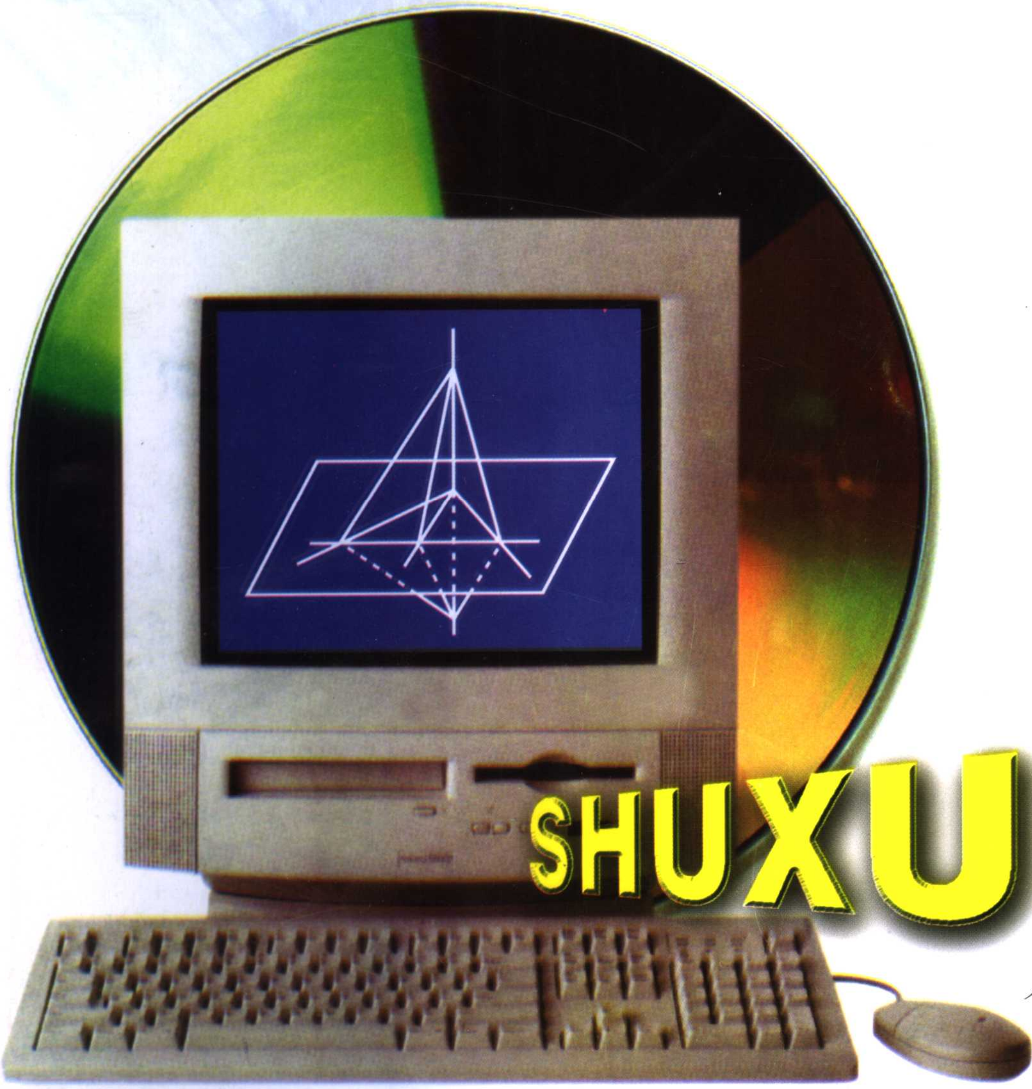
经全国中小学教材审定委员会
2003年审查通过

全日制普通高级中学教科书（必修）

数学

第二册（下A）

人民教育出版社中学数学室 编著



SHUXUE

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书（必修）

数　　学

第二册（下 A）

人民教育出版社中学数学室　编著

人民教育出版社

全日制普通高级中学教科书(必修)

