朱锡华 编

初中数学中的反例

山东教育出版社

前　言

在数学中，要判断一个命题为真须要经过严格地证明，但要证明“若A则B”为假，只要找出（构造）一个反例即可。提出证明和构造反例在数学中具有同等重要的地位。

本书按初中数学课本的章节顺序，根据初中生学习数学时容易出现的错误，对一些概念、定理、法则以反例的形式予以揭示，帮助读者正确地理解这些概念、定理、法则。全书共分两篇，第一篇代数；第二篇平面几何。第二篇第五章的最后一部分“论证中的反例”，集中概括了初中生在证明平面几何问题时常见的典型错误。

有些例题后面方括号里的文字，是对该例题错误原因的分析说明；有些例题因较简单，这部分就省略了。

本书可作为初中学生的课外学习读物，也可作为初中教师的教学参考书。

恳望读者对书中的缺点和不足之处，给予批评指正。

一九八七年四月

目　　录

第一篇　代数

第二篇 平面几何

第一篇　代　　数

第一章　实　　数

§1　有　理　数

1.　正数：带有正号的数叫做正数；

负数：带有负号的数叫做负数；

零既不是正数，也不是负数。

判定一个实数是正数或负数，须将该数化简为前面仅带有一个性质符号。一个字母前面带有一个正号或一个负号，不能确定它是表示正数，还是表示负数。

例 1　$+[-(+5)]$、$+(-4)$都不是正数。

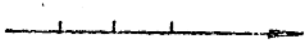
例 2　$-(-3)$、$-[+(-6)]$ 都不是负数。

例 3　$+a$不一定表示正数；$-y$不一定表示负数。

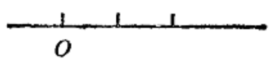
2.　数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

