

高等学校数学参考書



高等数学

GAODENG SHUXUE

(基础部分)

天津大学等 27 所高等工业学校集体编写

人民教育出版社



本书是由天津大学等二十七所高等工业院校集体编写的。它是适应教学改革后新形势的产物，是各校教师力求在高等工业学校的数学教学上插毛澤东思想紅旗貫徹多快好省精神的初步集中表现。本书的主要特点是：1)在学习毛澤东思想的基础上，力求贯彻辩证唯物主义精神和理論联系实际的原则；2)絕大部分內容都是从实例出发并着眼于解决实际问题；3)略去一些繁琐的証明，不过分强调分析的推証，以求达到适当减少学时、适当提高水平的要求；4)在有些章后面附有大型作业，可以培养学生解决实际问题的能力。

本书基础部分单独出版，此外尚将继续出版无綫电类型的、化工类型的和水土类型的三种专业部分。基础部分的内容包括 矢量代数，函数及其图形，微积分学初步，数值計算及場論等。

本书可作高等工业学校高等数学教材，也可作为自学或同等程度学生的参考用书。

本书基础部分是由清华大学主編的。

高等数学

(基础部分)

天津大学等 27 所高等工业学校集体编写

人民教育出版社出版

高等工业学校教学用书編輯部
北京宣武門內大街 27 号

北京市书刊出版业营业登记证出字第 2 号

新华印刷厂印刷 新华书店发行

统一书号 13010 868 开本 850×1168 1/32 印张 16 6/16

字数 243 000 印数 18,001—230 000 定价 (6) 洋 1.50 元

1960 年 8 月第 1 版 1961 年 3 月北京第 7 次印刷

目 录

第一章 绪论	1
§ 0.1. 数学研究的对象及其特点(1)	§ 0.2. 数学发展的简单历史(3)
§ 0.3. 数学的发展和生产实践的关系(7)	§ 0.4. 贯彻党的教育方针,反对资产阶级路线(9)
§ 0.5. 结束语(11)	
第二章 矢量代数	12
§ 1.1. 矢量的概念(12)	§ 1.2. 空间直角坐标(17)
§ 1.3. 矢量的投影表达式(18)	§ 1.4. 矢量的数量积(23)
§ 1.5. 矢量的矢量积(26)	§ 1.6. 混合积与二重矢量积(31)
习题(32)	
第三章 函数与图形	35
§ 2.1. 函数概念(35)	§ 2.2. 函数与图形(45)
§ 2.3. 曲线的参数方程与极坐标方程(60)	§ 2.4. 图算法(71)
习题(76)	
第四章 极限	83
§ 3.1. 极限概念(83)	§ 3.2. 无穷小量与无穷大量(88)
§ 3.3. 两个重要的极限(91)	§ 3.4. 无穷小量的阶(97)
§ 3.5. 连续性概念、间断点(99)	§ 3.6. 二元函数的极限和连续性(104)
习题(105)	
第五章 导数与微分	107
§ 4.1. 导数概念(107)	§ 4.2. 初等函数的导数(112)
§ 4.3. 变化率问题举例(122)	§ 4.4. 中值定理(127)
§ 4.5. 多元函数复合函数的导数法则(129)	§ 4.6. 高阶导数(131)
§ 4.7. 双曲函数及其导数(135)	§ 4.8. 图象求导数法(137)
§ 4.9. 单变量函数的微分(139)	§ 4.10. 微分(145)
§ 4.11. 矢量导数(151)	§ 4.12. 矢量导数在几何上的应用(155)
习题(159)	
第六章 不定积分与微分方程初步	167
§ 5.1. 微分方程问题的提出及其基本概念(167)	§ 5.2. 不定积分(172)
§ 5.3. 一阶微分方程(188)	§ 5.4. 几种最简单的高阶微分方程(198)
§ 5.5. 结束语(205)	习题(207)
第七章 导数的应用	221
§ 6.1. 函数的增减性(224)	§ 6.2. 函数的极值及其应用(225)
§ 6.3. 函数的凹凸性及曲率(241)	§ 6.4. 罗彼塔法则(248)
习题(250)	

