standard exercise

高中数学标准习题集

II

横田孝志 編著

受験研究社

10

辽宁人民出版社

高中数学标准习题集

（二）

〔日〕 横田孝志 编著

尚文斗
钱永耀 译

王运达 校

辽宁人民出版社

一九八三年·沈阳

高中数学标准习题集

（二）

尚文斗
钱永耀 译

王运达 校

*

辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：12 3/8
字数：332,100 印数：1—108,000
1983年10月第1版 1983年10月第1次印刷

统一书号：7090·194 定价：1.30元

本书的特点和用法

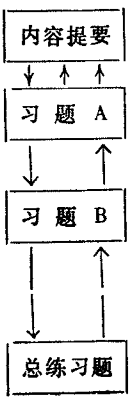
① **本习题集的各章和内容是根据新 的教学大纲而编**排的。它适合于在校所学的各种课本， 可与课程内容并行使用。

② 各章〈**内容提要**〉和**精选习题**， 很适于学习时整理知识和检验学习效果之用。

③ 各章习题，分为〈**习题 A**〉→〈**习题 B**〉 两个阶段。习题的编排，根据从基础到应用，从易到难的精神， 有利于逐步提高学习效果。

④ 〈题解〉根据习题的难易程度，**有详有略**， 编入书末，便于查阅。

⑤ 三段式系统学习法



- 说明时，注意到使读者能够正确掌握内容的**全部重点**。
- 为检验理解得是否准确而配备一定数量的**基本练习题**。其中程度稍难的习题，在该页最下 边 附 有 提示。
- 选编了标准习题、重要习题和许多大学入试考题。如能掌握这些内容，再**参加高考**就不会感到困难。
- 对于程度较难的习题，在该页最下边附有提示，供解题时的指导。
- 从最近高考中精选的习题排在书末，供最后总结时使用。

译者的话

本书译自日本受验社出版的高中数学标准习题集。原书共分三册。为适应我国高中数学教学的需要，删去了我国现行中学数学教学大纲（试行草案）暂未列入的内容。并将原书分为上下两册，上册主要是传统的中学教学内容，下册主要是微积分内容。

本书的特点是：首先对基本的定理、公式、法则进行整理，以使读者系统掌握各章知识的重点，其次是精选习题。为深刻理解基础知识而配备的一定数量的基本练习题，编入习题A；为灵活地运用所学知识而配备的一定数量的标准题、大学入试题，编入习题B。书末所列综合性习题，可检验所学知识是否融会贯通。题解有详有略，注意启发。如能深刻理解和掌握书中内容，对于参加高考或进一步自修高等数学就不会感到困难。

本书前9章由钱永耀同志译出，后17章及全书题解由尚文斗同志译出，全书特请王运达同志做了审校。由于译者水平所限，错误之处恐难避免，恳请读者批评指正。

一九八一年九月

前　言

学习数学好比登山，只是瞩目远眺，无论经过多长时间，也难以到达顶峰。总得需要一步一步地去攀登。

但是，仅仅是步步前进，也未必会攀上顶峰，必须准备中途所需的物品，拨正前进的方向。因为途中，有时将会遇到意外的险阻，将会碰到估计不足而难以逾越的深谷。此外，备有登山路线图也是十分必要的。

本习题集就是指导同学学习数学时所必备的地图和工具。它将起到向导的作用，帮助大家在校学习，提高学习效果，为将来参加高考提高解题能力，增强信心。

（1）作为预习、复习的总结，可利用各章内容之前的〈内容提要〉，只看〈内容提要〉仍不能充分领会时，可重新阅读教材。

（2）〈习题A〉是通过预习彻底理解教材内容后或在复习总结时应作的练习题。其题都是基本的习题。

（3）〈习题B〉是完成习题A后再做的练习题。解题时，尽可能不看提示（编在题解里）。

（4）在〈习题A·B〉中，对水平较高的习题，在题号右上方标有＊号，在该页下方附有提示，但应尽量不看，先思考，实在不会解时，再看提示。即使不会解，也莫要悲观，可仔细研究解答。

（5）习题得不到解答时，可想想各章的〈内容提要〉，找出理解得不够的地方。

最后，预祝大家刻苦努力，一步一步攀向顶峰。

作　者

目　　录

第 1 章　函数的极限和导数

1. **极限**……关于x的函数 $f(x)$，如果当x无限趋近于a时，$f(x)$的值无限趋近于β，那么β就叫做当x趋近于a时 $f(x)$的极限。用下面的记号表示.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\beta \text{ 或 } x\to a\text{时，} f(x)\to\beta.$$