数　学

第二册（下A）

人民教育出版社中学数学室　编著

*

人民教育出版社出版

（北京沙滩后街55号　邮编：100009）

网址：http://www.pep.com.cn

黑龙江省出版总社重印

黑龙江省新华书店发行

黑龙江省印刷技术研究所印刷厂印装

*

开本：890毫米×1194毫米　1/16　印张：9.75　字数：160 000

2004年9月第1版　2005年11月黑龙江第3次印刷

印数：40,000(2006春)

ISBN 7-107-17986-1 / G·11075(课)　定价：9.86元

说 明

《全日制普通高级中学教科书·数学》是根据教育部2002年颁布的《全日制普通高级中学课程计划》和《全日制普通高级中学数学教学大纲》，在《全日制普通高级中学教科书（试验修订本）·数学》的基础上修订而成的. 此次修订的指导思想是：遵循“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”的战略思想，贯彻教育必须为社会主义现代化建设服务，必须与生产劳动相结合，培养德、智、体、美全面发展的社会主义事业的建设者和接班人的方针，以全面推进素质教育为宗旨，全面提高普通高中教育质量.

普通高中教育，是与九年义务教育相衔接的高一层次的基础教育. 高中教材的编写，旨在进一步提高学生的思想道德品质、文化科学知识、审美情趣和身体心理素质，培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力和适应社会生活的能力，促进学生的全面发展，为高一级学校和社会输送素质良好的合格的毕业生.

《全日制普通高级中学教科书·数学》（以下简称《数学》）包括三册，其中第一册、第二册是必修课本，分别在高一、高二学习，每周4课时；第三册是选修课本，在高三学习，它又分为选修Ⅰ和选修Ⅱ两种，每周分别为2课时和4课时.

这套书的第二册又分为上、下两个分册，分别供高二上、下两个学期使用. 本书是《数学》第二册（下A），内容包括直线、平面、简单几何体（根据大纲“教学内容和教学要求”中的9（A)部分编写），排列、组合和二项式定理，概率三章，供高二下学期使用.

全套书在体例上有下列特点：

1. 每章均配有章头图和引言，作为全章内容的导入，初步了解学习这一章的必要性.

2. 书中习题共分三类：练习、习题、复习参考题.

练习　以复习相应小节的教学内容为主，供课堂练习用.

习题　每小节后一般配有习题，供课内、外作业选用，少数标有*号的题在难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用.

复习参考题　每章最后配有复习参考题，分 *A*、*B* 两组，*A* 组题是属于基本要求范围的，供复习全章使用；*B* 组题带有一定的灵活性，难度上略有提高，仅供学有余力的学生选用.

3. 每章在内容后面均安排有小结与复习，包括内容提要、学习要求和需要注意的问题、参考例题三部分，供复习全章时参考.

4. 每章附有一至两篇不作教学要求的阅读材料，供学生课外阅读，借以扩大知识面、激发学习兴趣、培养应用数学的意识.

本套书由人民教育出版社中学数学室编写，其中《数学》第二册（下A）原试验本由田载今、薛彬主持编写，参加编写的有：田载今、饶汉昌等，责任编辑为蔡上鹤、康合太、李海东，审稿为方明一.

《数学》第二册（下A）原试验本在编写过程中蒙孔令颐、吴之季、刘玉翘、陈捷、朱长盛、戴佳珉等同志提出宝贵意见，在此表示衷心感谢.

参加本次修订的有：田载今、左怀玲等. 责任编辑为李海东.

本书经全国中小学教材审定委员会2003年审查通过.

