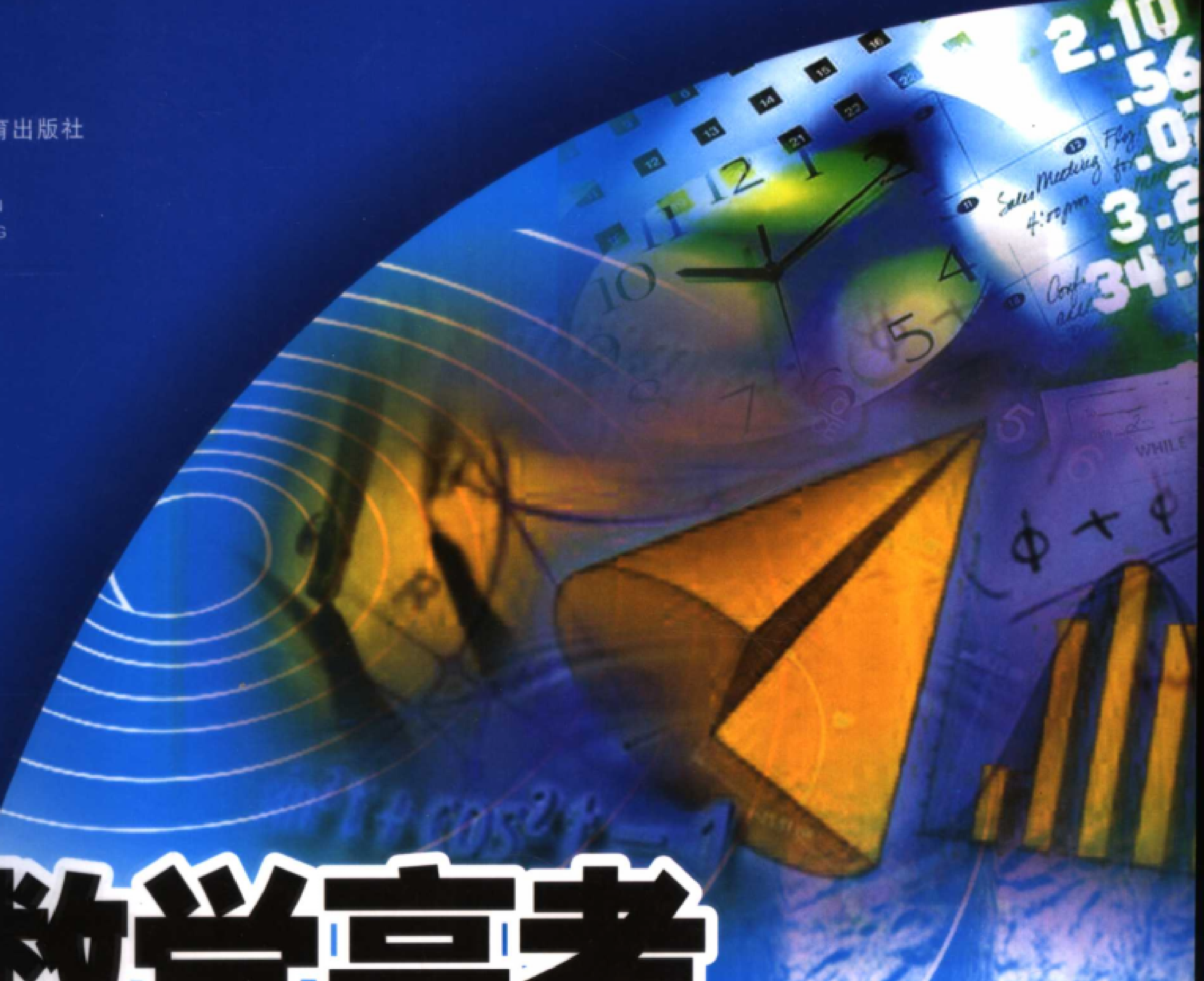
精编高考复习丛书

第2轮复习

上海教育出版社
SHANGHAI
EDUCATION
PUBLISHING
HOUSE



数学高考

综合能力专题训练

》 **近年高考数学的热点是什么?**

今年高考数学的命题有何新趋势?

求解高考数学中解答题的策略和方法有哪些?