数轴的三要素：原点、方向、单位长度缺一不可。数轴是直线，而不是线段或射线。

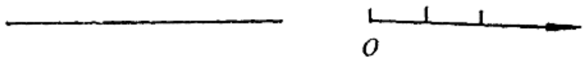
例 4　下列图形所表示的都不是数轴：



〔缺原点〕



〔缺方向〕



〔缺三要素〕　　　　　　〔不是直线〕

图 1

3. 相反数：只有符号不同的两个数，其中一个是另一个的相反数，零的相反数是零。

相反数概念反映了两个数之间的关系，一个数或多个数不能谈相反数。

例 5　下列叙述都是错误的：

（1）-5 是相反数；

（2）-4、$+4$、$+7$、-7 互为相反数；

（3）$(\sqrt{2})^2$ 与 $(-\sqrt{2})^{-2}$ 互为相反数；

（4）a 和 $-b$ 是相反数；

4. 数的绝对值：一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。

数的绝对值概念，既反映了数的绝对值的性质符号，也反映了它的数值的大小。

例 6　下列说法及等式都是错误的：

（1）正数的绝对值是正数，负数的绝对值也是正数；

（2）$|x|=x$，$|-a-3|=a+3$，$|\log_2 x|=\log_2 x$，$|\sin x|=\sin x$；

（3）$|a|$ 在数轴上的对应点是 a。

5. 倒数：1除以一个数的商，叫做这个数的倒数。

要特别注意，零没有倒数（零不能做除数）。

例 7　下列推理是错误的：

（1）$\because\dfrac{1}{a}$的倒数是a正确，

$\therefore b$的倒数是$\dfrac{1}{b}$也正确；

（2）$ax=b$，两边同乘以a的倒数$\dfrac{1}{a}$，得$x=\dfrac{b}{a}$。

（3）$ax>b$，两边同乘以a的倒数$\dfrac{1}{a}$，得$x>\dfrac{b}{a}$。

§2　无　理　数

无理数：无限不循环小数叫无理数。

例1　下列说法是错误的：

（1）无限小数都是无理数；

（2）带根号的数都是无理数。

例2　下列各式是错误的：

（1）$\sqrt{2}=1.414$；

（2）$\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+1.732$；

（3）$|-\pi|=3.1416$。

例3　下列无理数在数轴上的对应点是不对的：

（1）$-\sqrt{2}$的对应点是A（图2）；

（2）π的对应点是B（图3）。

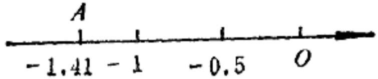


图2

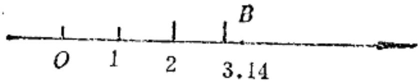


图 3

第二章　代　数　式

§1　整　　式

1．代数式：用运算符号把数和表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式。

单独一个数或者一个字母，也是代数式。

代数式不含等号、不等号。

例 1　下列式子不是代数式：

(1) $a^2+b^2=2ab$；

(2) $2x+y=0$；

(3) $10a>b$；

(4) $c=2\pi R$。

2．单项式：只有数与字母积的代数式叫做单项式。

在单项式中，分母不能含字母。

例 2　下列代数式不是单项式：

$$\frac{2}{x};\ \frac{1}{xy};\ \frac{b}{a};\ \frac{3}{m}.$$

3．多项式：几个单项式的和叫做多项式。

例 3　下列式子不是多项式：

$\frac{1}{m}+n$；$\sqrt{a}+\sqrt{b}$； 2^x+3^x； $x^2-2x-3=0$。

4. 整式：单项式和多项式统称整式。

例 4 下列式子不是整式：

$$\frac{m}{\sqrt{4}+\sqrt{n}}；\ 5+x^{-1}；\ \frac{\sqrt{y^2}}{2}；\ \frac{x}{\sqrt{x^2}}；\ x^{-1}+1。$$

5. 同类项：所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项叫同类项。

合并同类项：把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母指数不变。

例 5 下列运算不符合合并同类项的法则：

(1) $4a+5b=9ab$；

(2) $10x-6x^{-1}=4$；

(3) $10a^2b-13ab^2=-3a^2b^2$；

(4) $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3=\frac{1}{2}x^5$。

6. 去括号法则：括号前面是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项都不变；括号前面是“-”号，把括号和它前面的“-”号去掉，括号里各项都变号。

添括号法则：括号前面是“+”号，括到括号里的各项都不变；括号前面是“-”号，括到括号里的各项都变号。

上述法则中要特别注意“都”字的含义。

例 6 下列各式不符合去括号法则：

(1) $-(1-2x+x^2)=1+2x-x^2$；

(2) $-[+(-4a^2+6ab+7)]=4a^2+6ab+7$。

例 7 下列各式不符合添括号法则：

(1) $5a^5-7a^3+6a-5=+(5a^5+7a^3+6a+5)$;

(2) $x^2+y^2+z^2-3xyz=-(x^2+y^2+z^2+3xyz)$;

(3) $25-x^2+2xy-y^2=25+(x^2-2xy+y^2)$;

(4) $(2b-a-c)(2b+a-c)=[2b-(a-c)]$
$[2b+(a-c)]$

例 8 下面的化简是错误的：

$$\frac{1}{3}m^2n-\left\{\frac{1}{2}mn-\left[\frac{2}{3}m^2n-\left(\frac{1}{3}mn^2+\frac{1}{2}mn\right)+\frac{2}{3}mn^2\right]+m^2n^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}m^2n-\frac{1}{2}mn+\frac{2}{3}m^2n-\frac{1}{3}mn^2+\frac{1}{2}mn-\frac{2}{3}mn^2+m^2n^2$$

$$=m^2n+m^2n^2-m^2n.$$

7. 同底数幂的乘法：同底数的幂相乘，底数不变，指数相加。

例 9 下列运算不符合同底的幂相乘的法则：

(1) $m^4\cdot n^2=(mn)^6$;

(2) $x^2\cdot x^4=x^8$;

(3) $b\cdot b^3=b^3$;

(4) $a^5\cdot a^5=(2a)^{10}$.

8. 幂的乘方：幂的乘方，底数不变，指数相乘。

例10 下列运算不符合幂的乘方法则：

(1) $(a^2)^8=a^{10}$;

(2) $(a^b)^2=a^{b+2}$;

(3) $(x^2)^3=3x^2$;

(4) $(a^m)^n = a^m$.