人民教育出版社中学数学室

2004年6月

目 录

第九章　直线、平面、简单几何体

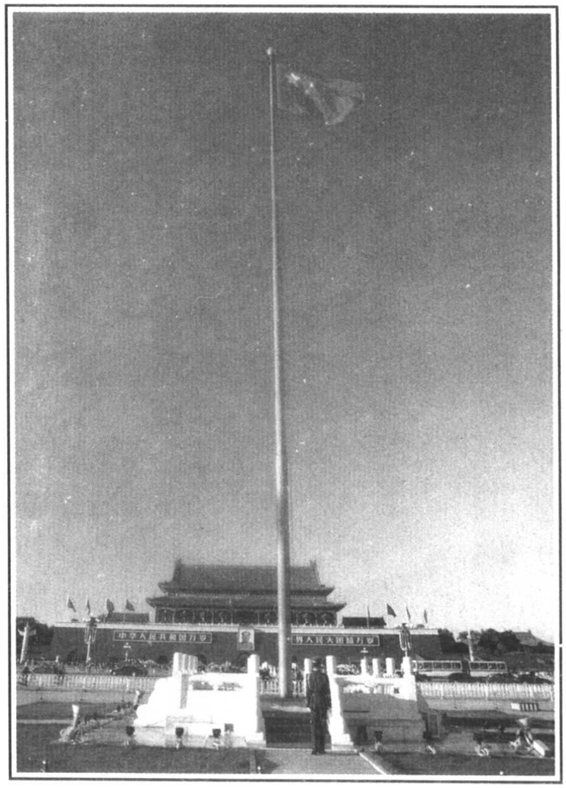
第十章　排列、组合和二项式定理

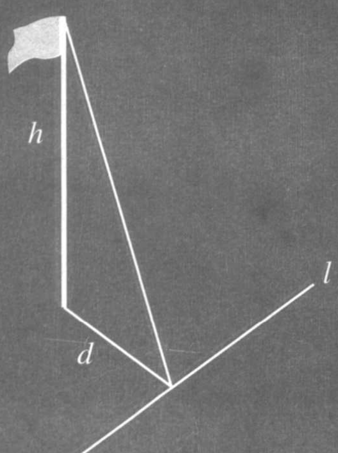
第十一章　概　率

本书部分常用符号

$A \in a$	点 A 在直线 a 上
$A \notin a$	点 A 不在直线 a 上
$A \in \alpha$	点 A 在平面 α 内
$A \notin \alpha$	点 A 在平面 α 外
$\alpha \cap \beta = a$	平面 α 和平面 β 的交线是 a
$a \subset \alpha$ 或 $a \subsetneqq \alpha$	直线 a 在平面 α 内
$a \not\subset \alpha$ 或 $a \nsubseteq \alpha$	直线 a 不在平面 α 内
$a \cap b = A$	直线 a 和直线 b 相交于点 A
$a \cap \alpha = A$	直线 a 和平面 α 相交于点 A
$a /\!/ \alpha$	直线 a 和平面 α 互相平行
$\alpha /\!/ \beta$	平面 α 和平面 β 互相平行
$a \perp \alpha$	直线 a 和平面 α 互相垂直
$\alpha \perp \beta$	平面 α 和平面 β 互相垂直
α-AB-β（或 α-a-β）	棱为 AB，面为 α、β 的二面角（或棱为 a，面为 α、β 的二面角）
A_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数
$n!$	正整数 1 到 n 的连乘积
C_n^m	从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数
$P(A)$	事件 A 的概率
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件
$A \cdot B$	事件 A，B 同时发生

第九章　直线、平面、简单几何体





人们在研究物体的形状、大小和位置关系时，认识了各种各样的几何图形，例如线段、三角形、圆、长方体、球等．在初中几何里，我们已经研究过一些几何图形，并且认识到几何图形都可以看作点的集合．

空间中的一些点组成线和面，这些点、线、面构成空间中的几何图形，可以说空间图形是空间中一些点的集合．组成空间图形的点可以都在同一平面内，也可以不都在同一个平面内．像线段、三角形、圆等图形那样，各点都在同一个平面内的图形是平面图形．像长方体、球等图形那样，各点不都在同一个平面内的图形是立体图形．初中几何主要研究平面图形，也涉及一些简单的立体图形．平面图形和立体图形都是空间图形．

土木建筑、机械设计、航行测绘等大量的实际问题，都要涉及对立体图形的研究．例如，左页图中的旗杆垂直立在地平面上，旗杆与地平面内的直线存在什么样的位置关系？竖立旗杆时怎样才能保证它垂直立于地平面上？如果旗杆的高度为 h，旗杆底端与地平面内某条直线 l 间的距离为 d，那么旗杆顶端到 l 的距离是多少？要解决这类问题，就要用到有关立体图形的知识．

