



An Introduction to Inequalities

不等式入门

王中烈 刘 文 著





数据加载失败，请稍后重试！

不等式启蒙

王中烈 刘文著

辽宁教育出版社

1985年·沈阳

不等式启蒙
王中烈 刘文著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数: 74,000 开本: $787 \times 1092 \frac{1}{2}$ 印张: $3 \frac{1}{2}$
印数: 1—6,000

1985年8月第1版

1985年8月第1次印刷

责任编辑: 俞晓群

责任校对: 王淑芬

封面设计: 赵多良

统一书号: 7371·8

定价: 0.62 元

内 容 提 要

本书是为高中学生和中学数学教师写的课外读物。书中提出了八个基本不等式，即算术—几何平均不等式、荷尔德不等式、闵可夫斯基不等式、杨格不等式、贝努利不等式、哥西不等式、几何—调和平均不等式和幂平均不等式。并详细地讨论了它们之间的关系。

除偶而用到极限与连续的简单概念外，所有的讨论都是初等的。

书中给出了三十三个有趣的极值问题的初等解法，以说明书中所讲的不等式理论的用处。还附有一百个习题。

本书作者：王中烈，加拿大里贾纳大学数学统计系教授；刘文，中国河北工学院数理研究室教授。

An Introduction to Inequalities

Abstract

This book is written for senior high school students and mathematics teachers as an extracurricular reading matter. In this book, we present eight basic inequalities, namely, arithmetic mean-geometric mean, Hölder, Minkowski, Young, Bernoulli, Cauchy, geometric mean-harmonic mean and power-mean inequalities and discuss their relation in full detail.

All discussions are elementary, except that the simple concepts of limit and continuity are used occasionally.

Finally, the solutions of thirty-three interesting pro-

blems about extrema are given in order to reveal the applicability of the inequalities. One hundred problems are offered.

Addresses of the Authors

1. Prof. Chung-lie Wang

Department of Mathematics & Statistics
University of Regina
Regina, Saskatchewan
Canada S4S0A2

2. Prof. Liu Wen

Department of Mathematics
Hebei Institute of Technology
Tianjin, China

目 录

一 引言	1
二 算术—几何平均不等式	4
1. 算几不等式的雏形	4
2. 三个数的算几不等式	5
3. n 个数的算几不等式	7
4. 算几不等式的一个应用	10
5. 算几不等式的一般形式	12
6. 关于和与积的极值定理	16
7. 几何—调和平均不等式	19
8. 算几不等式的两个推论	21
9. 算几不等式的推广	25
三 荷尔德不等式	31
1. 哥西不等式	31
2. 荷尔德不等式的两个特例	33
3. 荷尔德不等式的一般形式	36
4. 荷尔德不等式的加权形式	41
5. 加权幂平均不等式	42

四	闵可夫斯基不等式	46
	1. 绝对值不等式.....	46
	2. 三角不等式.....	47
	3. 闵可夫斯基不等式的一般形式.....	49
	4. 闵可夫斯基不等式的加权形式.....	52
	习题 (第一至第四部分)	54
五	不等式在极值问题中的应用	62
	1. 等周问题.....	62
	2. 其它最大面积问题.....	65
	3. 最大体积问题.....	70
	4. 最小面积与最小体积问题.....	79
	5. 物理与工程中的极值问题.....	85
	6. 经济效益问题.....	92
	7. 杂例.....	94
	8. 小结.....	103
	习题 (第五部分)	104
	参考文献	108
	中英名词、人名对照	113

An Introduction to Inequalities

Contents

I . Foreword	1
II . The Arithmetic mean-geometric mean Inequality	4
1. The Embryonic Form of the Arithmetic mean-geometric mean Inequality	4
2. The Arithmetic mean-geometric mean Inequality of Three Numbers	5
3. The Arithmetic mean-geometric mean Inequality of n Numbers	7
4. An Application of the Arithmetic mean-geometric mean Inequality.....	10
5. The General Form of the Arithmetic mean-geometric mean Inequality	12
6. The Extremum Theorems on Sum and Product	16
7. The Geometric mean-harmonic mean Inequality	19

