等式证题术

DENG SHI
ZHENGTISHU

傅　樵
杨嵩山　编

黑龙江科学技术出版社

等 式 证 题 术

傅 樵 杨嵩山 编

黑龙江科学技术出版社

一九八三年·哈尔滨

内 容 简 介

本书结合中学现行数学教材全面系统地介绍了恒等式和条件恒等式的证明方法。书中选进了多量的例题和练习题，对一些较难的练习题加了必要的提示或略证，书末还附有证明三角恒等式、不等式和求三角函数的最大值、最小值100题详解。

本书可供中学生、自学青年使用，也可供中学数学教师参考。

责任编辑：张宪臣
封面设计：阎志刚

等 式 证 题 术
傅 樵 杨嵩山 编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江省教育厅印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张5 8/16·字数112千
1983年2月第一版 1983年2月第一次印刷
印数：1—27,200

书号：13217·040 定价：0.74元

目　　录

一、恒等式……………………………………………… (1)
1. 化简法………………………………………… (1)
2. 同一法………………………………………… (11)
3. 比较法………………………………………… (14)
4. 分析法………………………………………… (19)
5. 综合法………………………………………… (23)
练习题一……………………………………… (27)
二、条件恒等式……………………………………… (36)
1. 用可逆算法证明的方法……………………… (36)
练习题二……………………………………… (41)
2. 用代入法证明的方法………………………… (42)
练习题三……………………………………… (55)
3. 变换假定式的形式的证明方法……………… (59)
(1) 适当的移项，再两边平方或立方证明
的举例………………………………… (60)
(2) 分解因式证明的举例…………………… (62)
(3) 各边相减或移项而提取公因式证明的
举例…………………………………… (67)
(4) 化成平方和等于零的形式证明的
举例…………………………………… (75)
(5) 消去特殊字母证明的举例……………… (80)

（6）从字母轮换着眼证明的举例 ………… （86）
练习题四 ……………………………………… （89）
4．假定式是$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$形式的证明方法
……………………………………… （98）
（1）设$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=k$的证明的举例……… （98）
（2）应用$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\frac{pA+qC+rE}{pB+qD+rF}$的证明的举例 ……………………………… （106）
练习题五 ……………………………………… （112）
附录　证明三角恒等式、不等式和求三角函数的最大值、最小值100题详解 …………………… （118）

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

一、恒　等　式

在含有未知数的等式中，不论未知数的值如何，经常成立的等式叫做恒等式．例如：$(x+1)^2=x^2+2x+1$。

证明恒等式的方法，一般有五种：化简法、同一法、比较法、分析法和综合法．

1．化　简　法

等式的两边，其繁简情况不同，可以将等式较复杂的一边变换成较简单的另一边，这种方法叫做化简法．它是证明恒等式的最基本的方法．

等式两边的繁简程度是从两边相互比较来判断的，因而也是相对的．例如：

（1）等式两边分别为多项式与单项式时，多项式较复杂（如例1）；

（2）等式两边分别为多项式时，项数多的较复杂（如例2，例3）；

（3）等式两边分别为项数相同的多项式时，幂指数相同的项，其底数分别为多项式与单项式，显然底数为多项式的较复杂（如例6）；

（4）等式两边分别为分式与整式时，显然分式较复杂（如例7）；

（5）等式两边分别为分式时，其分母分子幂次高的较复杂（如例8）；

（6）等式两边分别为繁分式与一般分式时，繁分式较复杂（如例9）；

（7）等式两边分别是分式与分式加减运算时，含有加减运算的一边较复杂（如例10～例13）。

例 1 求证：$4a^2+3b^2+2ab-4a^2-2b^2-b^2$

$$=2ab.$$

证 左边$=(4-4)a^2+(3-2-1)b^2+2ab$

$$=2ab.$$

∴ 左边＝右边，故原等式成立。

例 2 求证：$3a-(2a-4b-6c)+3(-2c+2b)$

$$=a+10b.$$

证 左边$=3a-(2a-4b-6c)+(-6c+6b)$

$$=3a-2a+4b+6c-6c+6b$$

$$=a+10b.$$

∴ 左边＝右边，故原等式成立。

例 3 已知 $x+y+z=P$，$xy+yz+zx=Q$，$xyz=R$，$A=x(nyz+Q)-k^2(mx+p)$，$B=y(nzx+Q)-k^2(my+p)$，$C=z(nxy+Q)-k^2(mz+p)$，$D=pQ-mnR$。求证下列等式：