研究立体图形，一方面要注意立体图形问题与平面图形问题的区别，考虑问题时要着眼于整个空间，而不能局限于一个平面；另一方面要注意立体图形与平面图形的联系，立体图形中有些点在同一平面内，对平面图形的研究是讨论立体图形的基础，立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决．

学习关于立体图形的知识，需要空间想象力，即对于几何图形的形状、大小、位置关系及其运动变化的认识与处理的能力．

本章将在初中几何知识的基础上，进一步研究有关立体图形的基础知识，研究对象主要包括最基本的立体图形——空间的直线、平面和简单几何体，研究内容主要是这些对象的几何性质、位置关系的判定、画法、度量计算以及相关的应用等．

一　空间直线和平面

9.1　平　面

1. 平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面，就是从这样的一些物体中抽象出来的．但是，几何里的平面是无限延展的．

直线也是无限延伸的．通常我们画出直线的一部分来表示直线．同样地，我们也可以画出平面的一部分来表示平面．当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很像平行四边形．因此，通常画平行四边形来表示平面（图 9-1）．当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成邻边的 2 倍长．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 9-2）．这样，看起来立体感强一些．

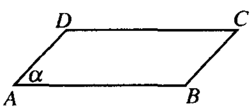


图 9-1

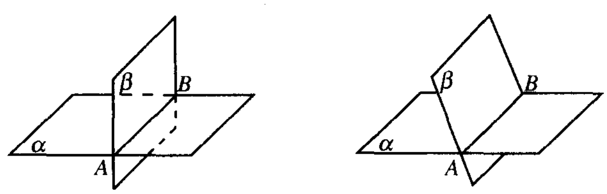


图 9-2

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 9-1）．

平面内有无数个点，平面可以认为是由它内部的所有的点组成的点集，其中每个点都是它的元素．点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 在平面 α 外，记作 $B\notin\alpha$（图 9-3）．

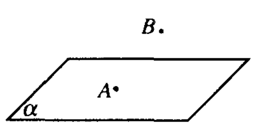


图 9-3

2. 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础．

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上. 人们经常根据这个道理来检验物体的表面是否平整.

直线也是由无数个点组成的集合. 点 P 在直线 l 上，记作 $P\in l$；点 P 在直线 l 外，记作 $P\notin l$. 如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说**直线 l 在平面 α 内**，或者说**平面 α 经过直线 l**，记作 $l\subset\alpha$. 否则，就说**直线 l 在平面 α 外**，记作 $l\not\subset\alpha$.

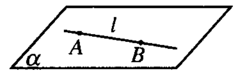


图 9-4

公理 1 的含义如图 9-4 所示，也可以用符号表示为

$$A\in l,\ B\in l,\ A\in\alpha,\ B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha.$$

公理 2　如果两个平面[1]有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

[1] 在本章中，没有特别说明的"两个平面"，均指不重合的两个平面.

例如，房间里墙角处的那个点是相邻两面墙的公共点，这两面墙还有其他公共点，这些公共点的集合就是这两面墙的公共直线.

如果平面 α 和 β 有一条公共直线 l，就说**平面 α 和 β 相交**，交线是 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

公理 2 的含义如图 9-5 所示，也可以用符号表示为

$$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l \text{ 且 } P\in l.$$

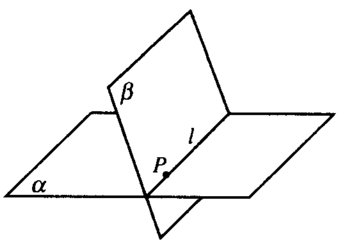


图 9-5

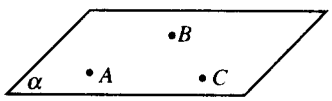


图 9-6

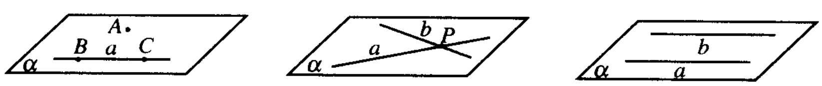
公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 9-6）.

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

过 A、B、C 三点的平面又可记作"平面 ABC".