第七章 积分及其应用	253
§ 7.1. 积分概念(254)	§ 7.2 积分的基本性质(254)
§ 7.3. 积分的 计算及其应用(270)	§ 7.4. 积分的计算及其应用(續)(293)
§ 7.5. 广 义积分(302)	习题(312)
第八章 级数	320
§ 8.1. 台劳公式·台劳级数(320)	§ 8.2 幂级数(327)
§ 8.3. p 级数·交 错级数(331)	§ 8.4 函数的幂级数展开及其应用(333)
§ 8.5 富氏级 数(338)	§ 8.6 开 $\sqrt{x}$ (348)
§ 8.7. 实用计量分析法(349)	习题(354)
第九章 线性微分方程及微分方程组	358
§ 9.1. 线性振动的微分方程(358)	§ 9.2 二阶常系数齐次线性微分方程 (363)
§ 9.3 拉普拉斯变换及二阶常系数非齐次线性方程的解法(368)	
§ 9.4. 常系数线性微分方程解的讨论(377)	§ 9.5. 变系数线性方程(384)
§ 9.6. 微分方程的级数解(386)	§ 9.7. 微分方程组(391)
	习题(399)
第十章 数值计算	406
§ 10.1. 误差理论的基本知识(406)	§ 10.2. 代数方程及超越方程(413)
§ 10.3. 插值法(433)	§ 10.4. 微分方程的数值解(451)
	习题(467)
第十一章 场论	470
§ 11.1. 数量场和向量场的概念(470)	§ 11.2. 数量场的梯度(472)
§ 11.3. 线积分与面积分(476)	§ 11.4. 向量场的散度(486)
§ 11.5. 向量场的旋度(490)	§ 11.6 线、面积分与重积分之间的关系(495)
§ 11.7 热传导方程和连续性方程(502)	§ 11.8. 倒三角算符及有关公式的 应用(503)
§ 11.9. 梯度、散度、旋度在柱、球坐标下的表达式(510)	习 题(515)

緒 論

在开始学习高等数学的时候,就应当对它的发展过程、研究的对象及其各方面的应用等问题有个概括的正确了解,这对今后明确学习的目的和方法是有好处的,緒論也就是要帮助讀者了解它。

§ 0.1. 数学研究的对象及其特点

中学的一些数学课程如代数、几何、三角等所研究的对象不外是空间形状和数量关系,代数是专门研究数量关系,几何是研究空间形状,三角则两者兼有。整个数学,包括即将学习的高等数学也仍然以这两者作为研究对象,因此,恩格斯曾经给数学下过一个简单明了的定义:“纯数学是以现实世界的空间的形式和数量的关系——这是非常现实的资料——为对象的。”^①

过去所学的一些数学课程(如三角、代数、几何)——所谓初等数学——是以研究常量为主体(除极限外)的,如研究图形的面积、长度或方程的解等,即研究静止状态。而高等数学(包括解析几何、微分、积分、微分方程等部分)则用来研究物体运动的方位与轨迹,变速运动的瞬时速度,变力所作的功等包含变化过程的实际问题,这里我们遇到的量是可以变化其数值的,于是就不能简单地沿用过去的知识。例如在研究不变的力 f (大小、方向均不变) 作用于一物体经过位移 s , 所作的功 W 为 $W = f \cdot s$, 但如果力 f 的大小在改变(为简单起见,假设方向不变), 则功 W 就不能用 $f \cdot s$ 得到,而必须另行设法。高等数学就是这样发生和发展的,它研究的是这类问题,即变量(可变的量)以及变量之间的关系。

^① 恩格斯:“反杜林论”,人民出版社1957年版,37页。

系。因此，在研究方法上和初等数学有所不同。初等数学还可以勉强用静止的观点去研究；而高等数学則必須有运动的观点，整个微分学和积分学就是建立在包含着运动观念的极限的基础上的。