本书将以全新的视角、全方位地为你扫描历年高考的精华，指点应对今年高考的迷津，是获取数学高分的“金钥匙”。

责任编辑 王耀东　赵海燕

封面设计 陆　弦

精编高考复习丛书

ISBN 7-5444-0587-7

9 787544 405874 >

易文网：www.ewen.cc

定　价：15.50元

精编高考复习丛书

数学高考综合能力专题训练

本书编写组　编

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学高考综合能力专题训练／吕宝兴等著．—上海：
上海教育出版社，2006.2
（精编高考复习丛书）
ISBN 7-5444-0587-7

Ⅰ．数… Ⅱ．吕… Ⅲ．数学课—高中—升学参考
资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第011053号

精编高考复习丛书
数学高考综合能力专题训练
本书编写组 编
上海世纪出版股份有限公司
上海教育出版社 出版发行
易文网：www.ewen.cc
（上海永福路123号 邮政编码：200031）
各地新华书店经销 上海市北书刊印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 12 字数 281,000
2006年2月第1版 2006年2月第1次印刷
印数 1－1,500本
ISBN 7-5444-0587-7/G·0458 定价：15.50元
（如发生质量问题，读者可向工厂调换）

《精编高考复习丛书》的出版说明

通过高考进入自己理想的高校，这是每个考生最大的心愿，而找到一套完整的、高质量的高考复习资料是考生最迫切的要求. 多年来，我社曾编辑出版了《高中数学复习》、《数学高考新模式》、《高考数学水平检测》等，受到了广大师生的欢迎. 为了满足广大高中毕业生对高考复习的热切需要，我们特邀了一批上海市名牌高级中学高三年级的优秀特级教师和近几年承担过高考命题工作的老师，根据当前数学高考的特点和考纲要求，结合自己多年丰富的从教和命题经验，对历年的高考数学复习资料进行整合，精心策划和编撰了一套《精编高考复习丛书》，以帮助学生更好地做好迎考的复习准备. 考虑到每年高考的新要求，我们将对这套复习资料逐年加以修订和更新，使其成为广大师生真正满意的高考复习的品牌资料.

《精编高考复习丛书》的数学学科分三个系列编写，可供不同复习阶段的考生使用：

● 《数学高考基础知识单元复习》，可供学生在数学高考复习的第一阶段选用，着重于基础知识和基本方法、能力的复习和训练.

● 《数学高考综合能力专题训练》，可供学生在数学高考复习的第二阶段选用，着重于综合能力的训练与提高，所选的例题、试题和习题有一定的难度，相当于数学高考试卷中的第 17 到 22 题，以提高考生对解答题和综合题的解题能力，同时进一步检验考生对基础知识和基本方法、能力的掌握程度.

● 《数学高考仿真测试卷》，包含了十二份版式完全模拟高考形式的测试卷，便于高三老师测试学生与学生自测. 这些测试卷由一批有丰富教学经验、对命题有研究的资深教师编写，从总体上注重能力与素质的考查，特别是对应用能力与在新情景下解决问题的能力的考查.

《数学高考综合能力专题训练》的前言

当考生结束了高考数学第一阶段的复习工作后，为了提高考生对解答题和综合题的解题能力，总结数学的解题思想方法并归纳相应的解题规律，同时进一步检验考生对基础知识和基本方法、能力的掌握程度.一批名牌高中的优秀特级教师和承担过高考命题工作的老师结合自己多年丰富的从教和命题经验，为广大考生精心策划，精心编制，全力打造了一本供高考数学第二阶段复习使用的《数学高考综合能力专题训练》.

《数学高考综合能力专题训练》以专题的形式展开，全书共分7章.每章设有以下栏目：【高考复习点要】、【典型范例精讲】、【精彩试题回放】、【巩固练习提高】.

●【高考复习点要】着重阐述近几年来有关本章内容的数学高考命题动向、特点等以及考生复习时应注意的事项，以便学生了解今年高考的热点在哪里，并从宏观上来把握数学高考的复习方向和方法.

●【典型范例精讲】根据高考的特点和考纲的要求对涉及本章的内容作了进一步的分类，形成几类问题，并针对每类问题精选了一批有代表性的典型数学题目，加以深入的分析和详细的解答，由此总结和归纳出高考数学的解题规律和思想方法，提高考生应对高考数学的解题能力.所选的题目反映了目前数学高考的现状和发展趋势，以解答题和综合题为主，并选入了一些新题型，如应用题、探究题、创新题等.

●【精彩试题回放】对近几年尤其是2002年以来有关本章内容的数学高考试题(以解答题和综合题为主)作了精选，主要是上海试题，并适当选入了一些精彩的全国试题，以便考生熟悉并了解历年高考数学考什么，这对把握当前的高考数学复习工作将会有很大的帮助.

●【巩固练习提高】由足够量的A、B、C三个级别的训练系统所组成，所选题目的难度相当于数学高考试卷中的第17到22题，目的是为了进一步提高考生对高考数学中的解答题和综合题的解题能力.其中A级的难度相当于高考试题中的第17—18题；B级难度相当于19—20题；C级难度相当于21—22题.通过这些题目的训练，可使考生基础知识更扎实，基本方法更巩固，基本要求更明确，解题能力更增强.

在本书的最后还附有【精彩试题回放】和【巩固练习提高】中数学题目的解答提示或简要答案，可供考生参考.

最后想说的是尽管我们的目标很明确，也做了较大的努力，但毕竟还是时间比较仓促，书中会有不少错误和不足，望读者在使用后能将不足之处及时告诉我们，以便我们今后加以改进.