9. 积的乘方：先把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘。

例11 下列运算不符合积的乘方法则：

(1) $(0.1ab^2c^3)^2 = 0.01a^3b^4c^5$；

(2) $(xy^2z^3)^2 = xy^4z^6$；

(3) $(4ab)^4 = 16a^4b^4$；

(4) $(-3x^2y^5)^2 = -9x^4y^{10}$；

(5) $(a+b^2-c^3)^2 = a^2+b^4-c^6$.

10. 单项式的乘法：单项式相乘，用它们的系数的积作为积的系数，对于相同的字母，用它们的指数的和作为积里这个字母的指数，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。

例12 下列运算不符合单项式相乘的法则：

(1) $5a^2 \cdot 6a^2 = 30a^2$；

(2) $4x^2 \cdot 7x^3 = 28x^6$；

(3) $\frac{1}{8}a^2 \cdot \frac{1}{8}a^4 = \frac{1}{8}a^6$；

(4) $\frac{1}{3}a^n \cdot \frac{2}{3}a = a^{n+1}$；

(5) $(ab^{2n}c^n)(b^3c^4) = b^{3+2n}c^{4+n}$.

11. 单项式与多项式相乘：单项式与多项式相乘，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加。

例13 下列运算不符合单项式与多项式相乘的法则：

(1) $(a^2+a+1)b = a^2b+ab+1$；

(2) $\frac{1}{2}a^2b(2-ab)+a^2b(1+\frac{1}{2}ab)$

$=a^2b-\frac{1}{2}a^3b^2+a^2b+\frac{1}{2}a^3b^2$.

12. 多项式与多项式相乘：多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项乘以另一个多项式的每一项，再把所得的结果相加。

例14 下列运算不符合多项式与多项式相乘的法则：

(1) $(3x^2-y^2)(2x+y)=6x^3-y^3$；

(2) $(a+b)(c+d)(x+y)=acx+bdy$；

(3) $(2^m+3^n)(3^m+2^n)$

$=2^m\cdot3^m+2^m\cdot2^n+3^n\cdot3^m+3^n\cdot2^n$

$=6^{2m}+2^{mn}+3^{mn}+6^{2n}$.

13. 乘法公式：

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

例15 下列运算不符合乘法公式：

(1) $(a+3b)(3b-a)=a^2-9b^2$；

(2) $(-a-b)(a+b)=a^2+b^2$；

(3) $(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}n)(-\frac{m}{2}+\frac{n}{3})=\frac{1}{4}m^2-\frac{n^2}{9}$；

(4) $(5x^2-4y)(5x^4+4y)=5x^4-4y^2$；

(5) $(x^m-y^n)(x^m+y^n)=x^{mm}-y^{nn}$；

(6) $(3y-4)(y+4)=3y^2-16$；

(7) $(6x-y)^2=36x^2-y^2$；

(8) $(a-7b)^2=a^2-14ab-49b^2$;

(9) $(5^x-3^y)^2=25^x-2\cdot5^x\cdot3^y+9^y$;

(10) $(a+2b)(a^2-4ab+4b^2)=a^3+8b^3$;

(11) $(a+2b)(a^2+2ab+4b^2)=a^3+8b^3$;

(12) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)=a^3-2b^3$.

14. 同底数幂相除：同底数幂相除，底数不变，指数相减。

同底数的幂中的底数不能等于零。

例16 下列运算不符合同底数幂相除的运算法则（各小题中的字母均不等于零）：

(1) $a^{10}\div a^2=a^5$;

(2) $a^7\div a=a^7$;

(3) $3x^3\div 3x^2=3x$;

(4) $(m-1)^4\div(m-1)^3=m-1$.

15.单项式除以单项式：单项式相除，把系数、同底数幂分别相除，作为商式的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

例17 下列运算不符合单项式除法法则：

(1) $-x^2a^4b^5\div\left(-\frac{2}{7}xa^3b^3\right)=\frac{2}{7}xab^2$;

(2) $4x^3y^2z\div(-8x^2y)=-\frac{1}{2}xy$;

(3) $(5x^3y^4)^2\div(10xy^2)^2=\frac{1}{2}x^2y^2$;

(4) $a^3x^2b\div a^2x^2b^2=ab$。

16.多项式除以单项式：多项式除以单项式，先把这个

多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加。

例18 下列运算不符合多项式除以单项式的运算法则：

(1) $(36a^4-18a^2+6a)\div 6a=6a^3-3a$；

(2) $(15x^2y^3-5x^3y^2)\div(-5xy)$

$=-3xy^2+x^2y$

$=-2xy^2$；

(3) $(25x^2+10x^3y-5x^4y^2)\div(-5x^2)$

$=-5x^2-2xy+x^2y^2$.

