数学与应用数学专业系列教材

理论·模型·方法·应用

运筹学理论基础

钟守楠　高成修　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学与应用数学专业系列教材

理论 · 模型 · 方法 · 应用

运筹学理论基础

钟守楠　高成修　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学理论基础/钟守楠,高成修编著. 一武汉: 武汉大学出版社,
2005.12
数学与应用数学专业系列教材
ISBN 7-307-04697-0

Ⅰ.运… Ⅱ.①钟… ②高… Ⅲ.运筹学—高等学校—教材
Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 099287 号

责任编辑:李汉保　　责任校对:程小宜　　版式设计:支　笛

出版发行: **武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn　网址: www.wdp.com.cn)
印刷:湖北省荆州市今印印务有限公司
开本: 880×1230　1/32　印张:9.875　字数:278 千字
版次:2005 年 12 月第 1 版　　2005 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04697-0/O·330　　定价:15.00 元

内容简介

运筹学是一门新兴的应用数学分支，本书主要是为应用数学本科生编写的教材。鉴于运筹学解决问题的理论基础是最优化理论与技术，因此内容选取以优化理论基础为重点，主要涉及线性规划、图与网络规划、动态规划、对策论等。各部分内容着重阐明基本理论与基本方法。内容取舍上既重视讲述经过长期考验被证明是行之有效的方法，更注重新理论、新方法的介绍，并辅之必要的例题和习题。

本书可以作为应用数学、信息与计算专业本科生的教材，也可以作为从事管理科学、工业工程、系统工程、工程科学等专业的研究生以及相关科技人员的参考书。

序

数学与应用数学专业既有悠久的发展历史又有新时代赋予的新内容和新特征。进入21世纪的今天,该专业的人材培养模式,培养目标、课程体系,教材建设等一系列专业建设问题都有待进行积极地探索和创新。为了探索新时期数学与应用数学专业教材的特色,不断提高本专业的教学质量和教材建设水平,我们以1998年国家教育部颁布的普通高校本科数学与应用数学专业的培养目标和要求为基本原则,在教学实践和教学经验积累的基础上,制定了本专业系列教材出版规划,并成立了数学与应用数学专业系列教材编委会。

编委会认为,编辑出版的教材应力求反映当前教学改革的需要,体现当代社会发展的特点和学科特色,具有一定的前瞻性。因此该系列教材以数学与应用数学专业本科生为主要教学对象,以模型、理论、方法、应用为组织教学内容的基本思路,材料取舍力求反映学科发展的基础理论和前沿成果,同时也尽可能地做到深入浅出,文字准确、精练、简洁,使教材具有可读性,通用性。不断适应和满足新时期数学与应用数学专业及相关专业人才培养的教学需要和要求是本系列教材的编写目的。该系列教材的选题由编委会根据专业建设的需要统一规划,由专人负责编写,编委会评审推荐,由武汉大学出版社审定出版。

由于我们的水平和经验有限,这批教材在编写及出版工作中可能存在不足和缺点,敬请使用本系列教材的教师、学生及广大读者提出批评和建议,使该系列教材日臻完善。

数学与应用数学专业系列教材编委会

2005年9月10日于武汉大学

前　　言

运筹学是 20 世纪 30～40 年代发展起来的一门新兴学科。该学科的研究对象是人类对各种资源的运用及筹划决策问题。该学科的研究目的在于了解和发现这种运用及筹划决策活动的基本规律,以便发挥有限资源的最大效益来达到总体最优的目标。这里所说的"资源"是广义的,既包括物质材料,也包括人力匹配;既包括技术装备,也包括社会结构。运筹学已被广泛地应用于国民经济各行业与科学技术的各个领域。