本书编写组

2006年1月

目　　录

第一章　函　　数

第二章　三　　角

第三章　不　等　式

第四章　数　　列

第五章　向量及其应用

第六章　解 析 几 何

第七章　排列、组合、概率和统计

第一章　函　　数

【高考复习点要】听一听，名师为你讲要领！

函数是高中数学重要的基础知识，函数的思想是贯穿于整个高中数学的一条主线，同时也是学习高等数学的重要基础，对分析和解决各种数学问题和实际应用问题具有重要的作用．所以，函数是高考的重点考查内容，就近几年高考数学试卷的统计情况来看，函数题的总分值在 30 分左右，占总分的 20%．

对于本章的知识点，考查频率最高的是函数记号、定义域、值域，其次是对数函数、指数方程和对数方程、子集、交集、补集、并集、函数单调性、奇偶性、反函数，它们也是本章内容的重点．

每年的试题中，涉及本章知识的试题有基础题、中档题，也经常出现难题，如：上海高考题 2001 年第 21 题、2002 年第 21 题、2003 年第 22 题、2004 年第 20 题、2005 年第 21 题等．这些试题通常考查函数与不等式、数列、方程、解析几何、复数等知识综合应用的能力．

综观近几年高考试题中对函数的考查，主要有以下几个特点：

(1) 关于集合概念的理解以及集合的运算．这类试题主要以选择题形式出现，属基础题．

(2) 函数的基本概念、图像及其性质．主要考查单调性、奇偶性、反函数、函数的图像及图像变换的常用方法，此类题主要以选择题、填空题的形式出现，属基础题或中档题．

(3) 二次函数、幂函数、指数函数和对数函数与其他知识的综合应用，都是近几年高考必考内容，而且常以与方程、不等式等知识的应用形式出现，被作为高考中档题或高档题．

(4) 关于函数在实际生活中的应用题，在高考中出现的频率相当高，应引起重视．

由函数的主导地位，可以断定它在高考中仍将是一个热点，而且在能力考查上将更加突出题目的立意、情境的创设，设问的角度和方式将不断创新．主要将体现在以下几个方面：一是考查函数的知识更加全面深入；二是加强函数渗透力的考查，如考查函数与方程、不等式、三角、数列、复数、立体几何、解析几何等知识之间的联系和综合应用；三是重视函数与方程思想的考查；四是加大函数应用题与开放题的考查力度．

理所当然，高考的考查重点，必定体现出题型多样，综合性和灵活性的特征明显，特别是近几年函数与其他数学知识相结合的问题多次出现在高考大题中．

【典型范例精讲】读一读，解题能力将提高！

一、函数的基本概念与性质

函数是高中数学中最重要的内容之一，是高中数学的主线，贯穿于各章之中，其内容丰富，应用广泛．主要包括以下几个问题：

1. 求函数的解析式及定义域

函数的定义域、对应法则是函数的两大要素．两个函数只有在定义域、对应法则完全相同时，才是相同的函数．如函数 $y=\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}(x\neq 2)$ 与 $y=x+3(x\in \mathbf{R})$，两函数的定义

域不同，故不是同一个函数.

复习时要重视函数的定义域，对已知解析式的函数要先考虑其定义域，因为定义域是函数的“生命之域”，一定要抓住不放，否则在解题时必然会出现错误. 例如，求函数 $y=\log_{(x-1)}(x^2-2x-3)$ 的单调区间，常见错误就是：当 $x\in(-\infty,1)$ 时，y 递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，y 递增；或只考虑真数的取值范围，忽略底数的取值范围. 又如判断函数的奇偶性，只看解析式而不考虑函数的定义域.

求函数解析式，就是要寻找问题中自变量 x 和函数 y 之间的一个对应关系，可以通过列方程(或方程组)而得到. 函数的定义域，则是对由自变量 x 应满足的不等式(组)求解而得到的，有时要根据实际意义来确定.

例 1 (1) 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\lg(|x|-x)}$ 的定义域；

(2) 若函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{ax^2-ax+1}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

思路 第(1)小题要根据偶次根式的被开方数非负、对数的真数大于零、分式的分母不等于零等知识来求解.

第(2)小题要充分利用定义域为 $\mathbf{R}$ 的条件，即对任意 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $ax^2-ax+1>0$，因而要对 a 是否为零进行讨论，从而求出 a 的取值范围.

解 (1) 由题意，得 $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0, & ①\\ 0<|x|-x\neq 1. & ②\end{cases}$

由①，得 $x^2-1\leqslant 0$，即有 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

由②，得因为 $0<|x|-x\neq 1$，故对 x 进行分类讨论：

(ⅰ) 当 $x\geqslant 0$ 时，$|x|-x=0$，函数无意义；

(ⅱ) 当 $x<0$ 时，$0<-2x\neq 1$，即 $x<0$ 且 $x\neq -\dfrac{1}{2}$.

综上知 $x\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

(2) 因为此函数的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $ax^2-ax+1>0$ 对一切实数恒成立.

