

职工文化教育读本

高中数学辅导

(第一册)

山东科学技术出版社

ZHI GONG WEN HUA JIAO YU DI REN

理工大全新教材

高中物理
必修1

(第一册)

人民教育出版社

高中物理必修1

职工文化教育读本

高中数学辅导

第一册

山东省职工教育办公室 编

山东科学技术出版社

一九八五年·济南

职工文化教育读本

高中数学辅导

第一册

山东省职工教育办公室 编

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

*

787×1092毫米32开本 3印张 .71千字

1985年2月第1版 1985年2月第1次印刷

印数: 1—23,000

书号 13195·131 定价 1.35 元

内 容 简 介

本书是职工业余中等学校高中数学课本（教育部组织编写、上海教育出版社出版）的配套辅导读物，也可单独使用。它符合教育部制定的《职工业余中等学校数学教学大纲（试行草案）》中规定的内
容、范围和要求。

这套读物分二册。第一册的内容是函数，三角函数等二章；第二册的内容是空间图形，直线、曲线方程，复数、数列和排列、组合等三章，文科高中选用第一册。

考虑到业余教育的特点，书中除对每节内容给出提要外，还列举了大量的例题，其中有些是原课本中的典型习题。另外，增加了部分练习题和每章后的复习题，以期把所学知识向深、广两个方面适当引伸，为进一步升入电视大学和职工大学学习创造条件。各章的复习题都做了解答，供读者参考。

本册由山东省职工教育办公室组织编写，朱皆修执笔。

这套读物可作为青壮年职工自学、复习高中数学基本知识，加强基本技能训练的参考书，也可供职工学校教师教学时参考。

出版说明

职工教育是开发智力、培养人材的重要途径，是持续发展国民经济的可靠保证，它同现代化建设有着极其密切的关系，因此，必须抓紧抓好职工教育。

为适应职工教育全面开展和广大读者业余自学的迫切需要，我们编写了这套《职工文化教育读本》。它是根据成人和速成的特点，在现行的职工业余中等学校课本的基础上而编写的。这套书由浅入深，循序渐进，内容充实，文字简练，可以在较短的时间掌握业余中等学校应该掌握的相应内容；在着重讲清基本概念和基础知识的同时，重视培养分析问题、解决问题的能力 and 解题技巧的训练；每节后配有一定数量的习题，书末有答案备查。

这套丛书可作为职工教育的补充教材，也可作为广大青年的自学用书。

目 录

第 1 章 函数	(1)
一、集合	(1)
二、二次函数	(8)
三、一元一次不等式组和一元二次不等式	(25)
四、幂函数	(37)
五、指数函数	(51)
六、对数	(58)
七、对数函数	(67)
复习题一	(87)
第 2 章 三角函数	(89)
一、角的概念的推广和角的度量	(89)
二、任意角的三角函数	(93)
三、斜三角形的解法	(116)
四、三角函数的图象和性质	(133)
五、两角和、两角差的三角函数	(152)
六、反三角函数	(177)
七、简单的三角方程	(191)
复习题二	(205)
附 录	(208)
一、练习题答案或提示	(208)
二、复习题解答	(234)

第 1 章 函 数

一、集 合

I 内 容 提 要

1. 集合

集合是数学中最原始的概念之一，它是学习数学各个分支的基础。它没有严格的数学定义，只能作描述性的说明：

“把具有某种属性的一些对象看作一个整体便形成一个集合”。集合里的各个对象叫做集合的元素。在一个集合里，它所含元素必须是确定的；各个元素是互不相同的；而且元素之间是没有顺序的。

集合的表示方法通常有列举法和描述法。

集合按所包含的元素的个数可分：有限集合和无限集合。不含任何元素的集合叫做空集，记为 ϕ 。

2. 子集

若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ 。

若 $A \subseteq B$ ，且集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A ，则称集合 A 为集合 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。并规定 $\phi \subset A$ (A 为非空集合)。

若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。

若 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$ 。

3. 交集

由同属于集合 A 和 B 的一切元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

$$A \cap A = A, \quad \phi \cap A = \phi.$$

4. 并集

由属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素所组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

$$A \cup A = A, \quad A \cup \phi = A.$$

5. 补集

已知全集 I , $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做集合 A 的补集, 记为 $\bar{A}$

$$A \cup \bar{A} = I, \quad A \cap \bar{A} = \phi.$$

II 例 题

例1 用适当的方法表示下列集合: (1) 平方等于4的数集. (2) 全体正的偶数集.