事实上，现实世界的事物都是在运动着，彼此之間又有着各种各样的内在联系，只有用高等数学，才能帮助更深刻更全面地研究现实世界的规律。因此，由初等数学发展到高等数学是数学发展的一个飞跃。所以，恩格斯說：“变数是数学的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学。”^①“只有微分学才使自然科学上不仅能用数学来表明状态，并也表明过程，即运动。”^②“变数数学对常数数学的关系，一般說来是和辯証思維对形而上学思維的关系一样的。”^③

当然，研究变量过程中也往往固定在某一时刻把它看成常量，利用常量的一些知識来研究它，因此不能把初等数学和高等数学截然分开。

数学与物理学、化学、生物学等都是研究现实世界中客观规律的科学，但毕竟有着不同之处，数学着重在量的方面研究客观事物的规律，而其他科学却是着重在質的方面（例如物質的某一特定状态或某一特定运动形式）。但客观事物的質和量是有其内在联系的，无法彼此孤立来研究。例如，最初研究气体状态时，只是从質的方面发现气体受热会“产生力量”，但是，当要利用这种性質来制造蒸汽机乃至进一步作精确設計时，就需要从量的方面弄清气体的“温度”、“压强”与“体积”之間的关系；又如液体加热到一定程度将沸騰而汽化，引起了質的变化，因此研究事物的数量关系是了解事物本質所不可缺少的，但是从量的方面研究现实世界，只能帮助而不能代替从質的方面对现实世界进行研究。过去有些资产阶級唯心主义学者，散布过一种說法，說“数学是科学之母”，“有了数学可以推出物理学等其他自然科学”，这种說法完全是荒

① 恩格斯：“自然辯証法”，人民出版社 1959 年版，217 頁。

② 恩格斯：“自然辯証法”，人民出版社 1959 年版，229 頁。

③ 恩格斯：“反杜林論”，人民出版社 1957 年版，125 頁。

謬的。

数学研究的对象决定了它的两个基本特点，即高度抽象性和应用广泛性。数学的抽象性表现在它暂时撇开事物的具体内容而从抽象的量的方面去研究它，它不是以某种自然现象或社会现象作为直接研究对象。譬如两棵树加三棵树，两只羊加三只羊，我们是撇开树、羊去研究 $2+3$ 的数量运算。当然在现实世界中更复杂的数量关系还多得很，表现更高度的抽象。但这种抽象形式只是表面上掩盖了它的实际来源，其内容却是非常现实的。列宁曾经说过：“一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全反映着现实。”^① 数学的抽象和它的另一特点——应用广泛性是紧密相连的，某一个数量关系，往往代表一切具有这样数量关系的实际问题。例如一个力学系统的振动和一个电路的振荡常用同一微分方程来描述。撇开具体的物理现象中的意义来研究方程，所得的结果又可用于类似的物理现象中，这样，我们掌握了一种方法就能解决许多类似的问题。对于不同性质的现象具有相同的数学形式——即相同的数量关系，是反映了物质世界的统一性，因为量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或其特定的运动形式中，而是普遍存在于各种物质形态和各种运动形式中，所以，数学的应用是很广泛的。

正因为数学是来自现实世界，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实践，才表现出数学的预见性。在火箭、导弹发射之前，可通过精密的计算，预测它的飞行轨道及着陆地点，在海王星直接被观察到以前，就从天文计算上预测它的存在，由于同样的理由才使得数学成为工程技术中的重要工具。

§ 0.2. 数学发展的简单历史

初等数学发展比较早，在纪元前，由于农业（如土地丈量）和建筑等

① 引自列宁“黑格尔‘逻辑学’一书摘要”。

的需要,积累了相当丰富的关于图形的知識,后来发展成为几何学。三角学也由于当时测量、天文历算等需要得到相当的发展。代数则是由于商业交易的发展,逐渐有了負数、分数的概念,以至有了对简单代数方程的研究,到八——十三世紀才逐渐形成代数学的系統。总的說来,在紀元前,初等数学的发展比較迅速是因为当时正处于奴隶社会初期,生产和文化都有很大的发展,但此后长时期內社会生产力比較低,直到十六世紀,它的发展都比較緩慢。