(ⅰ) 当 $a=0$ 时，$ax^2-ax+1>0$ 显然成立；

(ⅱ) 当 $a\neq 0$ 时，由 $ax^2-ax+1>0$ 对一切实数恒成立知相应的抛物线 $y=ax^2-ax+1$ 的开口向上，且与 x 轴不相交，则必有

$$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=a^2-4a<0.\end{cases}$$

解得 $0<a<4$.

综上所述，a 的取值范围为 $0\leqslant a<4$.

点要 例 1 中的两小题包含了分类讨论的思想. 第(1)小题中，在解 $0<|x|-x\neq 1$ 的时候，由于不等式中含有绝对值符号，因此要对 x 的正、负性以及是否为零进行分类讨论；在第(2)小题中，由 $ax^2-ax+1>0$ 恒成立，确定 a 的取值范围时，因为 a 是实数，不清楚 $ax^2-ax+1>0$ 是什么不等式，所以要对 $a=0$ 或 $a\neq 0$ 进行分类讨论. 分类讨论其实质就是把所研究的问题根据题目的特点和要求，分成若干类，转化成若干个小问题来解决. 一般地，

确定不等式中参数的取值范围，其思想方法总是根据条件化归为解不等式或不等式组.

2. 函数性质的应用

函数的性质是对函数图像特征的一种描述，讨论清楚了函数的性质，图像就可以画出，反之画出了图像，函数的各种性质就一目了然了.

函数的单调性（增减性）是函数图像从左至右是上升还是下降的反映. 判断函数在某区间上的单调性，可根据定义判断，也可以把所给函数化为常见函数的和或复合函数，再利用常见函数的单调性进行判断，如函数 $y=\log_3(-x^2-2x)$ 是二次函数和对数函数的复合函数，可把二次函数看作一个中间变量，即设 $g(x)=-x^2-2x$，则 $y=\log_3 g(x)$. 可首先考虑定义域 $g(x)=-x^2-2x>0$，得 $-2<x<0$；再考虑 $g(x)$ 的递减区间：因 $g(x)=-(x+1)^2+1$，故 $x\in\{x\mid -1\leqslant x<+\infty\}$，$g(x)$ 递减，结合定义域，$g(x)$ 的递减区间是 $(-1,0)$，而 $y=\log_3 g(x)$ 是关于 $g(x)$ 的递增函数，故 y 的递减区间也是 $(-1,0)$. 有时还可根据函数的图像进行判断，但要特别小心单调性是针对某个区间而言，如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 以及 $(0,+\infty)$ 上虽然都是减函数，但在整个定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上却不是单调递减，因为它在定义域内有间断点，故在定义域内不是单调递减函数.

函数的奇偶性是图像关于原点或纵轴的对称性的表现. 判断函数的奇偶性，应先讨论其定义域是否关于原点对称. 定义域关于原点对称是一个函数成为奇函数或偶函数的必要条件. 如 $y=x^2(-2\leqslant x<2)$ 中的定义域不是对称区间，所以此函数是非奇非偶函数. 利用定义判断函数的奇偶性，关键是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系. 此外，还可利用图像的对称性来判断函数的奇偶性.

函数的性质在解题中有着广泛的应用，解某些问题时，若能注意用函数的观点考察所面对的问题，借助函数的性质来处理，常可使问题化难为易、化繁为简.

例 2 已知奇函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上为减函数，且满足 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，求实数 a 的取值范围.

思路 由于函数 $f(x)$ 没有给出具体的解析式，若要求出实数 a 的范围，则必须得到变量 $1-a$ 与 $1-a^2$ 的关系，而运用函数的单调性就能达到这一目的，即若函数 $f(x)$ 是单调函数且 $f(x_1)>f(x_2)$，则一定有 $x_1>x_2$（或 $x_1<x_2$）. 由 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$ 可得

$$f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1).$$

再根据 $f(x)$ 是减函数就能得到 $1-a$ 与 $1-a^2$ 的关系了.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1)$.

又 $f(x)$ 为减函数，故 a 的取值范围应满足：

$$\begin{cases}1-a>a^2-1,\\-1<1-a<1,\\-1<1-a^2<1,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}a^2+a-2<0,\\0<a<2,\\0<a^2<2.\end{cases}$$

解不等式组，得 $0<a<1$.

所以，a 的取值范围是 $(0,1)$.

例 3 设函数 $f(x)=ax+2a+1$，当 $-1<x<1$ 时，$f(x)$ 的值有正有负，求实数 a 的取值范围.

思路 显然满足条件的 a 值不可能为零,因此可以利用一次函数的性质来研究 $f(x)$.

解 方法一:一次函数 $f(x)=ax+2a+1$ 在 $(-1,1)$ 上有正值也有负值,可推得直线 AB: $y=ax+2a+1$ 与 x 轴的交点在 $(-1,1)$ 内,即方程 $ax+2a+1=0$ 的根在 $(-1,1)$ 内.