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图 9-7（1））.



(1)　(2)　(3)

图 9-7

证明：设点 A 不在直线 a 上，在直线 a 上任取两点 B 和 C，于是有 $A \notin a$，$B \in a$，$C \in a$，即 A、B、C 为不共线的三点．根据公理 3，经过 A、B、C 三点有一个平面 α．因为 $B \in \alpha$，$C \in \alpha$，所以由公理 1 可知 $a \subset \alpha$，即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面．

又根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 的平面只有一个，所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个．

推论 1 可以用符号表示为

$A \notin a \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $A \in \alpha$，$a \subset \alpha$．

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面（图 9-7（2））．

我们规定：直线 a 和 b 相交于点 P，记作 $a \cap b = P$．

推论 2 可以用符号表示为

$a \cap b = P \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$．

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面（图 9-7（3））．

推论 3 可以用符号表示为

$a /\!/ b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $a \subset \alpha$，$b \subset \alpha$．

推论 2、推论 3 的证明与推论 1 的证明类似．

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”．

公理 3 及它的三个推论给出了确定一个平面时经常使用的一些条件．

例　如图 9-8，直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C，判断这三条直线是否共面❶并说明理由．

❶ 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，那么可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”．

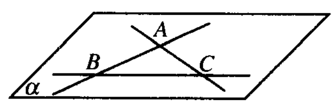


图 9-8

解：　这三条直线共面，理由如下：

∵　直线 AB 和 AC 相交于点 A，

∴　直线 AB 和 AC 确定一个平面 α（推论 2）．

∵　$B \in AB$，$C \in AC$，

∴　$B \in \alpha$，$C \in \alpha$．

∴　$BC \subset \alpha$（公理 1）．

因此，直线 AB、BC、CA 都在平面 α 内，即它们共面．

从以上可知，证明三条直线共面，可以先证其中两条直线共面，再证第三条直线也在这个平面内．

练习

1. 填空：

正方体的各顶点如图所示，正方体的三个面所在平面 A_1C_1、A_1B、BC_1 分别记作 α、β、γ.

(1) $A_1\in\alpha$，B_1 ___ α，

C_1 ___ α，D_1 ___ α；

(2) $A\in\beta$，B ___ β，

A_1 ___ β，B_1 ___ β；

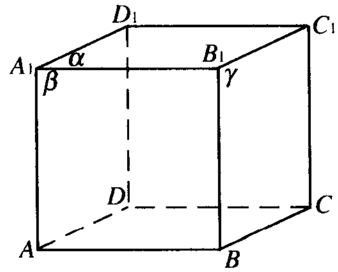
(3) $A\notin\alpha$，B ___ α，

A ___ γ，B ___ γ；

(4) $\alpha\cap\beta=A_1B_1$，

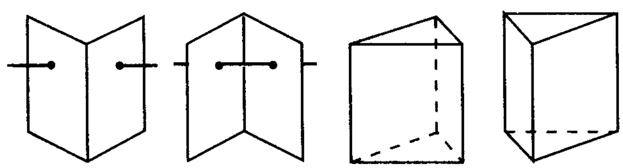
$\beta\cap\gamma=$ ____，

$\alpha\cap\gamma=$ ____.



(第 1 题)

2. 观察 (1)、(2) 中甲、乙两个图形，用模型说明它们的位置有什么不同，并用字母来表示各个平面.



甲　　乙　　甲　　乙

(1)　　(2)

(第 2 题)

3. 用生活中的实例说明本节的公理及推论.

4. 用符号表示下列语句，并画出图形：

(1) 点 A 在平面 α 内，点 B 在平面 α 外；

(2) 直线 l 在平面 α 内，直线 m 不在平面 α 内；

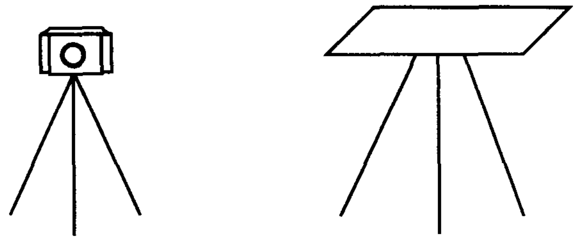
(3) 平面 α 和 β 相交于直线 l；

(4) 直线 l 经过平面 α 外一点 P 和平面 α 内一点 Q；

(5) 直线 l 是平面 α 和 β 的交线，直线 m 在平面 α 内，l 和 m 相交于点 P.