十六世紀末叶到十七世紀是資本主义誕生时期,此时,由于生产和技术上需要的刺激,数学又重新有了蓬勃的发展。同时也因机械工业的誕生和成长,航海、造船、采矿等事业的迅速发展,引起了对几何学和力学方面的大量新問題(如运动的速度、曲綫的切綫、图形的面积等等)。在大量地逐个解决这些具体問題过程中,人們慢慢注意到这些問題的解决方法的共同点,因而形成了微分学和积分学。微积分的創造开辟了数学史的新紀元,从此二百年中数学上大量的重要部門如微分方程、变分法、积分方程、复变函数都相繼由于运动学、水力学等的需要在微积分等的基础上建立和发展起来。这些发展也使数学的另一些部門(如算术、几何等),由于新方法的引用得到新的进步。在这以前的全部数学史中,还没有过另一个时代能在这样短的时期里获得这样多的决定性的成就,这些成就当时从根本上改变了数学的面貌,并且极大地丰富了它的内容。

这个阶段数学的大发展也曾遭到了一些阻力,当时,微积分的概念是模糊不清的,这些弱点被一些人,特别是当时英国的宗教势力(由于牛頓的科学工作支持了唯物論,动摇了宗教观)利用来攻击微积分的理論基础。但当时微积分的蓬勃发展及其广泛有效的应用,鼓舞了大批数学家不顾这些攻击,热情于大胆的創造,而不去注意于理論基础的严密性。直到十八世紀,一方面在数学广泛发展与应用中更多地暴露出由于理論基础不穩固而产生的問題(如某些无穷級数的运算上产生了錯誤),

而且这时数学的各分支已变得内容丰富,头绪众多,也需要加以整理和系统化。另一方面,在这些数学分支上积累了相当多的具体知识和经验,也为巩固理论基础创设了客观条件,因此,十九世纪在数学分析的理论基础方面就展开了较多的研究工作,在这些成果的基础上进行了正确的但是更抽象的概括,隐藏在各种现象背后的更根本的量的关系被揭示出来了。到十九世纪末,严格的逻辑论证与公理化趋势也盛行起来了,十九世纪末与二十世纪初这种趋势更丰富了数学的各分支,也发现了许多数学分支之间的内在联系(如代数与几何的联系等),但因当时处在资本主义衰退时期,在哲学思想上是唯心主义的上升时期,直到十九世纪末叶,唯心主义已在资本主义世界占统治地位,因此,数学家的唯心主义世界观在数学严谨化的过程中渗透进来。他们企图“用公式和符号代替一切”,过分夸大形式逻辑的作用,并把数学歪曲为纯粹形式主义的自由思想的产物,单纯追求抽象化和逻辑“完美”,把数学当作统治阶级的装饰品和脱离实际的“学者”欣赏的东西,从而造成数学发展的某些畸形,并在一定程度上束缚了从生产实践中提出的一些新的数学方法的发展。例如 1892 年一位电机工程师赫维赛德在研究电路问题中创立了“运算微积分”方法,但由于缺乏严格的逻辑论证(尽管在实践中之有效),当时数学杂志不肯发表,直到 1916 年以后,经一些数学家的严格证明,才得到承认和广泛的应用,这样的例子不胜枚举。

近二、三十年中,特别是近十多年来,由于原子能,高速飞行,无线电技术,自动控制,大型的水利工程和土建工程都需要较高深的数学工具。因此,对数学的发展提供了新的物质基础,许多新的分支迅速地建立起来,如计算数学,信息论,排队论,规划论等等。同时,也使原有的一些理论系统得到新的发展,如微分方程中非线性方程的求解,稳定性问题,偏微分方程中的混合型方程的研究。在近代数学的发展中,苏联有着巨大的成就,如数论,函数论,微分方程定性论,数理方程,计算数学,概率论,数理逻辑等都跃居世界的前列,许多重要的数学分支居世