因为 $ax+2a+1=0$ 的根为 $x=-\dfrac{2a+1}{a}$,所以 $-1<-\dfrac{2a+1}{a}<1$,

解得 $-1<a<-\dfrac{1}{3}$.

方法二:由于一次函数 $f(x)=ax+2a+1(a\neq 0)$ 为单调函数,显然,它在 $(-1,1)$ 内有正值和负值的条件为 $f(-1)\cdot f(1)<0$,即 $(-a+2a+1)(a+2a+1)<0$,

解得 $-1<a<-\dfrac{1}{3}$.

方法三:把函数 $y=ax+2a+1$ 看成平面直角坐标系 xOy 中的直线系,即 $a(x+2)-(y-1)=0$,显然此直线经过定点 $C(-2,1)$.

函数 $f(x)=ax+2a+1$ 在 $-1<x<1$ 时有正有负的条件是直线 $y=ax+2a+1$ 的斜率 a 满足: $k_{AC}<a<k_{BC}$,其中 $A(-1,0)$、$B(1,0)$,从而可求得 $-1<a<-\dfrac{1}{3}$.

点要 有效的数学学习可以通过有关"应用"来反映和检测自己对数学抽象化和抽象数学的理解能力.而"应用"所涉及的对象可以是自己经过课堂教学所熟知的或者至少是曾经被告知的那些对象.但是假如"应用"的对象恰恰是"没有被告知的"、"陌生的"、异于课本所涉及的对象,那就需要自己在已有的知识基础上,通过联想、类比、分析、综合等各种积极的能动的思维活动,才能创造性地解决问题,这就是举一反三、触类旁通.它对于提高自己灵活运用知识技能的能力有着不可估量的作用.

变式题 对于满足不等式 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的实数 p,使得 $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立,求 x 的取值范围.

思路 将原不等式整理成 $x^2-4x+3>-px+p$,问题就转化为函数 $f(x)=x^2-4x+3$ 和函数 $g(x)=-px+p$,当 $p\in[0,4]$ 时,函数 $f(x)$ 的图像恒在函数 $g(x)$ 的图像上方部分的 x 的取值范围.

解 对于满足不等式 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的实数 p, $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立,即 $x^2-4x+3>-px+p$ 在 $p\in[0,4]$ 内恒成立.

设函数 $f(x)=x^2-4x+3$,函数 $g(x)=-px+p$,且 $p\in[0,4]$.分别在同一平面直角坐标系中画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像.

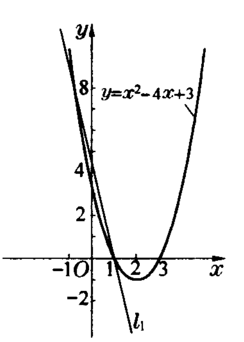


图 1-1

如图 1-1, $y=f(x)$ 的图像是一条抛物线,当 $p\in[0,4]$ 时, $y=g(x)$ 的图像是恒过点 $(1,0)$ 的直线,且从 l_1: $y=-4x+4$ 的位置逆时针转动到 x 轴.

直线 l_1 与抛物线 $y=f(x)$ 的交点坐标为 $(-1,8)$ 和 $(1,0)$.

很明显,当 $p\in[0,4]$ 时,函数 $f(x)$ 的图像恒在函数 $g(x)$ 的图像上方部分的 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

点要 首先明确本题是求 x 的取值范围,这里要注意另一个变量 p,不等式的左边恰是 p 的一次函数,因此依据一次函数的特性加以解决.在多个字母变量的问题中,选准"主元"往往是解题的关键.如果把原不等式整理成 $(x-1)p+(x-1)(x-3)>0$,利用一次函数的

图像和性质来解就要简单得多了. 换个角度看问题,换个方向去思考,也就是在数学学习过程中,要注意多角度、多方向、多层次地去思考问题,这样不但对问题的认识更全面、更深刻,还可以发展自己的思维能力.

另解 因为对于满足不等式 $0\leqslant p\leqslant 4$ 的实数 p, $x^2+px>4x+p-3$ 恒成立,即 $(x-1)p+(x-1)(x-3)>0$ 当 $p\in[0,4]$时恒成立,设 $f(p)=(x-1)p+x^2-4x+3$.

由题意,得 $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(4)>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-1>0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x>3 \text{ 或 } x<1, \\ x<-1 \text{ 或 } x>1, \end{cases}$ 即 $x<-1$ 或 $x>3$.

点要 例 3 以及变式题其实是高三数学复习中的恒成立问题,它涉及到一次函数、二次函数的性质和图像,渗透着换元、化归、数形结合、函数与方程等思想方法,有利于考查综合解题能力,在培养思维的灵活性、创造性等方面起到了积极的作用. 因此也成为历年高考的一个热点. 恒成立问题在解题过程中大致可分为以下几种类型:

(1) 一次函数型.

