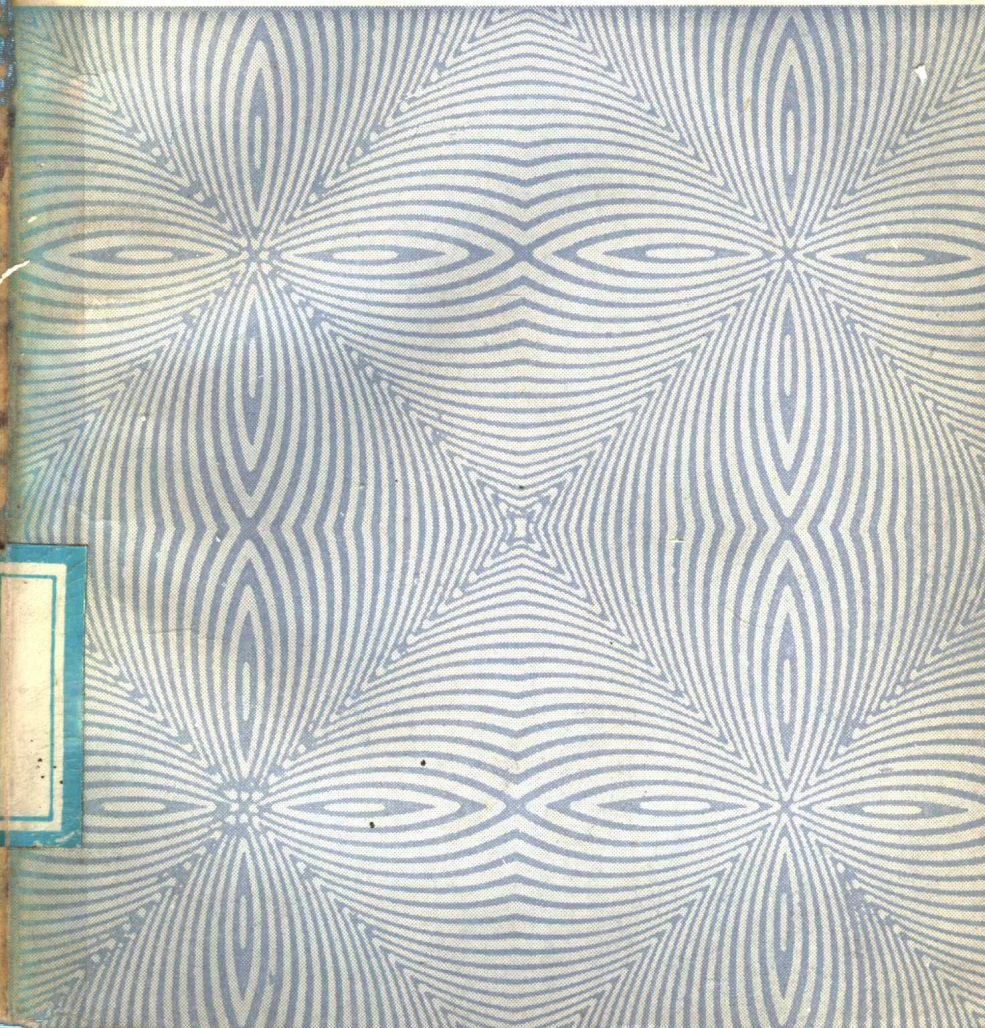


初中数学一题多解

杨 玉 荣

明 天 出 版 社



初中数学一题多解

杨 玉 荣

明 天 出 版 社

一九八六年·济南

内 容 提 要

初中是学习数学的重要阶段，有许多重点、难点使学生在解题过程中发生困难。本书是作者根据多年教学实践，从现行初中数学课本和一些升学试题中，精选了有代表性的习题一百个，在初中知识范围内，用灵活多样的方法进行详细解答。这对激发学生学习数学的兴趣，培养学习能力，开拓思路，综合运用所学知识，会有很大帮助。本书包括初中代数、平面几何及课外习题三部分，编排时还特别注意了学习顺序，是初中学生和广大自学青年学习数学的得力助手，也是教师很好的参考书。

初中数学一题多解

杨 玉 荣

★

明天出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行 山东人民印刷厂印刷

★

787×1092毫米32开本 10.5印张 223千字

1986年9月第1版 1986年9月第1次印刷

印数 1—56,600

书号 7333·80 定价 1.70 元

目 录

初中代数第二册

- 第1题 习题五第7题…………… (1)
第2题 复习参考题八第8题…………… (2)
第3题 复习参考题八第10题…………… (3)