2. **关于极限的公式**

当存在 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$，$\lim\limits_{x\to c} g(x)$时，那么

(1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to c} g(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)$　　(k是常数)

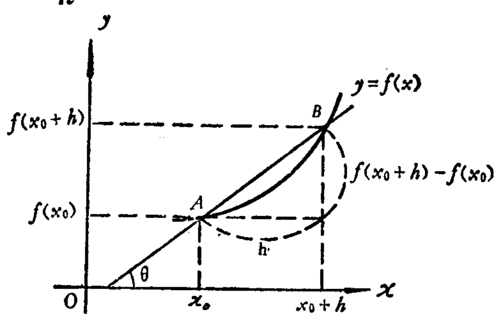
(3) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=[\lim\limits_{x\to a} f(x)][\lim\limits_{x\to a} g(x)]$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ (其中 $\lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0$)

3. **平均变化率**……函数 $y=f(x)$，从x_0到 x_0+h 的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

从右图可知平均变化率等于割线AB的斜率$\mathrm{tg}\theta$.



4. **导数（变化率）**

$y=f(x)$在$x=a$时的导数定义如下：

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$f'(a)$的几何意义：$f'(a)$ 等于 $x=x_0$ 处的切线的斜率。

◀ 习 题 A ▶

【1】求下列各式的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)$　　（2）$\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(2x-5)$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x^2+3x+1)$　　（4）$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+8)(x-4)$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}(x-3)(x^2+2x)$　　（6）$\lim\limits_{x\to -1}(x^3+8)(3x-1)$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+2x^2)$　　（8）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{6x-1}$　　（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$

【2】关于下列各函数，求x由2到5的平均变化率：

（1）$f(x)=2x$　（2）$f(x)=-3x$　（3）$f(x)=5$

（4）$f(x)=x^2$　（5）$f(x)=x^2-3x$　（6）$f(x)=-2x^3$

（7）$f(x)=x-x^3$　（8）$f(x)=3x^2-2x+1$

（9）$f(x)=2x^3-5x-3$　（10）$f(x)=x^3+3x^2+3x+1$

【3】关于下列各函数，求x为（ ）内之值时的导数（变化率）：

（1）$f(x)=3x-5$（$x=2$）　（2）$f(x)=x^2$（$x=1$）

（3）$f(x)=p(x)+q$（$x=a$）　（4）$f(x)=x^3$（$x=2$）

（5）$f(x)=px^2+qx+r$（$x=1$）（6）$f(x)=(x+1)^2$（$x=a$）

（7）$f(x)=x^2-x$（$x=1$）　（8）$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（$x=0$）

【4】关于函数 $y=x^3$，

（1） 求 $x=a$处的导数。

（2）问当导数等于3时，x 应为何值？

（3）关于函数$y=x^3+4x-1$，回答(1)，(2)里提出的相同问题。

【5】以每秒20米的初速上抛的小球，若t秒后的高为y米，则 $y=20t-4.9t^2$。

（1）求上抛后一秒至三秒间的平均速度。

（2）求上抛一秒后速度的平均变化率。

（3）求上抛三秒后的速度。

【6】函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 当 x 从 $x=x_1$ 增加到多少时它的平均变化率等于 $x=x_2$ 时的变化率。

【7】在下列的各函数中，求 $f'(-1)$，$f'(1)$，$f'(2)$。

（1）$f(x)=10$　　　　（2）$f(x)=-5x$

（3）$f(x)=x^2-2x$　　　　（4）$f(x)=-(x+2)(x-3)$

【8】关于 $S=\frac{1}{2}gt^2$，试证从 $t=t_1$ 到 $t=t_2$ 的平均变化率等于 $t=\frac{t_1+t_2}{2}$ 时的变化率。

◀ 习　题　B ▶

【1】求下列各式的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ 〔东京大〕　（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1+\frac{1}{x-1}}{x^2}$

（3）$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}$ 〔关西大〕（4）$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ 〔法政大〕

【2】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x^3+2)^2}{(2x^2+1)^3}$ 的值。〔名城大〕

【3】求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left\{\frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)^2}{n}-\frac{[\sqrt{n(n+1)}-(n+1)]^2}{n+1}\right\}$〔京都大〕