给定一次函数 $y=f(x)=ax+b(a\neq 0)$,若 $y=f(x)$在$[m,n]$内恒有 $f(x)>0$,则根据函数的图像(直线)可得上述结论等价于

$\begin{cases} a>0, \\ f(m)>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ f(n)>0, \end{cases}$ 如图 1—2、1—3 所示;亦可合并为 $\begin{cases} f(m)>0, \\ f(n)>0. \end{cases}$

同理,若在$[m,n]$内恒有 $f(x)<0$,则有 $\begin{cases} f(m)<0, \\ f(n)<0. \end{cases}$

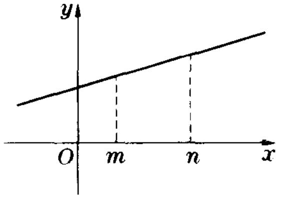


图 1—2

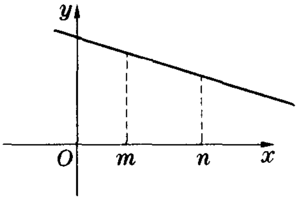


图 1—3

(2) 二次函数型.

若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$大于 0 恒成立,则有 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

若是二次函数在指定区间上的恒成立问题,还可以利用判别式、韦达定理以及根的分布知识来求解.

(3) 变量分离型.

若在等式或不等式中出现两个变量,其中一个变量的范围已知,另一个变量的范围为所求,且容易通过恒等变形将两个变量分别置于等号或不等号的两边,则可将恒成立问题转化成函数的最值问题求解.

(4) 根据函数的奇偶性、周期性等性质求解.

若函数 $f(x)$是奇(偶)函数,则对一切定义域中的 x, $f(-x)=-f(x)$($f(-x)=f(x)$)恒成立;若函数 $y=f(x)$的周期为 T,则对一切定义域中的 x, $f(x)=f(x+T)$恒成立.

(5) 直接根据图像判断.

若把等式或不等式进行合理的变形后,能非常容易地画出等号或不等号两边函数的图像,则可以通过画图直接判断得出结果. 尤其对于选择题、填空题,这种方法更显方便、快捷.

例4 给定实数 a,$a\neq0$ 且 $a\neq1$,设函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R},且\ x\neq\dfrac{1}{a}\right)$,证明:

(1) 经过这个函数图像上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴;

(2) 这个函数的图像关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

思路 先解决问题(1):证明两条直线"不平行"的问题,一般有两条途径,一是证明两条直线的斜率不相等,这里证明不平行于 x 轴,设 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$是函数图像上的任意两点,因此只要证明这条直线 M_1M_2 的斜率不为零;二是证明其结论的反面,即假设两条直线平行,从而导出矛盾.

证明 (1) 方法一:设 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$是函数图像上任意两个不同的点,则 $x_1\neq x_2$,

$$y_1-y_2=\frac{x_1-1}{ax_1-1}-\frac{x_2-1}{ax_2-1}=\frac{a(x_1-x_2)-(x_1-x_2)}{(ax_1-1)(ax_2-1)}=\frac{(x_1-x_2)(a-1)}{(ax_1-1)(ax_2-1)}.$$

因为 $a\neq1$,$x_1\neq\dfrac{1}{a}$,$x_2\neq\dfrac{1}{a}$,且 $x_1\neq x_2$,所以 $y_1-y_2\neq0$,

即 $k_{M_1M_2}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\neq0$,因此,直线 M_1M_2 不平行于 x 轴.

方法二:设 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$是函数图像上任意两个不同的点,则 $x_1\neq x_2$.

假设直线 M_1M_2 平行于 x 轴,那么 $y_1=y_2$,即$\dfrac{x_1-1}{ax_1-1}=\dfrac{x_2-1}{ax_2-1}$,于是得

$$(ax_2-1)(x_1-1)=(ax_1-1)(x_2-1).$$

整理得 $a(x_1-x_2)=x_1-x_2$.

因为 $x_1\neq x_2$,所以 $a=1$,与已知矛盾. 因此,直线 M_1M_2 不平行于 x 轴.

点要 问题(1)的几何意义是:函数的图像与平行 x 轴的直线最多只有一个交点,结合方程的意义,还可以得到一种巧妙的证法:

方法三:原式可化为$(ax-1)y=x-1$,对 x 的任何实数值,上式是关于 y 的最多是一次的方程,所以至多只有一个根,即图像与 x 轴平行的直线最多只有一个交点. 因此,经过这个函数图像上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴.

思路 下面解决问题(2):要证明这个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称的常用方法是,在已知函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$的图像上任取点 $P(x,y)$,推出点 P 关于直线 $y=x$ 的对称点 $Q(y,x)$也在这个函数图像上;或者求函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$的反函数,观察所求得的反函数与原函数相同即可;或者利用轴对称图形的定义进行证明.

(2) 因为 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$,其中 $x\neq\dfrac{1}{a}$,所以 $axy-x-y+1=0$.