界的領導地位。人造衛星，火箭，導彈，宇宙飛船上天，都是和蘇聯先進的數學水平分不開的。

這裡，我們要單獨講一下我國的情況，我國人民是勤勞智慧的，有着悠久的文化，被稱為文明古國，在古代生產較為發達，數學方面也有極為豐富的知識。幾何學方面，早在公元前一千年就知道勾股弦關係。公元前三至二世紀已出現數學研究的總結性著作“九章算術”，上面載有不少有關直角三角形邊長關係及代數問題，公元初到四世紀期間，我國對圓周率的研究已達到相當精確的程度（當時祖沖之已獲得 $\pi \approx 3.1415926$ 或 $355/113$ ）。三——五世紀出現“孫子算經”，上面已有代數中同余式問題。直到十三世紀，我國在代數方面一直有很傑出的成就，如二項式 $(a+b)^n$ 的展開式係數，代數方程的近似解法（現在外國書上所謂“合奈法”）等的發現時代都在歐洲數學家以前。並且早自六世紀以來，我國數學就在很大程度上影響着日本和朝鮮的數學的發展，後來，由於長期停留在封建社會，生產力發展遲緩，因而數學發展也和其他科學一樣受了限制，到了歐洲資本主義興起以後，我國數學在相形之下就日益落後了。

近百年間，我國淪為半封建、半殖民地，生產力受到嚴重的束縛，數學失去了迅速發展的物質基礎，並且造成依賴性的畸形發展。解放前夕，我國數學隊伍非常單薄，而且大部分人 unwilling 去研究應用較多和生產實踐較為密切的數學分支，理論脫離實際的思想非常嚴重，輕視實踐成了風氣，從而更加影響我國數學的發展。

但解放後，在黨的領導下，我國的生產面貌起了根本的變化，數學也跟其他科學一樣，有了蓬勃的發展，許多重要的，但是基礎薄弱的甚至是空白的部門已經開始填補起來，例如：微分方程，概率論，數理統計，計算數學等。特別是黨公布了社會主義建設總路綫以來，全國各地各部門都掀起了大躍進的高潮，大規模的建設工程和尖端科學，以史無前例的速度在發展。這些都為數學的發展开辟了廣闊的園地和提供最

好的物质基础。我国数学界开始冲破资产阶级的思想束缚，投身到生产实践中去解决了和正在解决许多生产上的问题（如水坝应力分析，气象预报，运输调度，工业产品的质量检查与控制，以及其他尖端科学技术中的问题等等）。获得了初步的，但又是空前的收获，如线性规划就有独特成就。优越的社会主义制度为我国数学的发展开辟了无限美好的远景。目前，我国正在热火朝天地进行着一个群众性的技术革新和技术革命运动，正如李富春同志指出的，这是一条多快好省的发展技术的道路。可以看出，我们将从主要是学习与继承世界科学技术成果的阶段走向主要是根据我们的情况和需要进行独创的阶段，我们应该踊跃投身到这个伟大的运动中去，不断深入学习和总结广大人民的创造。只要我们沿着党指出的方向——教育为无产阶级政治服务，教育与生产劳动相结合，那么，数学将在解决生产实践问题过程中不断提高理论水平，使得我国数学水平在最短的时间内赶上先进科学水平。

§ 0.3. 数学的发展和生产实践的关系

恩格斯讲过“科学的发生与发展从开始起，便是由生产所决定的。”①毛主席在实践论一开始就提到“首先，马克思主义者认为人类的生产活动是最基本的实践活动，是决定其他一切活动的东西。人的认识，主要地依赖于物质的生产活动，逐渐地了解自然的现象、自然的性质、自然的规律性、人和自然的关系；而且经过生产活动，也在各种不同程度上逐渐地认识了人和人的一定的相互关系。一切这些知识，离开生产活动是不能得到的。”②作为科学之一，作为人类知识之一的数学，当然也不例外，也是离不开人类生产实践的。但是资产阶级学者却不承认这一点，说什么数学是从实际抽象出来的，已没有什么实际的意义，因此，它的发展可以和生产实践没有什么关联，特别是近代数学尤其可以