8. Two Corollaries of the Arithmetic mean	
-geometric mean Inequality.....	21
9. An Extension of the Arithmetic mean	
-geometric mean Inequality.....	25
II. Hölder Inequality	31
1. Cauchy Inequality	31
2. Two Special Cases of Hölder	
Inequality	33
3. The General Form of Hölder	
Inequality	36
4. The Weighted Form of Hölder	
Inequality	41
5. The Weighted Power-mean	
Inequality.....	42
IV. Minkowski Inequality	46
1. Absolute Value Inequality	46
2. Trigonometric Inequality	47
3. The General Form of Minkowski	
Inequality.....	49
4. The Weighted Form of Minkowski	
Inequality	52
Problems of Part One to Part Four.....	54

V. The Applications to Extremum Problems of Inequalities	62
1. The Equiprimeter Problems	62
2. Other Maximum Area Problems	65
3. Maximum Volume Problems	70
4. Minimum Area and Minimum Volume Problems	79
5. Extremum Problems in Physics and Engineering	85
6. Economic Benefit Problems	92
7. Miscellaneous Problems	94
8. Author's Note	103
Problems of Part Five	104
Bibliography	108
Index	113

一 引 言

有法法有尽，无法法无穷。

无法而有法，从一以贯通。

敬录刘子静先生

“学画，《三白集》第一集，一九七三年初版”

数学的发展，无论在哪一个领域，都是围绕着等式问题兜圈子。可是不等式的产生，不但是自然的，而且也是必然的。

人类仿效穿云破雾、翱翔长空的飞禽未遂，却造出了飞机、飞艇；人类仿效越山涉水、攀木缘崖的走兽未遂，却造成了车辆、坦克；人类仿效浮沉自如、水里乾坤的鱼蛟未遂，却造成了船舰、潜艇。这是巧夺天工呢，还是天工巧难夺呢？模仿、模拟、理想与实际存在着自然差距，这就是人类现实生活中的一个天然不等式。相等只是理想，不等才是实际。要解决不等式问题，应从等式着眼；要解等式问题，却要从不等式入手。理想处着眼，实际处入手，这就是研习不等式的背景。

不等式理论可以从分析与几何两种观点分别探求。所谓分析观点，源于实数的基本性质：任何实数的平方为非负

数。所谓几何观点，源于最原始点线关系：两点之间线段最短；线外一点到直线的最短距离是垂直距离。实数分析与平面几何奠定了不等式的理论基础。代数学既方便了不等式的运算，又加速了不等式的繁衍。几何、分析与代数综合运用，使不等式的理论与技巧愈来愈多元化，并产生新层次与新关联。反过来，不等式不仅在分析、代数与几何领域扮演重要的角色，而且在应用数学中作用更为突出。举例来说，数值分析、近似理论中所考虑的误差精确度的上、下界；优化理论、数学规划所讨论的极值问题，都与不等式直接有关。虽然不等式的应用遍及数学的各个分支以及科学技术的各个领域，但是不等式理论仍被列为实数分析的一个单元。

不等式在数学发展史上历来受到重视，可是把不等式的理论与技巧当作专门课题或学科作系统的研究，那还是1934年哈代、李特伍德与波利亚 (Hardy, Littlewood, Pólya) 的名著《不等式》问世以后的事。这三位数学家自1929年开始计划，足足花了五年的时光完成了这一划时代的著作。该书经历了半个世纪的考验，至今仍在众多的不等式著作中列为必备参考书之一。该书大部分篇幅用以讨论算术—几何平均不等式（简称算几不等式），荷尔德(Hölder)不等式与闵可夫斯基(Minkowski)不等式。

本书的目的就是要在中学不等式知识的基础上，阐述上述三个基本不等式的产生、变化与推广，并讨论它们在极值问题中的有趣应用。为了方便中学读者，本书不涉及任何微积分方法，而仅依据不等式的简单原理展开论述。研习不等式不仅是学习数学之捷径，而且是研究数学之坦途，我们希