习题 9.1

1. 为什么照相机支架、平板仪（如图）都只用三条腿就够了？



（第 1 题）

2. （1）为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？

（2）怎样用两根拉紧的细线来检验桌子的四条腿的底端是否共面？

3. 填空：在图中，

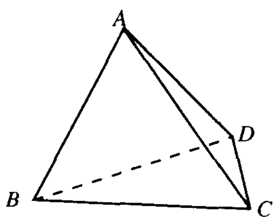
A ______平面 ABC，

A ______平面 BCD，

BD ______平面 ABD，

BD ______平面 ABC，

平面 $ABC\cap$平面 $ACD=$______，______$\cap$______$=BC$.



（第 3 题）

4. 用符号表示下列语句，并画出图形：

（1）点 P 在平面 α 内，但在平面 β 外；

（2）直线 l 在平面 α 内，但不在平面 β 内；

（3）直线 l 和 m 相交于点 P；

（4）平面 α 和 β 的交线是 l，点 P 在 l 上；

（5）直线 l 经过平面 α 内一定点 P，但 l 在 α 外.

5. 选择题：

（1）经过同一直线上的 3 个点的平面（　）

（A）有且只有 1 个.　　（B）有且只有 3 个.

（C）有无数个.　　（D）只有 0 个.

（2）直线 a、b、c 两两平行，但不共面，经过其中两条直线的平面共有（　）

（A）1 个.　（B）3 个.　（C）0 个.　（D）6 个.

（3）直线 a、b、c 交于一点，经过这 3 条直线的平面（　）

（A）有 0 个.（B）有 1 个.（C）有无数个.

（D）可以有 0 个，也可以有 1 个.

（4）过不共面的 4 个点中的 3 个点的平面共有（　）

（A）0 个.　（B）3 个.　（C）4 个.　（D）无数个.

6. 不共面的 4 个点中能否有 3 个点共线？为什么？

7. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

8. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

9. 一条直线与两条平行直线都相交，判断这三条直线是否在同一个平面内并

说明理由.

10. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线，判断这三条直线是否在同一个平面内并说明理由.

11. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

9.2 空间直线

1. 空间两条直线的位置关系

在初中几何里已经介绍了空间的两条直线❶有以下三种位置关系：

(1) **相交直线**——有且仅有一个公共点；

(2) **平行直线**——在同一个平面内，没有公共点；

(3) **异面直线**——不同在任何一个平面内，没有公共点.

❶ 本章中没有特别说明的“两条直线”，均指不重合的两条直线.

例如在图 9-9 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 AB 与 BC 是相交直线，直线 AB 与 A_1B_1 是平行直线，直线 AB 与 CC_1 是异面直线.

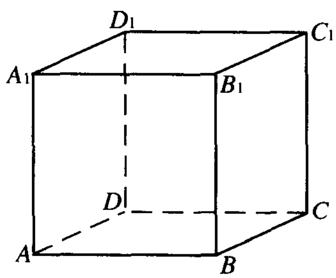


图 9-9

两条直线相交或平行时，确定一个平面. 但是，三条直线交于一点或两两互相平行时，它们不一定共面. 例如图 9-9 中，直线 AA_1、AB、AD 相交于点 A，它们不共面；直线 AA_1、BB_1、CC_1 两两互相平行，它们也不共面.

2. 平行直线

我们在初中几何里已经知道，在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行. 对于空间的三条直线，是否也有这样的规律？例如，房间里墙与墙的交线，如果 $AA' /\!/ BB'$，$CC' /\!/ BB'$，那么是否有 $AA' /\!/ CC'$（图 9-10）？可以发现，答案是肯定的.

我们把上述规律作为本章的第 4 个公理.