解 (1) 描述法表示: $\{\text{平方等于4的数}\}$; 或 $\{x | x^2 = 4\}$ 。

列举法表示: $\{-2, 2\}$ 。

(2) 描述法表示: $\{\text{全体正的偶数}\}$; 或 $\{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ 。

列举法表示: $\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ 。

注 例子告诉我们, 一个集合的表示方法不是唯一的。一般应按照需要选取简单、明确的表示方法。如 (1) 中的 $\{x | x^2 = 4\}$ 或 $\{-2, 2\}$, (2) 中 $\{x | x = 2n, n$

$\in N\}$.

例2 分析 0 ; ϕ ; $\{0\}$ 之间的关系.

解 0 是一个元素; ϕ 是不含有元素的集合——空集;
 $\{0\}$ 是只含有一个元素 0 的集合. 因此它们之间的关系:
 $0 \notin \phi$; $0 \in \{0\}$; $\phi \subset \{0\}$.

例3 设 $A = \{x | 3x^2 + 5x - 2 = 0, x \in R\}$,

(1) 用列举法写出集合 A . (2) 写出 A 的所有子集.

解 (1) A 所含元素就是一元二次方程的根. 所以

$$A = \{x | 3x^2 + 5x - 2 = 0, x \in R\} = \{-2, \frac{1}{3}\}.$$

(2) A 的所有子集: ϕ , $\{-2\}$, $\{\frac{1}{3}\}$, $\{-2, \frac{1}{3}\}$.

注 ϕ 是任一非空集合的子集; 集合 A 是自身的子集.

例4 设 $A = \{\text{有理数}\}$, $B = \{\text{无理数}\}$. 求 (1) $A \cap B$. (2) $A \cup B$.

解 (1) $A \cap B = \{\text{有理数}\} \cap \{\text{无理数}\} = \phi$.

(2) $A \cup B = \{\text{有理数}\} \cup \{\text{无理数}\} = \{\text{实数}\} = R$.

例5 设 $A = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$, $B = \{(x, y) | x - y = 2\}$, $C = \{(x, y) | 2x - 2y = 3\}$, $D = \{(x, y) | 6x + 4y = 2\}$. 求: (1) $A \cap B$; (2) $B \cap C$; (3) $A \cap D$.

分析 两个二元一次方程解集的交集就是由这两个二元一次方程所构成的方程组的解.

解 (1) $A \cap B = \{(x, y) | 3x + 2y = 1\}$
 $\cap \{(x, y) | x - y = 2\}$

$$= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \right\} = \{ (1, -1) \}.$$

$$(2) B \cap C = \{ (x, y) \mid x - y = 2 \}$$

$$\cap \{ (x, y) \mid 2x - 2y = 3 \}$$

$$= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \right\} = \phi.$$

$$(3) A \cap D = \{ (x, y) \mid 3x + 2y = 1 \}$$

$$\cap \{ (x, y) \mid 6x + 4y = 2 \}$$

$$= \left\{ (x, y) \mid \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases} \right\}$$

$$= \{ (x, y) \mid 3x + 2y = 1 \}.$$

注 (2) 说明方程组无解; (3) 说明方程组有无数组解, 但作为方程组解的“实数对”必须受其中一个二元一次方程制约.

例 6 设全集 $I = R = \{ \text{实数} \}$, $A = \{ x \mid -5 < x < 5 \}$, $B = \{ x \mid 0 \leq x < 7 \}$, 试分别求: (1) $A \cap B$; (2) $\overline{A}$; (3) $\overline{B}$; (4) $\overline{A \cap B}$; (5) $\overline{A \cup B}$; (6) $\overline{A \cap B}$; (7) $\overline{A \cup B}$.