① 恩格斯：“自然辩证法”，人民出版社 1959 年版，149 页。

② 毛泽东选集：第一卷，人民出版社 1951 年版，281 页。

脱离生产实践而独自发展起来的。这些说法是极端错误的，为了反驳这些错误的看法，我们还是拿数学发展的一些例子来看。

在历史上每个时期的数学水平基本上是和当时的生产水平相适应的，公元前平面几何在希腊达到相当完美的地步（当时形成的欧氏几何一直到现在并没有什么本质的改变），而极限方法虽已为阿基米德使用过，但由于当时社会生产力还不需要数学来研究变量关系，因而没有发展的基础。到了欧洲资本主义兴起，由于航海、建筑等的需要，各种力学得到发展，于是极限方法就很快被系统地运用而产生了微积分学。从十七世纪微积分发展以后的二百年中，不少数学家同时还研究了力学、电学等其他自然科学和技术问题。他们运用数学工具去解决所碰到的实际问题，而这些实际问题也成了他们在数学上获得成就和创造的巨大源泉。这两百年在数学发展史上留下了光辉的成就。这时古代数学曾经很发达的我国，却由于生产落后长期停留在封建社会，数学的发展却停滞不前，逐渐落后。

这些历史现象以及前面所讲苏联数学的发展，充分说明了数学的产生与发展是被生产实践提供的問題所推动，生产水平和其他科学技术的发展水平为数学发展创设了客观条件，十九世纪的俄国数学家契比雪夫有这样的见解“理论与实践的联系会得出最好的结果，受惠的将不仅是实践，而且科学本身在实践的影响下也向前发展了。实践为科学开辟了新的科目，给科学提出完全新的問題，因而也引起了要探求全新方法的努力”。这样的看法并不是說数学就是生产的“直接订货”，每一个数学分支甚至每一个数学定理都来自生产中提出的問題。有些数学理论可能来自另一些数学理论的逻辑推理，但作为推理的出发点的现有理论与概念是从实践中概括出来的，而且推理所得到的结果是否能得到发展，仍须拿到实践中去考验。总的说来，任何数学理论能否得到发展还是要取决于生产实践的需要。例如：二进位和布尔代数的研究，过去并没有受到很多的注意，但自电子计算机出现以来，由于找到了

它们的应用,从而改变了这种状况。概率論的某些概念与方法最初是由于游戏中来的,但概率論真正作为数学的一个分支而受到注意和发展是由于商业,人口統計,誤差理論(測量、射击等)需要的推动,特别是物質結構的分子学說被普遍承認与应用以后,加以現代生产发展的需要,概率論就得到极大的发展,乃至成为当前数学中重要分支之一了。又如非欧几何初創时并未受到重視,到广义相对論出現以后,由于需要就得到較多的研究。与此相反,有一些数学內容却由于沒有能够在实践中找到它的应用而得不到发展。这些事实都足以駁倒对数学发展的歪曲說法。

当然,在数学的发展中,数学家的努力与才能也起了一定的作用,但是資產階級唯心主义者故意夸大了科学家的个人作用而抹杀了生产实践的推动力量和群众的作用,把問題說成是一些天才数学家个人創造了数学的某些分支,好象沒有他們就不会有今天的数学似的;例如在某些书上可以看到“牛頓和来布尼茲发明了微积分”等等,实际上,十七世紀許多科学家参加了微积分的創造工作,牛頓和来布尼茲不过是完成这創建的初步阶段,有着較大的貢獻而已,他們的工作是建立在別人工作的基础上,沒有他們二人也一定会有其他人来完成这些工作,关键在于当时生产实际的要求,迫使微积分方法的发展,而当时的生产水平与科学水平也提供了发展的客觀可能性,因此,在那时微积分的建立就是客觀形势的必然产物。