这是关于 x、y 的对称方程,因此函数 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$的图像关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

点要 第(1)小题中的方法二使用了反证法. 反证法是间接证明的一种方法,它也是数学中常用的方法之一. 一般地说,如果从正面不容易或得不到解答时,可考虑用反证法去尝试. 即

先作出与原命题结论相反的假设，然后从此假设出发，运用正确的数学原理、方法，经过逐步推演，最后导出与已知命题(定义、公理、定理、性质等)或题设条件相矛盾的结果.由于推理正确，论据真实，之所以产生矛盾，显然是由于假设不成立，因此原命题结论只有成立.

一般地，对于某些含否定语句的命题；或涉及到“至多(少)有几种”、“存在、唯一”的命题的证明等都可以考虑用反证法.

本题易犯的错误有：第一是在第(1)小题的证明中，没有从 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$ 是函数图像上任意两个不同的点去挖掘出隐含条件“$x_1\neq x_2$”，因此在由“$a(x_1-x_2)=x_1-x_2$”导出“$a=1$”的过程中无法说明“$x_1-x_2\neq 0$”；或者不作说明，就想当然地在两边约去因式“x_1-x_2”，这种推理是不严密的，也是不允许的.第二是在用反证法的时候，假设了结论的反面成立，但无法运用已知条件和正确的数学方法去导出矛盾.第三是在证明第(2)小题的过程中，对函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ 图像上的点 $P(x_1,y_1)$ 未说明 $x_1\neq\frac{1}{a}$.第四是找不出途径来证明函数图像关于直线“$y=x$”对称.

3. 与函数图像变换有关的问题

函数图像变换常用的有平移变换、对称变换和伸缩变换.

(1) 平移变换.

原函数	函数图像经平移变换($a>0,b>0$)	变换后的图像对应的函数
$y=f(x)$	向左平移 a 个单位	$y=f(x+a)$
	向右平移 a 个单位	$y=f(x-a)$
$y=f(x)$	向上平移 b 个单位	$y=f(x)+b$
	向下平移 b 个单位	$y=f(x)-b$

(2) 对称变换.

原函数	函数图像经对称变换	变换后的图像对应的函数
$y=f(x)$	关于 y 轴对称	$y=f(-x)$
$y=f(x)$	关于 x 轴对称	$y=-f(x)$
$y=f(x)$	关于原点对称	$y=-f(-x)$
$y=f(x)$	$x\geqslant 0$ 时，是 $y=f(x)$ 的图像； $x<0$ 时，作关于 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 的图像关于 y 轴对称的图像	$y=f(\lvert x\rvert)$
$y=f(x)$	$f(x)\geqslant 0$ 时，是 $y=f(x)$ 的图像； $f(x)<0$ 时，作关于 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称的图像	$y=\lvert f(x)\rvert$
$y=f(x)$	关于 $y=x$ 对称	$y=f^{-1}(x)$

例 5 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对于 $k\in\mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式；

(2) 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a\mid$ 使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

思路 本题第(1)小题可从以下两步来求得 $f(x)$ 在 I_k 上的函数解析式：

(ⅰ) 由 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，可推知对任意 $k\in\mathbf{Z}$，都有 $f(x\pm 2k)=f(x)$；

(ⅱ) $f(x)$ 在 $x\in I_0=(-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$，推知在 $x\in I_k$ 时，$x-2k\in I_0$，于是 $f(x-2k)=(x-2k)^2$，结合(ⅰ)，进一步得出 $x\in I_k$ 时，$f(x)=(x-2k)^2$.

本题第(2)小题要求实数 a 的取值范围，其中 a 应当使得方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根. 方程 $f(x)=ax(x\in I_k)$ 有两个不相等的实根等价于抛物线 $y=g(x)=f(x)-ax$ 在 x 轴上的区间 I_k 上有两个不同的交点；或者将方程 $f(x)=ax$ 的解看作为函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=ax$ 在区间 I_k 上的交点的横坐标，这样有两个不同实根的问题就等价于两函数图像在 I_k 上有两个交点的问题.

解 (1) 设 $x\in(2k-1,2k+1]$，则 $x-2k\in(-1,1]$.

又当 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$，于是 $f(x-2k)=(x-2k)^2$.

因为 $f(x)$ 的周期为 2，所以 $f(x)=(x-2k)^2$，$x\in I_k$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2) 由于 $f(x)=ax$，得 $(x-2k)^2=ax$，故集合 M_k 为直线 $y=ax$ 与抛物线弧 $y=(x-2k)^2(x\in I_k,k\in\mathbf{Z})$ 有两个不同交点的实数 a 值的集合，如图 1－4，由图像观察，知 $k_{OA}=0$，$k_{OB}=\dfrac{1}{2k+1}$，显然 $k_{OA}<a<k_{OB}$.