解 (1) $A \cap B = \{ x \mid -5 < x < 5 \} \cap \{ x \mid 0 \leq x < 7 \}$

$$= \{ x \mid 0 \leq x < 5 \};$$

$$(2) \bar{A} = \{x|x \leq -5\} \cup \{x|x \geq 5\};$$

$$(3) \bar{B} = \{x|x < 0\} \cup \{x|x \geq 7\};$$

$$(4) \bar{A} \cap \bar{B} = \{x|x \leq -5\} \cup \{x|x \geq 7\};$$

$$(5) \bar{A} \cup \bar{B} = \{x|x < 0\} \cup \{x|x \geq 5\};$$

$$(6) \overline{A \cap B} = \{x|x < 0\} \cup \{x|x \geq 5\};$$

$$(7) \overline{A \cup B} = \{x|x \leq -5\} \cup \{x|x \geq 7\}.$$

例7 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$,
 验证: 如果 $P = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, 那么 $\bar{P} = (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$.

证明 $\bar{A} = \{6, 7, 8\}$, $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \text{又 } P &= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \bar{B} \cup \bar{A} \\ &= \{1, 2, 3, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{P} = \{4, 5\},$$

$$\text{而 } (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = B \cap A = \{4, 5\}$$

$$\therefore \bar{P} = (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}).$$

III 练习题1—1

1. 用适当的方法表示下列集合:

(1) 非负实数的集合;

(2) 小于20的质数的集合;

(3) 平方和自己相等的数的集合;

- (4) 所有被 3 整除的数的集合；
 (5) 所有三角形的集合；
 (6) 开区间 $(-5, 5)$ 内所有有理数的集合；
 (7) 闭区间 $[-1, 1]$ 内所有实数的集合；
 (8) 圆心在坐标原点，半径为 R 的圆上所有的点的集合；
 (9) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解集；
 (10) 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的解集。

2. 在____处填上适当的符号：($\in$, $\notin$)

- (1) 0 ____ $\{0\}$; (2) 0 ____ ϕ ;
 (3) 0 ____ $\{\text{偶数}\}$; (4) 1 ____ $\{\text{质数}\}$;
 (5) 3.1416 ____ $\{\text{无理数}\}$;
 (6) 4 ____ $\{12\text{的质因数}\}$;
 (7) 菱形 ____ $\{\text{平行四边形}\}$;
 (8) 多项式 ____ $\{\text{整式}\}$;
 (9) $\sqrt{3}$ ____ $\{3\text{的平方根}\}$;
 (10) $(1, -1)$ ____ $\{(x, y) | 5x - 3y = 8\}$ 。

3. 在____处填上适当的符号：($\subset$, $\supset$, $=$)

- (1) I ____ N ; (2) R^+ ____ R ;
 (3) ϕ ____ $\{0\}$;
 (4) $\{x | x \leq 0\}$ ____ $\{x | x < 1\}$;
 (5) $A \cap B$ ____ B ; (6) A ____ $A \cup B$;
 (7) $A \cap B$ ____ $B \cap A$; (8) $A \cup B$ ____ $A \cap B$;
 (9) $A \cap \phi$ ____ A ;
 (10) $\{1, 2\}$ ____ $\{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 。

4. 集合 $\{a, b, c\}$ 的子集共有多少？并把它写出来。

5. 已知集合 A 和 B , 求 $A \cap B$;

(1) $A = \{\text{偶数}\}, B = \{\text{奇数}\};$

(2) $A = \{\text{有理数}\}, B = \{\text{整数}\};$

(3) $A = \{\text{非负数}\}, B = \{\text{非正数}\};$

(4) $A = \{x | x < 5, x \in Q\},$

$B = \{x | x \geq 0, x \in Q\};$

(5) $A = \{(x, y) | x + 2y = 3\},$

$B = \{(x, y) | 2x - y = 1\}.$

6. 已知集合 A 和 B , 求 $A \cup B$;

(1) $A = \{\text{正数}\}, B = \{\text{负数}\};$

(2) $A = \{a, c, f\}, B = \{a, b, d, e, f\};$

(3) $A = \{\text{整式}\}, B = \{\text{分式}\};$

(4) $A = \{\text{直角三角形}\}, B = \{\text{等腰直角三角形}\};$

(5) A 是不等式 $2x - 3 > 0$ 的解集, B 是不等式

$\frac{1}{3} - \frac{x}{2} < 0$ 的解集.