初中代数第三册

- 第4题 复习参考题九第8(8)题…………… (6)
第5题 复习参考题九第9(1)题…………… (7)
第6题 复习参考题十第8(2)题…………… (9)
第7题 习题五第10(1)题…………… (11)
第8题 习题五第14题…………… (14)
第9题 习题五第18题…………… (15)
第10题 习题六第2题…………… (17)
第11题 练习第2(1)题…………… (19)
第12题 习题七第3(2)题…………… (20)
第13题 练习第3(2)题…………… (22)
第14题 习题八第9(2)题…………… (23)
第15题 习题九第5(3)题…………… (24)
第16题 复习参考题十一第1(7)题…………… (29)

第17题	复习参考题十一第3题	(30)
第18题	复习参考题十一第9(1)题	(33)
第19题	复习参考题十一第19题	(35)
第20题	复习参考题十二第13(3)、(4)题	(38)

初中几何第一册

第21题	习题八第10题	(41)
第22题	习题八第11题	(43)
第23题	习题八第15题	(46)
第24题	习题十第1题	(50)
第25题	习题十第10题	(56)
第26题	复习参考题三第15题	(59)
第27题	复习参考题三第20题	(65)
第28题	习题十三第12题	(72)
第29题	习题十三第13题	(75)
第30题	习题十四第1题	(79)
第31题	习题十六第2题	(86)
第32题	习题十六第3题	(91)
第33题	习题十六第5题	(97)
第34题	习题十六第12题	(100)
第35题	复习参考题四第7(1)题	(106)
第36题	复习参考题四第24题	(111)
第37题	复习参考题四第26题	(115)
第38题	第五章第2节梯形的面积	(117)
第39题	习题十七第9题	(126)
第40题	第五章第2节定理	(129)

第41题 复习参考题五第12题 (132)

初中代数第四册

第42题 第十四章11节练习第4(8)题..... (135)

第43题 第十五章第8节余弦定理 (138)

第44题 初中代数总复习参考题第5(1)题..... (140)

第45题 初中代数总复习参考题第5(2)题..... (141)

第46题 初中代数总复习参考题第10(1)题..... (143)

第47题 初中代数总复习参考题第14(4)题..... (144)

第48题 初中代数总复习参考题第14(6)题..... (146)

第49题 初中代数总复习参考题第18题
第(2)⑧小题..... (148)

第50题 初中代数总复习参考题第41题..... (149)

第51题 初中代数总复习参考题第45题..... (151)

初中几何第二册

第52题 习题十九第8题 (155)

第53题 第六章第5节三角形内角平分线性质
定理 (158)

第54题 习题二十二第5题 (164)

第55题 习题二十二第6题 (167)

第56题 习题二十二第8题 (171)

第57题 复习参考题六第4题 (175)

第58题 复习参考题六第9题 (178)

第59题 复习参考题六第10题 (187)

第60题 复习参考题六第17题 (193)

第61题	复习参考题六第21(3)题	(198)
第62题	复习参考题六第25题	(203)
第63题	第七章第 6 节例 1	(207)
第64题	习题二十四第17题	(212)
第65题	第七章第12节练习 2	(214)
第66题	习题二十五第 7 题	(217)
第67题	习题二十五第13题	(221)
第68题	习题二十五第16题	(225)
第69题	习题二十五第22题	(231)
第70题	习题二十七第22题	(236)
第71题	复习参考题七第 4 题	(239)
第72题	复习参考题七第11题	(241)
第73题	复习参考题七第13题	(245)
第74题	复习参考题七第15题	(250)
第75题	复习参考题七第26题	(256)

课 外 题

第76—85题	证明等式	(259)
第86—89题	解方程和方程组	(276)
第90—91题	求值	(284)
第92—100题	几何证明	(289)

初中代数第二册

第一题. 习题五 第7题(第90页)

长方形的面积是 $a^2 - 3ab + 2b^2$, 它的一条边长是 $a - b$,
求它的周长.

方法1

\because 长方形的面积是 $a^2 - 3ab + 2b^2$, 一条边长是
 $a - b$,

\therefore 长方形的另一条边长为 $a^2 - 3ab + 2b^2$ 除以 $a - b$
所得的商.

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 3ab + 2b^2 & a - b \\ a^2 - ab & a - 2b \\ \hline -2ab + 2b^2 & \\ -2ab + 2b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

\therefore 另一条边长为 $a - 2b$.

\therefore 长方形的周长 $= 2[(a - b) + (a - 2b)]$
 $= 2(2a - 3b)$

方法2

设另一条边长为 $a + p$, 由已知, 得

$$(a - b)(a + p) = a^2 - 3ab + 2b^2.$$

整理, 得 $a^2 - (b - p)a - bp = a^2 - 3ba + 2b^2$.