运筹学就其理论和方法来看具有下列特点:运筹学解决问题的基本方法是最优化理论和技术,从系统的观点出发,以整体最优为目标,研究各组成部分的功能及其相互间的影响,协调各部门之间的关系,找出使问题获得最佳效果、最优解答或付诸实施的最好行动方案。运筹学解决问题的方法具有多种学科的交叉性和综合性,解决问题的手段是系统分析建模和计算机求解。该学科具有强烈的实践性和广泛的应用性。

运筹学的内容广博,分支众多,各分支之间既有共同的理论基础,更有其各自的特色。作为应用数学专业本科生的教材,在有限的学时内,不可能面面俱到,但又要学生了解和掌握运筹学的基本原理、方法。因此我们只就运筹学解决问题的理论基础,即最优化理论和技术作为本书的主要内容。本书主要介绍线性规划、图与网络规划、动态规划、对策论等内容。每一部分内容着重阐述其基本理论和方法并配以适当的习题。既阐述经过长期考验被认为是有效的经典理论和方法,更重视新理论和新方法的介绍,使本书能够体现运筹学发展中的问题和一些重要进展。

本书力求概念清晰，重点突出，理论分析详简合适；叙述流畅，层次清楚，通俗易懂。本书可以作为应用数学、信息与计算专业本科生的教材，也可供从事管理科学、工业工程、系统工程、工程科学等专业的研究生以及相关科技人员参考。

参加本书编写的还有杨青、屠惠远、张爱华、曹晓刚等。

本书的出版得到武汉大学教务部领导的有力支持和关心，同时得到武汉大学出版社李汉保先生的悉心指导，在此表示衷心感谢！在编写过程中参阅的许多优秀著作均在参考文献中列出，对于这些著作的作者及出版社致以由衷的感谢！

最后，作者要向所有关心和支持本书出版的人们，包括作者的家庭成员致以敬意！是他们的关怀支持使得本书得以出版。

由于作者的水平和经验有限，且编写时间仓促，书中可能存在缺点和不足，希望使用本书的教师、学生和其他专家学者提出批评建议。

作　者

2005年1月于武汉大学

目　录

第一章　绪　论

§1.1　运筹学概述

1.1.1　什么是运筹学

运筹学是20世纪30～40年代发展起来的一门新兴学科.该学科的研究对象是人类对各种资源的运用及筹划决策问题.该学科的研究目的在于了解和发现这种运用及筹划决策活动的基本规律,以便发挥有限资源的最大效益来达到总体、全局最优的目标.这里所说的"资源"是广义的,既包括物质材料,也包括人力配备;既包括技术装备,也包括社会结构.

由于运筹学研究的对象在客观世界中的普遍性,决定了运筹学应用的广泛性.该学科的应用范围遍及工农业生产、经济管理、科学技术、国际事务等方面,如生产布局、交通运输、能源开发、最优设计、经济决策、企业管理、城市建设、公用事业、农业规划、资源分配、军事对策等都是运筹学研究的典型问题.

从方法论来说,运筹学是一门交叉学科,是物理学家、数学家、经济学家、工程师等各自从不同角度出发对实际问题的认识和描述,研究系统解决大型复杂现实问题的新途径,新方法,促使新理论更快地形成.因此,运筹学的研究方法显示出各学科研究方法的综合,其中数学方法、统计方法、逻辑方法、模拟方法是运筹学中常用的方法.

由于运用筹划活动的类型不同,描述各种活动的模型不同,因而形成不同的分支.如运筹学早期的三大支柱为:研究优化模型的规划

论，研究排队（或服务）模型的排队论，以及研究对策模型的对策论（博弈论）. 现在的主要分支有：

线性规划，整数规划，非线性规划，动态规划，多目标规划，随机规划.

组合最优化，图与网络最优化，决策分析，对策论，库存论、供应链等.

随机服务系统，应用随机过程，可靠性理论，Markov 决策规划，计算机随机模拟，管理信息系统等.

