初中

数学教材难点讲析

陕西人民教育出版社

初中数学教材难点讲析

安兆甲　编

陕西人民教育出版社

初中数学教材难点讲析
安兆甲　编
陕西人民教育出版社出版
（西安长安南路吴家坟）
陕西省新华书店发行　西安小寨印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32开本　6印张　130千字
1987年3月第1版　1988年4月第2次印刷
印数：25,001—51,500
ISBN7—5419—0028—1/G·24
定价：1.30元

前　言

目前，中学数学“双基”的教学问题，已有许多成型的材料可供参考。关于中学数学教材难点的研究，在一些数学杂志上也有不少专题性的文章。但这些材料总要进行认真地选择，并加以取舍才能运用于教学，而这一工作往往是十分艰难的。能不能写一本关于分析及处理教材难点的读物，以便直接服务于教学，特别是对于初参加教学工作的青年教师，起到一点促进作用，为提高数学教学质量打点基础。这就是我要编写这本小册子的想法。

我认为一个有志于人民的教育事业的教师，如果没有“三个三年的循环周期”（就是三个三年的教学实践）是不大可能搞好数学教学工作的。第一个三年，要细心地写好教案，教后写“后记”；第二个三年，先写教学提纲，教后写教案；第三个三年就是编写教学讲义。这本小册子就是在我的“教学讲义”的基础上，并重新翻阅了有关资料编写而成的。

这本小册子，包括三部分内容：

一、关于数学概念的教材难点处理；

二、关于定理、公式、法则的教材难点处理；

三、关于数学方法的教材难点处理。

在这本小册子里，直接或间接地引用了他人的某些研究成果，书中难以一一注明，编者深感抱歉。这本小册子编出

之后，陕西省教育科学研究所的霍振化、王勇同志对本书稿作了多处修改、补充，史志云、田增伦同志审阅并提出了宝贵意见，林光歆同志为本书绘制了全部插图，在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者的水平有限，错漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

1986.5.

初等数学研究的是在静止状态下的常量(或常量)数学，然而有的数学概念过于抽象，本质属性比较隐蔽，有的定理、公式的内在结构复杂，有的问题要用新的数学方法去解决等等，这些内容都成了数学教学中的难点。

鉴于上述问题，我们有必要专门研究一下教材难点的处理问题。怎样处理教材难点？总的来说，应该是化难为易、化繁为简。要达到此目的，这就要求教者真正地“吃透教材”，掌握知识的精髓和来龙去脉；还要“吃透学生”，了解学生的知识基础和接受能力。这样，才能较好地处理好教材难点，在教学上收到事半功倍的效果。

实践证明，要是教材处理得得当，教学方法也就会运用得越灵活，因而也就会不断地提高教学质量。

下面我们分三部分介绍对教材难点的分析及问题的处理。

目　　录

一、关于数学概念的教材难点处理

中学数学知识所包括的概念是十分广泛的，但总的来说，不外乎数、式、形三方面的概念。在教学难点数学概念的时候，着重要解决以下几个问题：①由于数学概念是现实世界数量关系和空间形式及其本质属性在人们头脑里的反映，因此，首先要注意概念的产生和形成过程。②要理解和掌握概念，必须正确地认识概念的定义方式以及概念之间的内在联系。③定义表明了概念的内涵，分类表明了概念的外延，只有弄清楚概念的内涵和外延，才能准确地运用概念。

现就数、式、形三方面概念的教材难点处理分述如下。

（一）有关“数”的概念

1. 有理数概念

〔难点分析〕引入负数，建立有理数集，还有用字母表示数，建立代数式概念，是代数课开始阶段的两大任务，只有较好地完成这两大任务，才能为以后的学习奠定良好的基础。

初中代数中的《有理数》，是整个代数的基础，特别是有理数的运算，更是初等数学的基本运算。因此，学好《有理数》这一章是十分重要的。

有理数概念，是由数系的扩充而提出来的，而数系的扩

充，虽然对初中学生来说并不是第一次，但由于学生的年龄特征和认识水平所限，要从具有相反意义的量引入负数，建立有理数集，是有不少疑问和困难的。首先是对引入负数的必要性认识不足；其次是用算术数的性质不能解释有理数的性质，感到迷惑不解

在教学中，怎样处理好这一部分教材，既不违背科学性，又便于学生所接受，就成了一个值得研究的问题。

〔教材处理〕

（1）引入和形成概念

怎样引入负数建立有理数概念？可从现实生活中存在的相反意义的量来引入——把一种意义的量规定为正的，另一种与它相反意义的量规定为负的；或者由事物的内部矛盾性而引入——在正数的运算中，由于不够减而产生了负数。

数系的扩充，数的概念的发展，是由于数学本身的发展和生产实际的需要，数是客观存在的反映；同时，学生比较熟悉自然数、零和分数的概念，因而我们由复习旧知识而提出新矛盾：仅仅用算术数就不能清楚地区分现实生活中存在着的大量具有相反意义的量，这就需要引入一种新数——负数。