§ 0.4. 贯彻党的教育方针,反对资产阶级路线

解放以来,我国数学有了巨大的发展,在这段时期內,我們学习了苏联数学的先进成就,逐渐認清了数学发展的健康道路。多数知識分子在努力改造自己的思想,为社会主义建設貢獻自己的力量,新的力量在党的领导下,陸續被培养出来,在文教战綫上的社会主义陣地加强了。但另一方面,資產階級教育思想与学术思想頑强地抵抗党的方針路綫,

不愿意把数学理论与生产实际结合起来,不愿解决从生产实际中所提出的数学问题,醉心于追求脱离实际地“研究”所谓“高级”理论,醉心于追求个人名利,说什么“数学没阶级性”,因此认为“数学科学的成就可以为全人类服务,数学家可以为数学而数学,应该从本门科学发展的需要来发展数学”。这种情况严重地阻碍了数学在社会主义建设中所应发挥的作用,严重地阻碍了党的方针的贯彻,同时,也阻碍了我国数学的迅速发展。几年来,我们所取得的成就,是经过激烈的两条道路斗争的。因此,只有彻底清除这些资产阶级思想的影响,坚决贯彻党的教育方针,使数学与生产实际相结合,服务于无产阶级的政治,我国数学才能得到健康的发展,在祖国建设中发挥出它的最大的作用。

几年来,科学发展的经验证明,在阶级还存在的时候,科学事业是不能超阶级的,而且只有从社会主义建设出发,才能更快地发展科学,并使发展有利于人民。数学也不例外,十七——十九世纪的欧洲由于生产的推动,在数学发展上曾有飞快的速度,我们今天所从事的社会主义事业是十七——十九世纪所不能比拟的。因此,只要紧靠结合社会主义建设,那么,我国数学事业就一定以远超过十七——十九世纪的速度和规模而向前发展。说到理论,马列主义者一向是最为重视的,但是真正的理论是那些从实践中总结出来又能用来指导生产实践的,脱离实际的“理论”是空洞的教条,是没有价值的。我们应该坚决反对那种游戏式和脱离实际地研究数学的态度。现在生产实践已经提出很多数学问题需要解决,并要求提高到理论,以进一步指导生产,我们应该积极地满足这些要求,并从而发展适应我国社会主义建设需要的数学。

在数学教学方面,尽管解放以后已取得很大成绩,但还不能满足社会主义建设高速度发展的需要。过去高等数学教学内容陈旧割裂,教学方法上也有脱离实际和形式主义及主观主义的现象。所以对高等学校的数学教学也必须进行教学改革,但是,目

前仍然有人認為“旧体系是經過千錘百煉的”，因此，“无法加入結合专业实际和适应現代化要求的尖端內容，过去的內容系統是一个滴水不进的封閉系統”。又有人認為“数学是客觀規律的正确反映，所以，必然包含有辯証法”。或者“在数学中辯証法沒有威力，起不了什么作用”。他們忘記了旧体系是資產階級科学家的總結，它必然滲透着資產階級的世界觀和思想体系，这种观点和前面的自然科学工作者超階級超政治的观点一样，无非是反对自然科学工作中的两条道路斗争、反对用馬克思列宁主义来指导数学、反对对数学中唯心主义思想进行批判而已。

教学改革，是一場階級斗争，这不仅是教师的事，每个同学在学习过程中也应该自觉地参加这个斗争，在斗争中作个促进派。为此在数学教学中必須根据专业培养目标的要求，坚决把生产引入教学，努力貫徹教育与生产劳动相結合的方針。

§ 0.5. 結束語

从以上这些問題，我們會理解到数学对工程技术工作者是极为重要的理論工具，离开了它，在現代的技术条件下，就难以进行精确的工作，就象鉗工离不开銼刀，木工离不开鋸子一样。同时，我們也了解了数学這門科学的基本特点，在学习时应自觉地运用馬克思列宁主义观点，密切联系实际应用，重視熟練計算，并注意数学方法論上某些特有的技巧，克服在理解数学的抽象概念及运用数学理論的困难。在运用数学工具时，应解放思想，敢于大胆进行創造，同时又要虛心向劳动人民群众的丰富生产实践經驗学习，这样在将来的工作中，就会获得胜利，在工作中繼續不断提高，以适应工作需要的不断发展。