比较等式两边的系数, 得 $-(b - p) = -3b$.

解之，得 $p = -2b$ 。

\therefore 长方形的另一条边长为 $a - 2b$ 。

\therefore 长方形的周长 $= 2[(a - b) + (a - 2b)]$
 $= 2(2a - 3b)$ 。

方法 3

设周长之半为 m 。

则 $[m - (a - b)] \cdot (a - b)$
 $= a^2 - 3ab + 2b^2$ 。

整理，得 $m(a - b) = 2a^2 - 5ab + 3b^2$ ，

即 $m(a - b) = (a - b)(2a - 3b)$ 。

$\because a - b \neq 0$ ，

$\therefore m = 2a - 3b$ 。

\therefore 长方形周长 $= 2(2a - 3b)$ 。

第二题。 复习参考题八 第 8 题 (第 181 页)

由公式 $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ ，推出 $R = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$ ($r_1 + r_2 \neq 0$)。

方法 1

$\therefore \frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_1 \cdot r_2}$ ，

$\therefore R = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 + r_1} = \frac{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1}}{\frac{r_2 + r_1}{r_1}} = \frac{r_2}{\frac{r_2}{r_1} + 1}$

$$= \frac{r_2}{1 + \frac{r_2}{r_1}}$$

方法 2

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{1 + \frac{r_2}{r_1}} &= \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \\ &= \frac{1}{\frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R. \end{aligned}$$

第三题。 复习参考题八 第10题 (第182页)

某煤矿现在平均每天比原计划多采330吨煤, 已知现在采33000吨煤所需的时间和原计划采23100吨煤的时间相同。问现在平均每天采煤多少吨。

方法 1

设现在平均每天采煤 x 吨, 那么原计划每天平均采煤 $(x-330)$ 吨。现在采33000吨煤所需的时间是 $\frac{33000}{x}$, 原计划采23100吨煤所需的时间是 $\frac{23100}{x-330}$ 。已知时间相等, 所以得方程

$$\frac{33000}{x} = \frac{23100}{x-330}$$

方程的两边都乘以 $\frac{x(x-330)}{300}$, 约简, 得

$$110 \cdot (x - 330) = 77x.$$

解之，得 $x = 1100$ 。

经检验，1100是所列方程的根。

答：现在平均每天采煤1100吨。

方法 2

设原计划平均每天采煤 x 吨，那么现在平均每天采煤 $(x + 330)$ 吨。现在采 33000 吨煤所需用的时间是 $\frac{33000}{x + 330}$ ，

原计划采 23100 吨煤所需用的时间是 $\frac{23100}{x}$ ，已知时间相同，

所以得方程

$$\frac{33000}{x + 330} = \frac{23100}{x}.$$

方程两边都乘以 $\frac{x(x + 330)}{300}$ ，约简，得

$$110x = 77(x + 330).$$

解之，得 $x = 770$ 。

经检验，770是所列方程的解。

由 $x = 770$ ，得 $x + 330 = 770 + 330 = 1100$ 。

答：现在平均每天采煤1100吨。

方法 3

设现在采 33000 吨煤所需的时间为 x 天，那么现在平均每天采煤 $\frac{33000}{x}$ 吨，原计划平均每天采煤 $\frac{23100}{x}$ 吨。现在平均

每天采煤比原计划平均每天采煤多 $\left(\frac{33000}{x} - \frac{23100}{x} \right)$ 吨。

由题意得方程

$$\frac{33000}{x} - \frac{23100}{x} = 330.$$

解之，得 $x = 30$ 。

经检验，30是所列方程的解。

$$\text{由 } x = 30, \text{ 得 } \frac{33000}{x} = \frac{33000}{30} = 1100.$$

答：现在平均每天采煤1100吨。

方法4

设现在平均每天采煤 x 吨，原计划平均每天采煤 y 吨，那么现在平均每天比原计划平均每天多采煤 $(x-y)$ 吨。现在采33000吨煤所需的时间是 $\frac{33000}{x}$ ，原计划采23100吨煤所

用时间是 $\frac{23100}{y}$ ，由题意得方程组：

$$\begin{cases} x - y = 330, & (1) \\ \frac{33000}{x} = \frac{23100}{y}. & (2) \end{cases}$$

由(1)，得 $y = x - 330$ 。(3)

(3)代入(2)，得

$$\frac{33000}{x} = \frac{23100}{x - 330}.$$

由方法1知 $x = 1100$ 。

答：现在平均每天采煤1100吨。

初中代数第三册

第四题. 复习参考题九 第8(8)题(第30页)

化简: $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$.