具体地说，可以把教材作如下处理：

①我们知道，数起源于数（shǔ），如人们为了统计人数、生产工具的件数、…就要数数，于是产生了自然数 1，2，3，…；“零”作为数则是经历了相当长的时间的，“零”不仅表示“没有”，也表示“有”，如0℃并不是“没有温度”；分数起源于分“1”，一个果实分给许多人，这就出现了分数。

那么有了自然数、零和分数，是不是已经没有矛盾了呢？是不是完全能够适应实践的需要呢？不是的。现实世界中许多相反意义的量，只用这些数还不能有区别地精确地表示出来；同时，就运算本身来说，也还存在着不少矛盾，就连加法运算的逆运算——也并不是总能施行。因此，需要引入新数，扩充数集。

②算术数只是单纯地表示一种"有"，是肯定的还是否定的，并没有具体规定，这正如说：

"某人在东西方向的直路上从一车站出发走了10里。"是向东还是向西走了10里，没有明确。

"某粮库用汽车拉运粮食15吨。"是运进还是运出15吨，没有明确。

在这里，从某一点向东、向西计算的路程，运进、运出都是具有相反意义的量。相反意义的量是客观存在，这类量的例子还有许多。例如，

收入和支出；

盈余和亏损；

增产和减产；

积累和负债；

……………

分别表示上述概念的量，都是具有相反意义的。

我们容易看出，这种量不仅要由数值，而且还需方向才能表示出来。

为了区别这些具有相反意义的量，实践需要我们把数的概念加以扩充，使扩充了的数不仅能把量的值标记出来，而且要把量的相反意义也同时表示出来。我们知道，加法和减

法是具有相反意义的，因此，“+”和“-”也具有相反意义，那么用“+”和“-”号写在数的前面来表示相反意义的量，是非常自然的了。例如，向东走10里、运进15吨，可分别记为+10里、+15吨，而把向西走10里、运出15吨，可分别记为-10里、-15吨。象+10、+15这种带有“+”（读作“正”）号的数叫做正数；象-10、-15这种带有“-”（读作“负”）号的数叫做负数。

这样，我们学习过的数就有：

$$\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}$$

$$\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}$$

我们把整数和分数统称为有理数，即

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数—正整数、零、负整数}\\ \text{分数—正分数、负分数}\end{cases}$$

（2）理解和掌握概念

理解和掌握概念，就是要获得对概念的内涵（即对象“质”的特征）和外延（即对象“量”的范围）的统一认识，并要求人们根据概念的本质属性去区别有关概念，认识概念之间的联系。

怎样理解有理数概念呢？

①我们从具有相反意义的量出发，引入负数建立了有理数集。这是在实践活动的基础上，并经过抽象概括而产生和形成概念的，学生在认识上比较习惯这种方法。但接受负数概念，并不那么容易，因为人们可以承认“收支”“盈亏”“上

下”等确实具有相反意义，然而这只是对数量的附加说明，而不是数量本身的性质，所以负数的引入实际上是由于代数运算的需要，由于事物的内部矛盾性——“不够减”产生了负数。事实上，在做减法运算时，被减数是肯定的方面，减数是否定的方面，运算结果取决于运算的双方，当被减数大于减数时，肯定是矛盾的主要方面，结果产生了肯定的“有”，得到正数；当被减数小于减数时，否定是矛盾的主要方面，结果产生了否定的“有”，得到负数；当被减数和减数相等时，矛盾的双方势均力敌，结果是两败俱伤，得到既不是正，又不是负的唯一真正的中性数——零。

因为有理数不仅表示了量的值，而且还表示了量的对立关系，所以有理数的主要性质，是数值和符号。这就是有理数和算术数的根本差别所在。但不难看出，算术数又是有理数的一部分，它们又有着密切的联系。因此，我们又把有理数定义为：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正整数（自然数）}\\ \text{正分数}\end{array}\right\}\text{算术数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

②定义概念，一般有三种方式：

1°种概念加类差的定义方式（即揭示内涵的定义方式）；

2°发生定义方式；

3°揭示外延的定义方式。

有理数概念的定义就是用第3°种定义方式给出的，即列举此概念的外延，用外延小的概念定义外延大的概念。这个定义的优点是层次分明，一目了然，我们不难引导学生从表

中分析出：正整数和自然数，分数和小数，它们有相同的外延，是等价的；整数、分数和有理数是后者的外延包括了前者的外延，是从属的；而整数和分数，它们是同一概念的类概念，它们的外延是完全不同的，所以它们是并列的。当然在不同的领域还可以指出有以下几种关系的概念。

同一关系：如等腰三角形顶角的平分线也是底边上的中线和高——同是一条线，内涵不同，外延却完全相同。

交叉关系：如等腰三角形与直角三角形——它们的内涵不同，而外延有一部分是相同的。

对立关系：如等边三角形与不等边三角形——内涵有部分是对立的，外延是互相排斥的。

矛盾关系：如直角三角形与非直角三角形——内涵互相否定。

注意：对立关系概念有时还有中间概念，如等边三角形与不等边三角形两个对立概念的中间概念是等腰三角形；而矛盾概念则没有中间概念。因此，对两个矛盾概念来说，是有“非此即彼”的推理规律。