7. 若 $A \subset B$, 则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cup (A \cap B)$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$; $A \cap (A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. (1) 设全集 $I = R = \{\text{实数}\}, Q = \{\text{有理数}\}$, 求

$\overline{Q}, Q \cap \overline{Q}, \overline{Q} \cup Q.$

(2) 设全集 $I = N = \{\text{自然数}\}, A = \{\text{质数}\}, B =$
 $\{\text{合数}\}$. 求 $\overline{B}, A \cap B, \overline{A \cap B}, \overline{A \cup B}$

(3) 设全集 $I = \{x | 2 \leq x \leq 20, x \in J\}, A = \{\text{4 的倍}$
 $\text{数}\}, B = \{\text{3 的倍数}\}, C = \{\text{质数}\}, D = \{\text{偶数}\}.$

求 $\overline{D}, A \cap B, B \cup C, B \cap C, C \cap \overline{D}, \overline{A}, \overline{D \cap C}.$

9. 设全集 $I = R = \{ \text{实数} \}$, $A = \{ x \mid |x| < 4 \}$, $B = \{ x \mid x \geq 0 \}$, 求 $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cap B$; $A \cup B$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A \cup B}$.

10. 写出方程组
$$\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=4 \\ z+x=5 \end{cases}$$
 的解的集合.

11. 设 $I = \{ \text{某车间全体职工} \}$, $A = \{ \text{某车间的全体男职工} \}$, $B = \{ \text{某车间的全体团员} \}$, $C = \{ \text{某车间的全体先进工作者} \}$. 用集合符号表示: (1) 这个车间全体女职工中的先进工作者; (2) 这个车间全体团员中的先进工作者; (3) 非团员中的全体先进工作者.

二、二次函数

I 内容提要

1. 函数的定义

如果对于变量 x 属于集合 M 的每一个值, 变量 y 都有唯一确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 确定在 M 上的一个函数, 记为 $y = f(x)$, 变量 x 叫做自变量.

集合 M 叫做函数的定义域. 函数值的集合叫做函数的值域.

2. 二次函数

(1) 定义: 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数. 其定义域 $x \in R$.

(2) 图象: 函数 $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 它的图象是以 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 为顶点, 以直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 为对称轴的抛物线。

(3) 性质:

开口方向 $\begin{cases} a > 0, \text{ 开口向上} & \begin{cases} x > -\frac{b}{2a} & \text{函数值随} x \text{ 的增大而增大.} \\ x < -\frac{b}{2a} & \text{函数值随} x \text{ 的增大而减小.} \end{cases} \\ a < 0, \text{ 开口向下} & \begin{cases} x > -\frac{b}{2a} & \text{函数值随} x \text{ 的增大而减小.} \\ x < -\frac{b}{2a} & \text{函数值随} x \text{ 的增大而增大.} \end{cases} \end{cases}$

极值 $\begin{cases} a > 0, x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, } y \text{ 有最小值 } y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a}. \\ a < 0, x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, } y \text{ 有最大值 } y_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{cases}$

3. 区间的概念

若 a, b 是实数, 且 $a < b$, 把满足 $a \leq x \leq b$ 的一切实数 x 的集合叫做闭区间, 记为 $[a, b]$; 把满足 $a < x < b$ 的一切实数 x 的集合叫做开区间, 记为 (a, b) ; 把满足 $a \leq x < b$, 及 $a < x \leq b$ 的一切实数 x 的集合都叫做半开半闭区间记为 $[a, b)$ 及 $(a, b]$; 把满足 $x \geq a, x > a, x \leq b, x < b$ 的实数 x 的全体分别记为: $[a, +\infty), (a, +\infty),$

$(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 。

II 例 题

例1 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -1-x^2 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1+x & (x > 0) \end{cases}$ 。

求: $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ 。

分析 已知函数是个分段函数。当自变量 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 函数的解析式是 $f(x) = -1 - x^2$; 当自变量 $x = 0$ 时, 解析式是 $f(x) = 0$; 当自变量 $x \in (0, +\infty)$ 时, 解析式是 $f(x) = 1 + x$ 。

解 $f(-1)$ 表示当 $x = -1$ 时, 函数 $f(x) = -1 - x^2$ 的值。 $\therefore f(-1) = -1 - (-1)^2 = -2$ 。

$f(0)$ 表示当 $x = 0$ 时, 函数 $f(x) = 0$ 的函数值,

$\therefore f(0) = 0$ 。

$f(1)$ 表示当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x) = 1 + x$ 的函数值,

$\therefore f(1) = 1 + 1 = 2$ 。

例2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{x-2}{(x+5)(x-3)};$$

$$(2) y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + 4,$$

$$(3) y = \frac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}}。$$