17. 多项式除以多项式：两个多项式相除，可以先把这两个多项式都按照同一字母的降幂排列，然后再仿照两个多位数相除的演算方法，用竖式进行演算。

例19 下列运算不符合多项式除以多项式的运算法则：

(1) $(1+x^2+x^4)\div(x^2+1-x)$

$=(1+x^2+x^4)\div(1-x+x^2)$

$$\begin{array}{r}
1 \\
1-x+x^2\overline{)1+x^2+x^4} \\
\underline{1-x+x^2} \\
x^2-x+x^4+x^2
\end{array}$$

(2) $(3x^3-4x-5x^2+3)\div(x^2-x+5)$

$$\begin{array}{r}
3x \\
x^2-x+5\overline{)3x^3-4x-5x^2+3} \\
\underline{3x^3-3x^2+15x} \\
-4x-3x^2-5x^2+15x+3
\end{array}$$

§2 多项式的因式分解

1. 因式分解：把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解。

被分解的是多项式，分解的结果是整式的积；因式分解

是恒等变形。

例 1 下列变形不是因式分解：

（1）$m(x+y+z)=mx+my+mz$；

（2）$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

（3）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

（4）$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$；

（5）$x^2-8x+8=(x-7)(x-1)+1$；

（6）$9m^2-6m+2n-n^2=3m(3m-2)+n(2-n)$。

2．分解因式的方法：提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法。

（1）提取公因式法：如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提出这个公因式作为多项式的一个因式，用这个因式去除这个多项式，所得的商就是另一个因式；再把多项式写成这两个因式的积．这种分解因式的方法叫做提取公因式法。

例 2 下列因式分解不符合提取公因式法：

（1）$a^2b+ab-b^2=ab(a+1-b)$；

（2）$5a(x-y)^3-10b(y-x)^3$

$=5(x-y)^3(a-2b)$；

（3）$x^my^n-x^{2m}y^{3n}$

$=x^my^n(1-x^2y^3)$；

（4）$17a^2b-51ab^2$

$=ab(17a-51b)$；

（5）$m(x-y)(y-z)-n(z-y)(y-x)$

$=(x-y)(y-z)(m+n)$。

（2）应用公式法：把乘法公式反过来，就可以把某些多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做公式法。

例如 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$。

例3 下列因式分解不符合公式法：

(1) $-x^2-y^2=-(x+y)(x-y)$；

(2) $4a^2-3b^2=(4a-3b)(4a+3b)$；

(3) $a^4-a^8=(a^2+a^4)(a^2-a^4)$；

(4) $x^2+2xy+\frac{y^2}{4}=(x+\frac{y}{2})^2$；

(5) $4a^2-12ab-9b^2=(2a-3b)^2$；

(6) $x^3-27=(x-3)(x^2-3x+9)$；

(7) ab^4+a^4b

$=ab(b^3+a^3)$

$=ab(b+a)(b^2+2ab+a^2)$

$=ab(b+a)^3$。

（3） 可化为$x^2+(a+b)x+ab$型的二次三项式的因式分解，即

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

例4 下列因式分解不符合上面的公式：

(1) $x^2+6x+7=(x+1)(x+7)$；

(2) $x^2y^2-5xy+6=(xy-6)(xy+1)$；

(3) $24y^2+14xy+x^2=(4y+x)(6y+x)$；

(4) $x^2-11xy+18y^2=(x+2y)(x+9y)$。

（4） 分组分解法：一个多项式（共$m+n$项）的各项没有公因式，也不能直接用公式来分解，但其中有m项有公因式P，有n项有公因式Q，此时，可把原多项式分成两组，分