实践证明，在教学过程中，掌握概念间的从属关系，是帮助学生深刻理解概念的重要手段。

③有理数的表格定义也有缺点，它把整数和分数对立起来，因而看不出有理数的各组成部分的共性，所以对有理数的定义还可以作如下理解：由于正整数、零、负整数都可以写成分数的形式，可见有理数可以理解成所有的分数；而分数又可以写成有限小数或无限循环小数（其实有限小数可以写成以0循环的小数），因而有理数还可以理解成所有的循环小数。

(3) 运用概念

运用概念解决有关问题，实际上是属于数学能力的范畴，它与概念本身不同，但二者之间密切的联系着，理解得深透，才能用得灵活。在概念的运用中，要注意挖掘教材的潜力，以灵活二字出发作文章。

有理数概念的运用，首先应让学生说出哪些量具有相反意义？负数有什么性质？并能正确地回答正数集和负数集各包括哪些我们学习过的数？其次是关于有理数的分类及概念之间的逻辑关系等。如前所述：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数——正整数、正分数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数——负整数、负分数}\end{cases}$$

这种定义有什么优缺点？正有理数和负有理数有何关系？零有何特性？

这样，既可使学生加深对数学理论知识的理解，又可以培养他们阅读和自觉钻研的精神，对学生学习数学是有特别意义的。

至于进一步灵活运用有理数概念的问题，还要在学习了“相反数”和“数轴”、“绝对值”等概念之后，无需增加过难的练习而加重学生的负担。

〔注意事项〕

(1) 在数的概念教学中，我们从具有相反意义的量，引入负数，建立了有理数集，这是初中学生由算术过渡到代数的转折点。有理数概念，是重要的基础知识，有呈上启下的作用，因为我们还将由有理数的性质——稠密而不连续，引入无理数，建立实数集，进而还要由方程$x^2+1=0$无实

根而引入虚数，建立复数集。至此，数系扩充的全过程就算完结。

（2）我们在〔教材处理〕中，分成（1）引入和形成概念；（2）理解和掌握概念；（3）运用概念。这主要是为了行文的方便，在教学过程中，应该互相连接，互相渗透，灵活运用，不要把生动的辩证过程弄僵化了。特别是“理解和掌握概念”中所涉及到的知识，应该根据量力性原则，适当地介绍给学生；有的则是供老师参考的，根本无需教给学生。

（3）关于“集合”概念，这是学生初次遇到的不加定义的元名，为了学生容易理解，可给出描述性定义：具有一定共同特征的同一类事物的全体，叫做集合。

在教学中，主要是多举一些实例，让学生对集合的意义有个初步的认识。例如，对空集概念，可以举例说：“昨天没有上代数课的同学，今天晚自习在小教室补课。但是，晚自习下了，还没有一个同学来补课。我们说，没有上代数课的同学构成的集合就是空集。即没有元素的集合叫做空集。”显然，空集ϕ或$\{\quad\}$与$\{0\}$是根本不同的。

此外，要让学生熟悉集合的两种表示法：列举法、描述法。这在以后的学习中是经常用到的。

2. 有理数（或实数）的绝对值概念

〔难点分析〕 我们知道，正数和负数是现实世界具有相反意义的量在数学上的反映，它们是数学中的一对矛盾，是对立统一的关系。为了有区别地表示具有相反意义的量，又要引入绝对值概念。相反数和绝对值是两个重要的概念，在初中要遇到两次——有理数、实数的相反数和绝对值；在高中还

要学习复数的相反数和绝对值。

在绝对值概念的教学中，主要是绝对值的概念及其表示法，学生感到难懂。由于学生概念不清，对符号 $|a|$ 以及

$$|a| = \begin{cases} a & （当a>0时） \\ 0 & （当a=0时） \\ -a & （当a<0时） \end{cases}$$

这种表示形式的意义和必要性并不真正理解，结果造成“链锁”反应，恶性循环。学生常“以偏代全”，把绝对值符号内的数不加思索的直接得出结果。再是不明白下列各式变形的最后一步式子中为什么要画两条竖线。

$$\sqrt{x^2} = |x|；$$
$$\sqrt{\log_a^2 b} = |\log_a b|；$$
$$\sqrt{1-2a+a^2} = \sqrt{(1-a)^2} = |1-a|；$$
$$\sqrt{(\sin A-\cos A)^2} = |\sin A-\cos A|。$$

特别是学生遇到化简、计算含有若干个绝对值的式子时，为什么要分区间讨论，在各个区间内各个绝对值如何取值，学生更感到模糊，因而对解答下列诸题，便束手无策了。如，

（i）解方程：$2x-|x|=3$。

（ii）求函数$y=3x+\sqrt{|2x-1|}$的定义域。

（iii）试画出函数$y=|x^2-1|$的图象。

（iv）解不等式：$|x-a|<a$（$a>0$）。

在教学过程中，有的老师怕麻烦不讲绝对值表示式，理由是课本上没有，无需增加学生的负担，殊不知因噎废食，