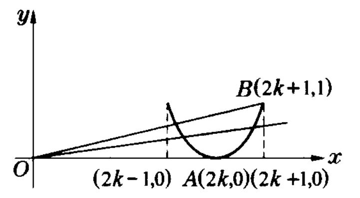


图 1－4

故 $M_k=\left\{a\,\middle|\,0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}\right\}$.

点要 本题因涉及函数的周期性，因而增加了问题的难度，而且各种解法都是将原问题转化为一个周期上来加以解决的，这是根本的思路.

本题第(2)小题利用了图像解法，一目了然. 读者不妨用代数方法再解一下，然后比较哪个方法简洁明了.

例 6 已知函数 $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，$x\in\mathbf{R}$.

(1) 求证：函数 $f(x)$ 的图像关于点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 对称；

(2) 计算：$\sum\limits_{i=1}^{99}f\left(\dfrac{i}{100}\right)$ 的值；

(3) 设 $g(n)=\dfrac{\sqrt{a}f(n)}{f(1-n)}$，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，猜想使 $g(n)>n^2$ 成立的最小正整数 a，并加以证明.

思路 解第(1)小题时，首先应知道在平面直角坐标系中一点 (x,y) 关于点 (a,b) 对称的点的坐标为 $(2a-x,2b-y)$. 这样只要在函数 $f(x)$ 的图像上任取一点 (x,y)，证明该点关于 P 的对称点也在函数 $f(x)$ 的图像上，也就证明了函数 $f(x)$ 的图像关于点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 对称了.

在第(2)小题中应注意利用第(1)小题的结论所产生的性质：若 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 是经过点 P 的直线与函数图像的交点，则 A、B 两点关于点 P 对称，有 $x_1+x_2=1$，则 $y_1+y_2=1$.

第(3)小题则需先根据已知条件求出 $g(n)$ 的解析式，然后进行观察、分析、猜测和证明.

(1) **证明** 设 $Q(x,y)$ 是函数 $y=f(x)$ 图像上的任意一点，则点 Q 关于点 P 的对称点为 $Q'(1-x,1-y)$. 因为

$$
\begin{aligned}
f(1-x)+f(x) &= \frac{a^{1-x}}{a^{1-x}+\sqrt{a}}+\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}} \\
&= \frac{a+a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-x}+a+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^x}{a+a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-x}+a+a^{\frac{1}{2}}\cdot a^x} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

所以 $f(1-x)+y=1$，即 $1-y=f(1-x)$.

即点 $Q'(1-x,1-y)$ 也在函数 $y=f(x)$ 的图像上.

所以，函数 $f(x)$ 的图像关于点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 对称.

(2) **解** 因为 $f(1-x)+f(x)=1$，又 $\frac{1}{100}+\frac{99}{100}=1$，所以

$$f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)=1.$$

同理可得

$$f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)=1,\cdots,f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)=1,\text{且 } f\left(\frac{50}{100}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{99}f\left(\frac{i}{100}\right)=\frac{99}{2}.$$

(3) **证明** 因为 $g(n)=\frac{\sqrt{a}f(n)}{f(1-n)}$，又 $f(n)=\frac{a^n}{a^n+\sqrt{a}}$，$f(1-n)=\frac{a^{1-n}}{a^{1-n}+\sqrt{a}}$，所以

$$g(n)=\frac{\sqrt{a}a^n}{a^n+\sqrt{a}}\cdot\frac{a^{1-n}+\sqrt{a}}{a^{1-n}}=a^n,$$

即 $g(n)=a^n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立. 令 $n=1$，显然 $a=1$ 不成立；令 $n=2$，显然 $a=2$ 不成立，令 $n=3$，可知 $a=3$ 是使命题成立的 a 的最小值，猜想使 $g(n)>n^2$ 成立的最小正整数 $a=3$.

利用二项式定理，可以证明 $a=3$ 为最小.

略证：因为 $g(n)=a^n$，令 $a=3$，则 $g(n)=3^n=(1+2)^n$，所以

$$
\begin{aligned}
g(n) &= 1+C_n^1 2+C_n^2 2^2+\cdots+C_n^n 2^n \\
&> 1+2n+\frac{1}{2}n(n-1)2^2=1+2n+2n^2-2n=1+2n^2>n^2.
\end{aligned}
$$

4. 求函数的值域和最值

函数的值域和最值是函数中的重要内容，最值是函数图像的最高(低)点的位置，而定义域和值域则划出了整个函数图像的范围. 所以图像是关键，通过图像研究函数性质，借助图像揭示解题途径，利用图像检验解题的结论.

我们常利用二次函数的配方法、基本不等式、函数的单调性来求值域或最值. 不论求值域(最值)有多少种不同手段与方法，其最基本的方法就是利用函数的单调性.

例 7 求函数 $y=x^2+2x+1$，$x\in[a,a+1]$，$a\in\mathbf{R}$ 的最值.

思路 本题是求二次函数 $y=x^2+2x+1$ 在闭区间 $[a,a+1]$ 上的最值问题，考虑到二