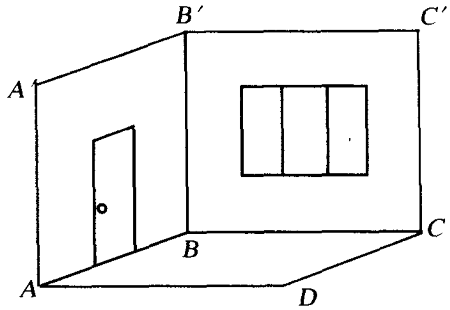


图 9-10

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

公理 4 也可以用符号表示如下：

设 a、b、c 为直线，

$$\left.\begin{array}{l} a // b \\ c // b \end{array}\right\} \Rightarrow a // c.$$

a、b、c 三条直线两两平行，可以记为 $a // b // c$.

例 1　已知四边形 $ABCD$ 是空间四边形❶，E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是边 CB、CD 上的点，且 $\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{2}{3}$，求证四边形 $EFGH$ 有一组对边平行但不相等.

❶ 四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.

证明：如图 9-11，连结 BD.

∵　EH 是△ABD 的中位线，

∴　$EH // BD$，$EH=\dfrac{1}{2}BD$.

又在△BCD 中，$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD}=\dfrac{2}{3}$，

∴　$FG // BD$，$FG=\dfrac{2}{3}BD$.

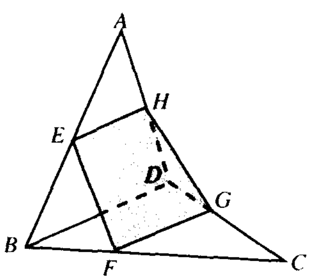


图 9-11

根据公理 4，$EH // FG$.

又　$FG > EH$，

∴　四边形 $EFGH$ 的一组对边平行但不相等.

由公理 4，我们可以推出下面的结论.

定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB // A'B'$，$AC // A'C'$，并且方向相同❶.

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

❶ 这里 $AB // A'B'$ 并且方向相同，即向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{A'B'}$ 的方向相同.

证明：对于$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$都在同一平面内的情况，用初中几何知识可证明．下面我们证明两个角不在同一平面内的情况．

如图 9-12，在 AB、$A'B'$，AC、$A'C'$ 上分别取 $AD=A'D'$、$AE=A'E'$，连结 AA'、DD'、EE'、DE、$D'E'$．

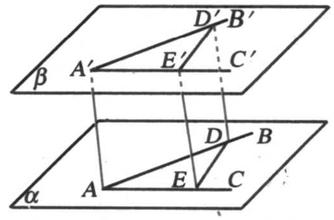


图 9-12

∵ $AB /\!/ A'B'$，$AD=A'D'$，

∴ 四边形 $AA'D'D$ 是平行四边形．

∴ $AA' \underline{/\!/} DD'$．

同理 $AA' \underline{/\!/} EE'$．

根据公理 4，可得 $DD' /\!/ EE'$．

又可得 $DD'=EE'$，

∴ 四边形 $EE'D'D$ 是平行四边形．

∴ $ED=E'D'$．于是$\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$．

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$．

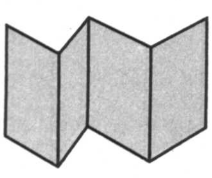
把上面两个角的两边反向延长，就得出下面的推论：

推论 **如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等．**

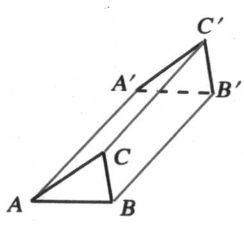
对于平面图形得出的结论，有些可以推广到立体图形．例如，上面的定理和推论对于平面图形都成立，现在经证明可知对于立体图形也成立．但是，并非所有关于平面图形成立的结论，对于立体图形仍然适用．例如，在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行，但在空间里没有这样的结论（图 9-10 中，$AB \perp BB'$，$BC \perp BB'$，但是 AB 与 BC 不平行）．因此，一般地说，要把关于平面图形的结论推广到立体图形，必须经过证明．

练　习

1. 如图，把一张长方形的纸对折几次，然后打开，说明为什么这些折痕互相平行．



（第 1 题）



（第 2 题）