方法 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} \\ &= \frac{x-1}{-1} = 1-x.\end{aligned}$$

方法 2

$$\text{原式} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x.$$

方法 3

设 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = m$.

$$\begin{aligned} \text{则 } 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} &= \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{m} \\ &= \frac{m-1}{m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x} &= \frac{m}{m-1}, \quad \frac{1}{x} = 1 - \frac{m}{m-1} \\ &= \frac{-1}{m-1}. \end{aligned}$$

$$\therefore x = 1 - m.$$

$$\text{即 } m = 1 - x.$$

$$\therefore \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - x.$$

第五题. 复习参考题九 第9(1)题(第30页)

已知 $A = 2x^4 - 3x^2 + 6x - 7$, $B = x^2 - x + 1$, 求 $A + B$ 的商式 Q 及余式 R .

方法 1

由长除法, 得

$$\begin{array}{r} 2x^4 \qquad -3x^2 + 6x - 7 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\ 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 \qquad \qquad | \quad 2x^2 + 2x - 3 \\ \hline 2x^3 - 5x^2 + 6x - 7 \\ 2x^3 - 2x^2 + 2x \qquad \qquad \qquad \\ \hline -3x^2 + 4x - 7 \\ -3x^2 + 3x - 3 \qquad \qquad \qquad \\ \hline x - 4 \end{array}$$

$$\therefore \text{商式} Q = 2x^2 + 2x - 3,$$

$$\text{余式} R = x - 4.$$

方法 2

$$\begin{aligned} \therefore 2x^4 - 3x^2 + 6x - 7 &= 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3x^2 + 3x - 3 \\ &\quad + x - 4 \\ &= (2x^4 - 2x^3 + 2x^2) + (2x^3 - 2x^2 + 2x) \\ &\quad - (3x^2 - 3x + 3) + (x - 4) \\ &= 2x^2(x^2 - x + 1) + 2x(x^2 - x + 1) - 3(x^2 \\ &\quad - x + 1) + (x - 4) \\ &= (x^2 - x + 1)(2x^2 + 2x - 3) + (x - 4), \end{aligned}$$

$$\therefore \text{商式} Q = 2x^2 + 2x - 3,$$

$$\text{余式} R = x - 4.$$

方法 3

$$\text{设 } 2x^4 - 3x^2 + 6x - 7 = (x^2 - x + 1)(A_1x^2 + A_2x + A_3) + (A_4x + A_5)$$

展开, 整理, 得

$$\begin{aligned} &2x^4 - 3x^2 + 6x - 7 \\ &= A_1x^4 - (A_1 - A_2)x^3 - (-A_1 + A_2 - A_3)x^2 \\ &\quad + (A_2 - A_3 + A_4)x + (A_3 + A_5). \end{aligned}$$

比较等式两边的系数, 得方程组

$$\begin{cases} A_1 = 2, \\ A_2 - A_1 = 0, \\ -A_1 + A_2 - A_3 = 3, \\ A_2 - A_3 + A_4 = 6, \\ A_3 + A_5 = -7. \end{cases}$$

解之, 得 $A_1 = 2,$

$$A_2 = A_1 = 2,$$

$$A_3 = -A_1 + A_2 - 3 = -2 + 2 - 3 = -3,$$

$$A_4 = 6 - A_2 + A_3 = 6 - 2 - 3 = 1,$$

$$A_5 = -7 - A_3 = -7 - (-3) = -4.$$

$$\therefore 2x^4 - 3x^2 + 6x - 7 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 2x - 3) + (x - 4).$$

$$\therefore \text{商式 } Q = 2x^2 + 2x - 3,$$

$$\text{余式 } R = x - 4.$$

第六题. 复习参考题十 第8(2)题(第84页)

$$\text{已知 } x = \frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5}), \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5}),$$

求 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 的值.

方法 1

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{\frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{\frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})} \\ &= \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})} \\ &\quad + \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7 + 2\sqrt{35} + 5}{7 - 5} + \frac{7 - 2\sqrt{35} + 5}{7 - 5} \\
&= \frac{12 + 2\sqrt{35}}{2} + \frac{12 - 2\sqrt{35}}{2} \\
&= 6 + \sqrt{35} + 6 - \sqrt{35} \\
&= 12.
\end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5})\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})\right]^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \\
&= \frac{\frac{1}{4}\left[(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2\right]}{\frac{1}{4}(7 - 5)} \\
&= \frac{7 + 2\sqrt{35} + 5 + 7 - 2\sqrt{35} + 5}{2} \\
&= \frac{24}{2} = 12.
\end{aligned}$$

方法 3

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 2xy}{x \cdot y} \\
&= \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x + y)^2}{xy} - 2
\end{aligned}$$