（1）$(mz+p)B-(my+p)C=(y-z)D$；

（2）$(mx+p)C-(mz+p)A=(z-x)D$；

（3）$(my+p)A-(mx+p)B=(x-y)D$；

（4）$A(y-z)+B(z-x)+C(x-y)=0$。

证　(1)

$\because$　$(mz+p)B=(mz+p)\{nR+yQ-k^2(my+p)\}$

$(my+p)C=(my+p)\{nR+zQ-k^2(mz+p)\}$

$\therefore$　$(mz+p)B-(my+p)C=mnR(z-y)+pQ(y-z)$

$=(y-z)(pQ-mnR)$

$=(y-z)D$

即　$$(mz+p)B-(my+p)C=(y-z)D \quad ①$$

同样可证　$$(mx+p)C-(mz+p)A=(z-x)D \quad ②$$

$$(my+p)A-(mx+p)B=(x-y)D \quad ③$$

由①+②+③，得

$$A(y-z)+B(z-x)+C(x-y)=0.$$

故原等式（1）、（2）、（3）、（4）都成立。

例 4　求证：$(x^3+6x^2y+3xy^2-y^3)^3$

$+(y^3+6xy^2+3x^2y-x^3)^3$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3$

证　左边$=\{3xy(2x+y)+(x^3-y^3)\}^3$

$+\{3xy(x+2y)-(x^3-y^3)\}^3$

令　$x^3-y^3=A$，$3xy(2x+y)=B$，$3xy(x+2y)=C$，则

$B+C=9xy(x+y)$，$B-C=3xy(x-y)$，

$BC=9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2)$

于是

左边$=(B+A)^3+(C-A)^3$

$=B^3+C^3+3A(B^2-C^2)+3A^2(B+C)$

$$=(B+C)\{B^2+C^2-BC+3A(B-C)+3A^2\}$$

$$=(B+C)\{(B-C)^2+BC+3A(B-C)+3A^2\}$$

将以上所给的条件代入此式，则得

$$=9xy(x+y)\{9x^2y^2(x-y)^2+9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2)+9Axy(x-y)+3A^2\}$$

$$=9xy(x+y)\{27x^2y^2(x^2+xy+y^2)+9(x^3-y^3)xy(x-y)+3(x^3-y^3)^2\}$$

$$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{9x^2y^2+3(x-y)^2xy+(x^3-y^3)(x-y)\}$$

$$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{3xy(x^2+xy+y^2)+(x^3-y^3)(x-y)\}$$

$$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2\{3xy-(x-y)^2\}$$

$$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3$$

∴　左边＝右边，故原等式成立。

例 5　求证：$(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)-(al+bm+cn)^2=(am-bl)^2+(bn-cm)^2+(cl-an)^2$

证　此等式从表面看，左边为两项，右边为三项．但展开时，左边为15项，右边为9项，所以应从左边变换成右边。

$$\text{左边}=a^2l^2+b^2l^2+c^2l^2+a^2m^2+b^2m^2+c^2m^2+a^2n^2+b^2n^2+c^2n^2-(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2+2ablm+2bemn+2caln)$$

$$=b^2l^2+c^2l^2+a^2m^2+c^2m^2+a^2n^2+b^2n^2-(2ablm+2bcmn+2caln)$$

$$=(a^2m^2-2ablm+b^2l^2)+(c^2l^2-2caln+a^2n^2)+(b^2n^2-2bcmn+c^2m^2)$$

$$=(am-bl)^2+(cl-an)^2+(bn-cm)^2$$

∴ 左边＝右边，故原等式成立。

例 6 求证：$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$。

证 利用 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}，$$

把原式左边变形，再从左边推出右边。

$$左边=\frac{1}{2}(\overline{b+c}+\overline{c+a}+\overline{a+b})\{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\}$$

$$=2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

∴ 左边＝右边，故原等式成立。

例 7 求证：$\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}=xy+yz+zx$。

证 左边 $=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)}$

$$=xy+yz+zx$$

∴ 左边＝右边，故原等式成立。

例 8 求证：$\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3+4x^2-3x-18}=\dfrac{x-2}{x+3}$