1.1.2 运筹学的特点

运筹学作为一门定量的分析决策科学，利用数学、计算机科学及其他科学的成就，探讨经济管理系统中的数学规律，合理使用和统筹安排人力、物力、财力等资源，为决策者提供最优决策方案，以获得满意的经济效益和社会效益，就其理论和方法上来看，该学科具有如下特点：

1. 运筹学解决问题的基础是最优化理论和技术. 从系统的观点出发，以整体最优为目标，研究各组成部分的功能及其相互间的影响，协调各部分之间的利害冲突，寻求使问题获得最佳效果的解及付诸实施的最佳行动方案.

2. 运筹学解决问题的方法具有交叉性和综合性，即用多种不同学科交叉渗透，综合应用.

3. 运筹学解决问题的手段是分析建模及利用计算机求解.

4. 运筹学具有强烈的实践性和应用性. 在军事、经济和服务等行业，均有广泛的应用.

1.1.3 现代运筹学发展简况

现代运筹学作为一门独立学科是 20 世纪 30～40 年代形成的. 但是构成其雏形的早期工作可以追溯到 20 世纪初，如 1908 年丹麦电话工程师 Erlang 关于电话局中继线数目话务理论的研究是现代排队论的起源；20 世纪 20 年代美国 Levinson 关于最优发货量的研

究是现代库存论和决策论发展的雏形;20 世纪 30 年代末前苏联经济学家 Каигорович 撰写的《生产组织与计划中的数学方法》是线性规划在工业生产中的早期应用.

朴素的运筹思想在中国古代历史发展中源远流长,如春秋时期著名军事家孙武所著《孙子兵法》就是军事运筹的体现.此外,据史书记载,我国古代在农业、运输、工程等方面可以看到多阶段决策,合理调运,资源综合利用,城市规划等典型的现代运筹思想和方法.然而,作为一门新兴学科的确立,是在第二次世界大战期间,20 世纪 30 年代中后期,为了运用新发展的雷达系统有效地对付德国飞机,英国军事管理部门召来一批具有不同学科和专业背景的科学家,在 1940 年 8 月成立了一个由布莱克特(P. M. S. Blackett)领导的 11 人小组,进行新战术试验和战术效率评价的研究,并取得满意的效果.他们把自己从事的这种工作命名为 Operational Research(运筹学).这个小组的工作从雷达系统的运筹开始,到战斗机的拦截战术,空军作战战术评价,防止商船遭受敌方潜艇攻击,改进深水炸弹投效的反潜战术等.他们的工作在反法西斯战争中起到了积极作用,也为这门新兴学科的产生作出了不可磨灭的贡献.(我国运筹学前辈从《史记》一书中,汉高祖刘邦对谋士张良的赞语"夫运筹帷幄之中,决胜千里之外"一语中的运筹一词作为这门学科的名称,把 Operational Research 译成运筹学,既反映了该学科的内涵,又显示了其军事运筹的起源,也表明运筹学在我国早有萌芽.)

第二次世界大战胜利后,英、美各国对于运筹学的研究不但在军事领域继续深入,同时在政府和工业各部门也推行运筹学方法,大批专门从事研究的公司也逐渐成立,如 RAND 公司是 1949 年成立的.各国运筹学学会从 1950 年起,先后成立.1959 年,英、美、法运筹学学会发起成立国际运筹学联合会(International Federation of Operational Research Societies,简记 IFORS).

在我国,现代运筹学的研究是从 1956 年开始的,当时在中国科学院力学研究所所长钱学森先生的倡导下,由许国志先生领导创办了中国第一个运筹学研究室,1958 年中国科学院数学研究所所长华

罗庚先生开始从事运筹学应用课题研究，并在 1959 年成立了运筹学研究室，吴文俊、越民义先生等都是该研究室最早的研究人员. 1980 年中国运筹学学会成立，1982 年中国运筹学学会加入国际运筹学联合会（IFORS），1985 年参加亚太运筹学联合会（APORS）的筹建，并成为该联合会的主要成员.