望这本小册子能引起读者对不等式的理论、方法和应用的一些兴趣，并对培养他们的钻研精神有所裨益。

本书的第一作者在北美游学已四分之一世纪，第二作者于1983年到北美访问，我们有幸在加拿大里贾纳大学相会，共同切磋不等式这一课题，这本小册子就是我们合作的结果。我们谨以此书献给中华民族年青的一代。

二 算术—几何平均不等式

1. 算几不等式的雏形

我们知道，对于任何实数 a 都有

$$a^2 \geq 0 \quad (1)$$

其中等号仅当 $a=0$ 时成立。实数的这个性质，是不等式理论的出发点。设 x, y 是任意两个实数，在 (1) 式中令 $a = x - y$ ，得

$$(x - y)^2 \geq 0$$

其中等号仅当 $x = y$ 时成立。展开后即得

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (2)$$

定理 1 对于任意两个非负数 x_1, x_2 ，恒有

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3)$$

其中等号仅当 $x_1 = x_2$ 时成立。

证明 在 (2) 中令 $x = \sqrt{x_1}$ ， $y = \sqrt{x_2}$ 即得 (3)。

$\frac{x_1 + x_2}{2}$ 与 $\sqrt{x_1 x_2}$ 分别称为两数 x_1, x_2 的算术平均与几

何平均，不等式 (3) 就是算术—几何平均不等式（简称为算几不等式）的最简形式。

“几何平均”这个名词的来源可以从下述简单的几何事实中得到解释。如图 1，如果我们想作一正方形，使它的面积等于边长为 x_1 与 x_2 的长方形的面积，那么它的边长就是 x_1 与 x_2 这两个数的几何平均 $\sqrt{x_1 x_2}$ 。

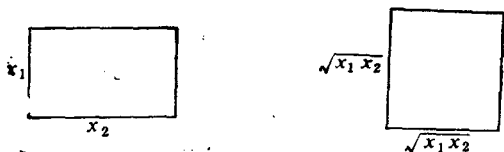


图 1

不等式 (3) 有如下简单的几何意义。在图 2 中， C 是半圆上一点， $CD \perp AB$ ，根据初等几何我们有

$$CD^2 = AD \cdot DB$$

注意到直角三角形的弦边最长，由上式就得到不等式 (3)。

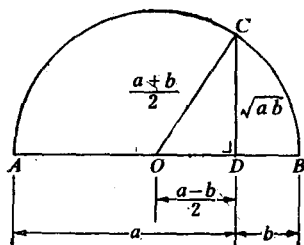


图 2

2. 三个数的算几不等式

设 x_1, x_2, x_3 是三个非负数，我们分别称

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{与} \quad \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

为这三个数的算术平均与几何平均。下面的定理 2 表明，关于两个数的算术—几何平均不等式可以推广到三个数的情况。

定理 2 对于任意三个非负数 x_1, x_2, x_3 ，恒有

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (4)$$

其中等号仅当 $x_1 = x_2 = x_3$ 时成立。

证明 为去掉根号，令

$$x_1 = y_1^3, \quad x_2 = y_2^3, \quad x_3 = y_3^3$$

代入 (4) 得

$$y_1 y_2 y_3 \leq \frac{y_1^3 + y_2^3 + y_3^3}{3} \quad (5)$$

即

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3y_1 y_2 y_3 \geq 0 \quad (6)$$

于是定理 2 的证明归结为证明对任意三个非负数 y_1, y_2, y_3 ，

(6) 成立，且其中的等号仅当 $y_1 = y_2 = y_3$ 时成立。容易验证，(6) 的左端可分解为

$$\begin{aligned} & y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 - 3y_1 y_2 y_3 \\ &= (y_1 + y_2 + y_3)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_3) \end{aligned} \quad (7)$$

由不等式 (2) 有

$$2y_1 y_2 \leq y_1^2 + y_2^2, \quad 2y_1 y_3 \leq y_1^2 + y_3^2, \quad 2y_2 y_3 \leq y_2^2 + y_3^2 \quad (8)$$