证　左边$=\dfrac{(x-2)(x^2+x-6)}{(x+3)(x^2+x-6)}$

$$=\frac{x-2}{x+3}$$

∴　左边＝右边，故原等式成立。

例 9　求证：$\dfrac{\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2+\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2-2}{\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2-\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2}$

$$=\frac{2ax}{x^2+a^2}$$

证　左边$=\dfrac{\left(\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2}{\left(\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}\right)\left(\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}\right)}$

$$=\frac{\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}}{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x-a}{x+a}}$$

$$=\frac{(x+a)^2-(x-a)^2}{(x+a)^2+(x-a)^2}=\frac{4ax}{2(x^2+a^2)}$$

$$=\frac{2ax}{x^2+a^2}$$

∴　左边＝右边，故原等式成立。

例10　求证：$\dfrac{x^3-ax(x-1)-a^2}{x^2-a^2}-\dfrac{x^5-cx^3+bx^2-bc}{x^4+ax^3+bx+ab}$

$$=\frac{2x^2+a-c}{x+a}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

证 左边$=\dfrac{(x^3-ax^2)+(ax-a^2)}{x^2-a^2}$

$$+\frac{(x^5-cx^3)+(bx^2-bc)}{(x^4+ax^3)+(bx+ab)}$$

$$=\frac{x^2(x-a)+a(x-a)}{(x+a)(x-a)}+\frac{x^3(x^2-c)+b(x^2-c)}{x^3(x+a)+b(x+a)}$$

$$=\frac{(x-a)(x^2+a)}{(x+a)(x-a)}+\frac{(x^2-c)(x^3+b)}{(x+a)(x^3+b)}$$

$$=\frac{x^2+a}{x+a}+\frac{x^2-c}{x+a}=\frac{2x^2+a-c}{x+a}$$

∴ 左边=右边，故原等式成立。

例11 求证：$\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}-\dfrac{x^2-1}{x^3+x-2}=\dfrac{1}{x^2+x+2}$

证 ∵ $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$

$$2x^3+x^2+3x-2=(2x^3+2x^2+4x)-(x^2+x+2)$$
$$=(x^2+x+2)(2x-1)$$

∴ 左边$=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(2x-1)(x^2+x+2)}-\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+2)}$

$$=\frac{1}{x^2+x+2}$$

∴ 左边=右边，故原等式成立。

例12 求证：$\dfrac{5x-8}{x-2}-\dfrac{4x-8}{x-3}=\dfrac{2x-8}{x-5}+\dfrac{x-3}{x-7}$

$$=\frac{10x^2-52x+34}{(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)}$$

证 先把左边的各分式化成 $a+\dfrac{c}{x+b}$ 形式．再把两个

分式合成一个分式，使其分子不含有 x．

$$左边=\left(\frac{5x-8}{x-2}-5\right)-\left(\frac{4x-8}{x-3}-4\right)-\left(\frac{2x-8}{x-5}-2\right)+\left(\frac{x-3}{x-7}-1\right)$$

$$=\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-3}-\frac{2}{x-5}+\frac{4}{x-7}$$

$$=2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-5}\right)+4\left(\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-3}\right)$$

$$=\frac{-6}{(x-2)(x-5)}+\frac{16}{(x-7)(x-3)}$$

$$=\frac{16(x^2-7x+10)-6(x^2-10x+21)}{(x-2)(x-5)(x-7)(x-3)}$$

$$=\frac{10x^2-52x+34}{(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)}$$

$\therefore$ 左边=右边，故原等式成立．

例13 求证：

$$\frac{a^2}{(x-a)(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(x-b)(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(x-c)(c-a)(c-b)}=\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

证 $\because$ $b-a=-(a-b)$，$c-b=-(b-c)$，

$a-c=-(c-a)$

所以，原等式左边各分式的分母的最低公倍式是

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(b-c)(c-a)．$$

以此为公分母进行通分后，再计算分子．

$$左边=\frac{-a^2(x-b)(x-c)(b-c)-b^2(x-a)(x-c)(c-a)-c^2(x-a)(x-b)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$\begin{aligned}分子=&-a^2(b-c)\{x^2-(b+c)x+bc\}\\&-b^2(c-a)\{x^2-(c+a)x+ca\}\\&-c^2(a-b)\{x^2-(a+b)x+ab\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2的系数&=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x 的系数=&\{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)\\&+c^2(a^2-b^2)\}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}常数项=&-\{a^2bc(b-c)+b^2ca(c-a)\\&+c^2ab(a-b)\}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 左边&=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(b-c)(c-a)}\\&=\frac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}\end{aligned}$$

$\therefore$ 左边=右边，故原等式成立.

注意 化简法的适用范围不是绝对的，有的问题，有时为了变换方便，则需要将较简单的一边变换成较复杂的另一边. 如下面的例14、例15，可将右边的积看成一项进行变形，再从右边推出左边.