【4】填写下列 $\boxed{}$ 。

$f(x)=\frac{2ax^2-(a-2)x-1}{ax^2-(a^2-1)x-a}$ （a 为常数）

（1）当 $a=\boxed{}$ 时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在。

（2）当 $a=\boxed{}$ 时，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}$。

（3）当 $a=\boxed{}$ 时，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$ 为正数，这时，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\boxed{}$。

〔东京大〕

【5】在$f(x)=\dfrac{x^4+1}{(x^2+1)^2}$中，$x$可取一切实数。

（1）求 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

（2）求 $f(x)$的最大值与最小值，及取得这些极值时的x值. 〔自治医大〕

【6】在 $S=50t-5t^2$ 所表示的运动中

（1）求从$t=1$到$t=3$的平均速度.

（2）求$t=4$时的即时速度.

（3）求$t=t_0$时的速度的表达式.

【7】对于 $y=ax^2-bx$

（1）求从$x=1$到$x=3$的平均变化率.

（2）求当$x=2$时的导数（变化率）.

（3）求x的值使得在x的变化率等于从$x=x_1$到$x=x_2$ 的平均变化率.

【8】根据定义求$x=1$处的$y=(x+1)^3$的变化率. 〔京都教育大〕

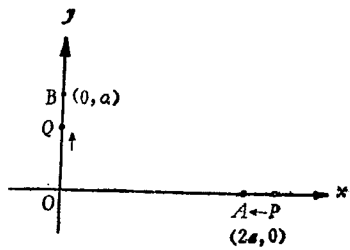
【9】填写下列的 $\boxed{}$.

若函数 $f(x)$在$x=a$的导数为A，那么

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\boxed{}A$. 〔京都府大〕

【10】* 在$\angle XOY$的内部有一动圆A与OX, OY相切，它的中心A逐渐远离O。当圆面积对圆的周长的变化率为给定的$a(a>0)$时，求 OA 的距离. 其中设$\angle XOY=60°$.

【11】* 在直角XOY的边OX上有向O接近的一点P与在边 OY 上有以同样速度离开O的一点Q. 当P，Q无限趋近于定点A, B时，求PQ，AB 的交点的极限位置（$\overline{OA}=2\overline{OB}$）.



【12】在直角坐标系OXY上有二定点$A(a,0)$, $B(0,b)$其中设$a>0$, $b>0$，在线段OA上取一点P，在线段 OB 过B的延长线上取一点 Q，使$\triangle OPQ$的面积等于$\triangle OAB$的面积，线段 PQ 和AB的交点为R。当

提示：〔10〕设面积为S，圆周为l，设$S=f(l)$求$f'(l)$.〔11〕设交点为(x,y)，求$\lim\limits_{P\to A}x$，$\lim\limits_{P\to A}y$.

P无限接近于A时，问点R接近于哪一点。并求点R的极限点的坐标。〔东京学艺大〕

【13】已知函数 $f(x)=x^3-4x$，

（1）求从 $x=-1$到 $x=1$ 的平均变化率。

（2）当 $f'(a)$等于（1）的平均变化率时，求a的值。

【14】*求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{x+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right\}$。

【15】已知 $f_n(x)=1+(x^2-3x+3)+(x^2-3x+3)^2+\cdots+(x^2-3x+3)^n$，求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 所定义的范围，并画出它的略图。

〔信州大〕

【16】*在直角三角形ABC中，设 $\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$。并设n等分斜边AB的点从A起顺次为$A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$，试回答下列问题：

（1）对于在 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 上的任意整数 k，试用 b,c,n,k 表示$\overline{CA_k}^2$。

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{CA_1}^2+\overline{CA_2}^2+\cdots+\overline{CA}_{n-1}^2}{n-1}$ 〔山形大〕

【17】已知x的恒等式 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{b_k}$。其中设 $b_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i$。〔香川大〕

提示：〔14〕叫做极限函数．求{ }的和，再令$n\to\infty$。〔16〕（1）应用余弦定理。

第2章　导函数和计算

1. **导函数**……函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的变化率 $f'(x_0)$ 可以看做x_0的函数．用x代替x_0，把 $f'(x)$ 叫做 $f(x)$ 的**导函数**。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. **导函数的记号**

