}}$$

$$X_j/(X_1^{m_{1j}} \times \cdots \times X_k^{m_{kj}}) = x_j/(x_1^{m_{1j}} \times \cdots \times x_k^{m_{kj}}) = \pi_j \tag{2-1-13}$$

式中，π_j称为无量纲量，也称为相似准则或准则数，也可简称为准则。从π_j的组成可知，π_j的数值与所选用的单位制无关，不论采用何种单位制来测量，其数值都恒相同。

量纲有几种定义。物理学常用的定义是：表示一个物理量如何由基本量（包括这些量的幂数）组合的式子，称为该物理量的量纲[18]。前面已引入了基本量和导出量的概念，并且写出了它们的关系式(2-1-5)。在讨论量纲时，也需要引入基本量和导出量的量纲概念。根据式(2-1-5)和量纲的定义，任一导出量X_j的量纲为

$$\dim X_j = X_1^{m_{1j}} \times \cdots \times X_k^{m_{kj}} \tag{2-1-14}$$

比较式(2-1-6)和式(2-1-14)可知，两式在形式上是相同的。单位和量纲两者的概念是不相同的。单位用于说明定量关系；

而量纲只用于说明定性关系，它只是表明物理量的属性而不牵涉其值的大小。在讨论量纲问题时，式（2-1-14）中的 X_j、X_1、X_2、…、X_k等符号只代表量的属性，而不牵涉到这些量的数值。另外，同性质的量的单位相同，但量纲相同的量并不一定是同类量。例如功和力矩的量纲相同，但它们并不是同类量。不过，当单位制和量纲制采用的基本量相同时，由于两者的公式的形式相同，因此，如果以基本量纲（基本量的量纲）替换单位公式中与之相对应的基本单位，即可得到量纲公式，反之亦然。如果采用文献〔2〕所定义的量纲，则量纲与单位的关系更密切。这种定义是“通过基本量度单位表示的导出单位的表达式称为量纲。”实际上，就是把表示导出单位与基本单位的关系式(2-1-6)认为是量纲公式。如果量纲制与单位制所采用的基本量是一致的，则上述定义在理论上是成立的。这将给理论分析带来某种方便。鉴于“单位”这一概念已广为人知，同时相似理论的原理和应用也并不需要“量纲”这一抽象的概念，所以本书尽量不提“量纲”这一名词，只使用单位这一术语并以式(2-1-5)、式(2-1-6)作为基础来进行讨论。

§2. 巴肯汉π定理及其数学表达式

1914年巴肯汉提出了著名的π定理，随即引起了各国科学家们的注意。此后，量纲（或因次）理论进一步用来解决复杂的科学技术问题。现将π定理表叙如下：

“设在某一物理体系中有n个正值的，不消失的（不等于零的）物理量构成函数关系，而且任何$n-1$个参量的数值规定后，余下的一个量的数值就唯一地决定了，并设在n个量中有k个基本量，则这n个量之间的函数关系可简化为$n-k$个无因