例14 求证：
$$\begin{aligned}&a^3(b-c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\\&\quad+abc(a+b+c)\\&=(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

证
$$\begin{aligned}右边&=\{a^2+(b^2+c^2)\}\{a(b+c)+bc\}\\&=a^3(b+c)+bc(b^2+c^2)\end{aligned}$$

$$+a(b+c)(b^2+c^2)+a^2bc$$
$$=a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$$
$$+abc(a+b+c)$$

∴ 左边＝右边，故原等式成立。

例15 求证：$(a+b+c+d)^3-4(a+b+c+d)(bc$

$$+ad+ca+bd+ab+cd)$$
$$+8(bcd+cda+dab+abc)$$
$$=-(b+c-a-d)(c+a-b-$$
$$-d)(a+b-c-d)$$

证 利用 $(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)$

$$+(a+b)(b+c)$$
$$=(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$$
$$+2(bc+ca+ab)$$

$$(b+c)(c+a)(a+b)=a^2(b+c)+b^2(c+a)$$
$$+c^2(a+b)+2abc$$

把原式右边变形，再从右边推出左边。

右边$=(\overline{a+b+c+d}-2\cdot\overline{b+c})(\overline{a+b+c+d}$

$$-2\cdot\overline{c+a})(\overline{a+b+c+d}-2\cdot\overline{a+b})$$
$$=(a+b+c+d)^3-4(a+b+c)(a+b+c+d)^2$$
$$+\{(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)$$
$$+(a+b)(b+c)\}(a+b+c+d)$$
$$-8(b+c)(c+a)(a+b)$$
$$=(a+b+c+d)^3-4(a+b+c+d)\{(a$$
$$+b+c)(a+b+c+d)-(a^2+b^2+c^2+bc$$
$$+ca+ab)\}+8\{(bc+ca+ab)(a+b+c+d)$$

$$-(b+c)(c+a)(a+b)\}$$

$$=(a+b+c+d)^3-4(a+b+c+d)(bc+ad$$

$$+ca+bd+ab+cd)+8(bcd+cda+dab+abc)$$

∴ 左边=右边，故原等式成立。

2. 同 一 法

把等式的两边，分别变换成同一式子，这种证明等式的方法叫做同一法。

运用同一法证明的等式，其类型的特点，是等式的两边繁简程度相同（如下面例 1 、 2 、 3 的两边分别有三、四、五项），或者等式两边繁简程度基本相同，即等式一边虽然较简单，但却有必要变换等式两边进行证明（如例 5 ），或者等式两边的类型相同（如例 4 ）．当然，这类题也可用化简法来证明。

例 1 求证：$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$

$$=2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)$$

$$+2(z-x)(z-y)$$

证 左边$=(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)$

$$+(z^2-2zx+x^2)$$

$$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

右边$=2\{x^2-xy-xz+yz)+(y^2-yz-xy+xz)$

$$+(z^2-xz-yz+xy)\}$$

$$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$$

∴ 左边=右边，故原等式成立。

例 2 求证：$(a+b)^3+3c(a+b)^2+3c^2(a+b)+c^3$

$$=(b+c)^3+3a(b+c)^2+3a^2(b+c)+a^3$$

证 左边$=\{(a+b)+c\}^3=(a+b+c)^3$

右边$=\{(b+c)+a\}^3=(a+b+c)^3$

$\therefore$ 左边$=$右边，故原等式成立。

例 3 求证：$a^4(x-b)^4-4a^3b(x-a)(x-b)^3$

$$+6a^2b^2(x-a)^2(x-b)^2$$

$$-4ab^3(x-a)^3(x-b)+b^4(x-a)^4$$

$$=(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)x^4$$

证 $\because$ $(x-y)^4=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$

$\therefore$ 左边$=\{a(x-b)-b(x-a)\}^4$

$$=(ax-bx)^4=(a-b)^4x^4$$

右边$=(a-b)^4x^4$

$\therefore$ 左边$=$右边，故原等式成立。

例 4 已知 $x=(a^2+3b^2)^2-a+3b$，

$$y=-(a^2+3b^2)^2+a+3b,$$

$$z=(a^2+3b^2)(a+3b)-1,$$

$$u=-(a^2+3b^2)(a-3b)+1$$

求证 $x^3+y^3=z^3+u^3$。

证 $\because$ $x=3b+\{(a^2+3b^2)^2-a\}$，

$$y=3b-\{(a^2+3b^2)^2-a\}$$

$$z=3b(a^2+3b^2)+\{a(a^2+3b^2)-1\}$$

$$u=3b(a^2+3b^2)-\{a(a^2+3b^2)-1\}$$

$$A^3+B^3=(A+B)\{(A-B)^2+AB\}$$

$\therefore$ $x^3+y^3=6b[4\{(a^2+3b^2)^2-a\}^2$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com