$f'(x)$，y'，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$，（x的表达式）

3. **求导函数**……从 $y=f(x)$ 求 $f'(x)$ 叫做求导函数。求出 $f'(x)$后，令 $x=x_0$可计算导数 $f'(x_0)$。

4　**求导函数的公式**

（1）若 $y=C$（C为常数），则 $y'=\frac{dy}{dx}=0$

（2）若 $y=x^n$（n为正整数），则 $y'=\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

（3）若 $y=u+v$（u，v是x的函数），则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

（4）若 $y=u-v$（u, v是x的函数），则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$$

（5）若 $y=u\cdot v$（u，v是x的函数），则

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u=u'v+uv'$$

◀ 习　题　A ▶

【1】根据定义求下列函数的导函数：

（1）$y=x^2+2x$　　（2）$y=3x$

（3）$y=-2x^3$　　（4）$y=-x^2+x$

【2】应用公式求下列函数的导函数：

（1）$y=x^2+1$　　（2）$y=x^3-2$

（3）$y=2x^4+4x^3$　　（4）$y=-4x^3+5x$

（5）$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+1$　　（6）$y=6x^3+8x-2$

（7）$y=x(x-4)$　　（8）$y=(x-3)(x+2)$

（9）$y=x^2(2x-7)$　　（10）$y=(x+3)^2$

【3】试分别说明 $y=C$，$y=x$的导数的几何意义。

【4】分别求 $f(x)=4x^3-2x-1$在 $x=1$，-2，-3，5的导数。

【5】应用公式若 $y=uv$则 $y'=u'v+uv'$，求下列函数的导函数：

（1）$y=x(x-4)$　　（2）$y=(x-3)(x+2)$

（3）$y=(3-x)(2x+1)$　　（4）$y=x^2(2x-7)$

（5）$y=(x+5)^2$　　（6）$y=(x+2)(x^2-x+4)$

【6】求下列函数的导函数：

（1）$y=x^a+x^b$　　（2）$y=(x^a+1)(x^b+1)$

【7】求 x，y的值使得下列函数的导数为 0：

（1）$y=x^3-12x+5$　　（2）$y=x^2+6x-3$　〔大分大〕

【8】求x的值使得函数$y=\frac{x^3}{3}-x^2+2$的导数为 0。

再求x的值使得它的导数为1。

【9】求x的值使得函数 $y=x(x-1)(x-2)$的导数为2。

【10】求x的值的范围使得函数$y=-\frac{x^2}{2}-x+1$的导数大于 0。

【11】已知使函数　$y=x^3+ax^2-\frac{4}{3}a$ 的导数为0的y值也为0，求 a值。

【12】问x为何值时，函数 $y=-x^3+x^2+x-1$ 的导数为正？又 x 为何值时，这个函数的导数最大？

【13】已知在二函数 $y=3x^2+a$，$y=2x^3$ 的交点处导数相等，求a和交点处的导数。

◀ 习 题 B ▶

【1】填写下列$\boxed{}$.

当 $f(x)=(2x+6)^6$时，在 $f'(x)$里x^3的系数为$\boxed{}$. 〔琉球大〕

【2】设u，v，s分别是x的函数，当$y=u\cdot v\cdot s$时，导出求$\dfrac{dy}{dx}$的公式.

【3】问 x 为何值时 $y=x^3-6x^2-x+6$ 的导数最小？并设这时 x 的值为 x_0，y 的值为 y_0，试证函数的图象关于（x_0，y_0）对称.

〔类·神户商大〕

【4】已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 过点（$-1,-5$)，且在这点的导数为2，求 a，b. 〔类·上智大〕

【5】$y=f(x)$是连续的曲线，它的导函数 $f'(x)$如下：

当 $x<-1$时 $f'(x)=-1$

当 $-1<x<1$时 $f'(x)=-2x$

当 $1<x$时 $f'(x)=3x^2$

而 $f(0)=-1$，试画 $y=f(x)$的图象。 〔京都府大〕

【6】*已知 $f(x)$ 是关于x的整式，而且 $f'(x)f(x)=f'(x)+f(x)+2x^3+2x^2-1$成立.

（1）问 $f(x)$是几次式？ （2）求 $f(x)$. 〔日本大〕

【7】*求满足 $f'(x)[f'(x)+2]=8f(x)+12x^2-5$ 的 x 的多项式 $f(x)$.

〔武藏工大〕

【8】设x的多项式$F(x)$除以$(x-a)^2$时得余式$R(x)$。试用$F(a)$,$F'(a)$表示$R(x)$.

【9】已知 4 次项的系数为 1 的四次式$f(x)$能被$f'(x)$整除，求 $f(x)$的一般形.