1.1.4 运筹学学术期刊

全世界运筹学出版物的种类和数量每年都以惊人的速度递增，据初步统计，直接用运筹学或其分支命名的期刊全世界有 40 多种，与运筹学密切相关的期刊也有 40 多种，这里摘录几种：

1.《国际运筹学文献》（International Abstracts in Operations Research，缩写 IAOR）该刊物是国际运筹学联合会编辑的重要文献期刊，每年 6 期，由英国 MacMillan 出版公司出版.

2.《运筹学/管理科学》（Operations Research/Management Science）每年 12 期，该刊物是美国出版的文摘期刊.

3. 美国的《数学评论》（Mathematical Reviews）和德国的《数学文摘》（Zentralblatt für Mathematic und ihre Grenzgebiete/Mathematics Abstracts）.

4.《American J. of Mathematical & Management Sciences》，每年 4 期，美国出版.

5.《International Transactions in Operational Research》，每年 6 期，英国出版.

6.《运筹学学报》（OR，Transactions），每年 4 期，中国出版.

7.《Applied Mathematics & Optimization》，每年 6 期，德国出版.

8.《Communications of the Operations Research Society of Japan》，每年 12 期，日本出版.

9.《Operations Research》，每年 6 期，美国出版.

第二章 线性规划

§2.1 线性规划引言

2.1.1 线性规划的发展简况

线性规划(Linear Programming,简记 LP)是运筹学的一个重要分支.从数学的角度来讲,是一个特殊的条件极值问题,即寻找一个线性函数在满足一组线性等式或不等式约束条件下的最大值或最小值问题.

线性规划的早期研究具有代表性的人物和著作有前苏联数学家康托洛维奇(Канторович),他在 1939 年所著的《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出线性规划问题,如生产配套问题.1941 年美国学者柯普曼(T.C.Koopmans)提出有限资源的分配问题.1941 年美国学者希奇柯克(F.L.Hitchcok)和柯普曼等,分别独立地提出了运输问题这类特殊的线性规划问题.1947 年,但茨(Dantzig)提出对于一般线性规划问题的算法,单纯形方法(simplex method),线性规划很快成为一门独立的学科.1984 年卡玛卡(Karmarkar)提出一个线性规划内点算法,是一种行之有效的多项式算法.1985 年,Todd 等人补充和改进了 Karmarkar 算法.

1975 年,Konterovich 和 Koopmans 由于在创建经济模型、经济理论及数理经济上的卓越贡献获得诺贝尔(Nobel)经济学奖.

2.1.2 线性规划模型举例

例 1. 生产配套问题.

设某个车间拥有 n 种机床,要在这些机床上生产 m 种不同产品,设 a_{ik} 为单位时间内在第 i 种机床上能生产第 k 种产品的数量,假设要求各产品的数量成一定比例(即配套),如 $\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_m$. 试问该如何安排在一定的时间 T 内各机床的生产任务,使得产品的总套数最大?

设变量 x_{ik} 表示第 i 种机床生产第 k 种产品所占的时间,那么

$$x_k = a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \cdots + a_{nk}x_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_{ik}$$

表示第 k 种产品的总产量,上述问题可以写成如下数学形式

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = T \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_m = \lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_m$$

且使 $\dfrac{x_j}{\lambda_j}$ 的值达到最大.

例 2. 资源合理分配问题.

某工厂有 m 种生产资源,设第 i 种资源的可利用数量为 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$,利用这些资源可以生产 n 种产品,设生产一个单位的 j 种产品所需要的 i 种资源数量为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,设第 j 种产品的单位价格为 c_j,试问如何安排产品的产量,使产值最大?

设生产第 j 种产品的产量为 x_j,则问题归结为如下的数学形式

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i (i = 1,2,\cdots,m), x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,\cdots,n).$$

例 3. 运输问题.

某类物资有 m 个产地,n 个销地,第 i 个产地的产量为 $a_i(i = 1,$