第一章 矢量代数

矢量是由力学、物理学以及一些技术科学的需要而引入的数学概念，特别是由于电磁学、流体力学的发展，促使人们更加广泛深入地来研究矢量的一般理论。矢量是研究力学、物理学以及许多技术科学的重要数学工具之一，同时也是研究数学本身的许多问题的重要工具之一。

本章研究矢量的代数运算，即加法、减法及乘法的运算，所以叫做“矢量代数”，以区别于以后要研究的矢量的分析运算，即微分、积分的运算，后者叫做“矢量分析”。

§ 1.1. 矢量的概念

在现实世界中，我们会遇到两种量，一种是象温度、质量、密度、时间、功、能等等的量，这种量只用数来表示，叫作数量；另一种是象力、位移、速度、加速度等等的量，这种量不但有大小，还有方向。因为，大小相同而方向不同的两个力，分别作用在同样的两个物体上，所产生的效果是不一样的；又如两个物体以同样大小的速度而不同的方向运动时，结果所产生的位移也是不一样的。这种有大小又有方向的量叫作矢量。

数量又叫纯量、标量、无向量。矢量又叫向量、有向量。

研究力、速度、加速度等等这种既有大小又有方向的量，在许多实际问题里是十分重要的。例如，一架飞机在天空中飞行，它便受到自身的重力、发动机的推力、空气的阻力、风力等的作用，这些力都有各自的大小与方向，研究这些力的作用，对于如何控制飞行的速度与方向，保

証飞行的安全,材料不致受到破坏等都是必要的。又如在設計一座桥梁时,就需要分析与計算各种受力的情况,以保証桥梁的坚固、安全与尽可能的节省材料。設計一个大厅的大跨度的屋頂也需要分析与計算各种受力的情况,选择合适的曲面形状,使得既实用、經濟、又安全坚固。又如要使大炮能准确击中敌人的工事,就必须算好大炮应取多大的仰角,炮弹应具有多大的推力与初速度等等。

数学中的矢量理論,主要在于从許多物理事实总結、抽象出这种有大小有方向的量,发掘在量的方面的一般規律和特性,以及研究它們的計算方法。矢量的理論是由分析实际問題,將它們加以抽象与概括而得出来的,它反映了有大小有方向的量的客观属性,所以它反过来又可以对有关的实际問題起指导作用。但决定性的因素,仍然是实际問題本身的物质規律性,即事物本身的物理过程。

数量常用拉丁字母来記,如 a 、 b 、 c 等。矢量常用拉丁字上加一个箭头来記,如 $\overrightarrow{AB}$ 等。有时矢量也用粗体的拉丁字母来記,如 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 等。

矢量既然是有大小有方向的量,所以在几何上就可以用空間的一个有方向的綫段(叫做有向綫段)来表示(图 1.1)。这个有向綫段的长度等于矢量的大小,方向为矢量的方向, A 叫做起点, B 叫做終点,并且在 B 点处沿着由 A 到 B 的方向画一个箭头来表示它的方向。这种表示法,使得矢量更加直觀了。

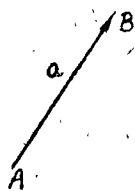


图 1.1

以 A 为起点 B 为終点的矢量又記作 $\overrightarrow{AB}$ 。矢量的大小或长度記为 $|\vec{a}|$ 、 $|\mathbf{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 。矢量的大小又叫做矢量的模或长度。模是数量。

起点固定的矢量叫作固定矢量,例如,我們談到某一点的运动速度时,这速度是与所考虑的那一点的位置有关的。談到位移时也要提出是从哪一点开始的,所以速度、位移都是固定矢量。