【10】已知 $f(x)$是x的整式，令 $g(x)=f(x)-(x-a)f'(x)-f(a)$，试证 $g(x)$能被$(x-a)^2$整除. 〔大阪教育大〕

【11】在含有 1 的区间里有可微分的函数 $f(x)$,已知 $f'(x)$是连续函数，$f(1)=2$，$f'(1)=1$,求下列各式的值：

（1）$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-2}{x-1}$ （2）$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{[f(x)]^2-4}{x-1}$ 〔岐阜大〕

提示：〔6〕〔7〕设$f(x)$为n次式，比较两边的次数.

【12】已知 $y=ax^2+bx+c$具有性质 $(y')^2=4ay$，试解方程 $ax^2+bx+c=0$ 〔神奈川大〕

【13】当$f(x)$是偶函数时，如果在 $x=0$ 存在有限导数 $f'(0)$，那么试证 $f'(0)=0$。其中设 $f(x)$ 是x的整式。

【14】设整式 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。

（1）试证 $f'(0)=f'(x)$　（2）求 $f(x)$ 〔秋田大〕

【15】已知函数 $f(x),g(x)$对于任意实数x，y，满足 $f(x+2y)=f(x)+g(y)$。

若 $f(x)$存在导函数 $f'(x)$，判断 $f'(x)$ 是否是常数函数？

当 $f(0)=1$，$f'(0)=2$时，求 $f(5)$与 $g(5)$ 〔早稻田大〕

【16】设 a，b，c为常数，$f(x)=ax^2+bx+c$，求实数 a，b 的值使得对于一切实数 x，y，

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$$

恒成立。 〔甲南大〕

【17】（1）在 $f(b)=f(a)+(b-a)f'[a+\theta(b-a)]$式中，求当 $f(x)=x^2$时的θ值，并说明上式的几何意义。

（2）在 $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$中，当$f(x)=x^3,\theta>0$时，求 $\lim\limits_{h\to0}\theta$的值。 〔武藏工大〕

【18】用x的两个函数

$$f(x)=x^6-3x^4+2x^3+6x^2-4x+4$$

$$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

定义x的连续函数$h(x)$如下：

当 $|x|>1$时，$h(x)=f(x)$

当 $|x|\leqslant1$时，$h(x)=g(x)$

这时试求实系数 a，b，c，d的值使得对于一切实数x，$h(x)$ 具有导数。

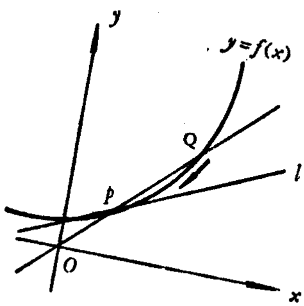
〔注意〕所谓x的函数 $F(x)$在 $x=p$ 处具有导数是指极限

$$\lim_{k\to+0}\frac{F(p+k)-F(p)}{k}\text{与}\lim_{k\to-0}\frac{F(p+k)-F(p)}{k}$$

存在且相等，其值用$F'(p)$表示。 〔名古屋工大〕

第3章　切线的方程

1. **曲线的切线**……设有经过曲线 $y=f(x)$ 上 $P(x_0, y_0)$，$Q(x_1, y)$ 两点的割线 PQ，当 Q 点沿曲线无限趋近于 P 点时，无限趋近于某直线 l。此直线 l 叫做曲线 $y=f(x)$ 在 P 点的**切线**。



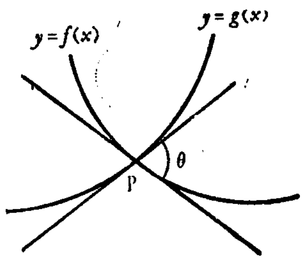
2. **切线的方程**……经过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线的斜率等于 $f'(x_0)$。

$$\boldsymbol{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)} \quad 其中，y_0=f(x_0)$$

3. **法线的方程**……经过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 而与 P 点的切线垂直的直线叫做曲线在 P 点的法线。

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

4. **两条曲线的交角**……过两条曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的交点 $P(x_0, y_0)$ 的两条切线所成的角，叫做两条曲线的交角。设过二曲线交点的切线的斜率分别为 $m_1=f'(x_0)$，$m_2=g'(x_0)$，交点为 θ，则



$$\mathrm{tg}\theta=\frac{|m_1-m_2|}{1+m_1m_2}$$