Shu Xue Fen Xi Xue Xi Fu Dao

数学分析学习辅导

初中教师《专业合格证书》考试

专科函授自学

代立新　胡宗明　主编

湖北科学技术出版社

初中教师《专业合格证书》考试
专　科　函　授　自　学

数学分析学习辅导

湖北科学技术出版社

主　编　代立新　胡宗明

副主编　康希祁　张季甫

　　　　吴守文　张新虎

编写人员（按姓氏笔划为序）

王国超　王继迅　代立新　关响声

伍福庆　吴守文　汤厚玉　张季甫

张恒心　张新虎　何建中　周梦娟

胡宗明　郑宗光　康希祁　谢守俊

数学分析学习辅导

代立新　胡宗明　主编

*

湖北科学技术出版社发行　新华书店湖北发行所经销

湖南省华容县印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　16印张　355千字

1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷

印数：1—13,000册

ISBN 7—5352—0183—0/O.0007

统一书号：7304·34　　定价：3.60元

前　言

《数学分析》是高等数学中一门重要的基础理论课程，内容多，难度较大．为了配合初中数学教师的《专业合格证书》文化专业知识考试和函授生的自学，我们结合多年的教学实践编写此书，以适应广大读者的需要．

本书主要是依据国家教委颁布的初中教师《专业合格证书》文化专业知识考试数学教学大纲和专科数学函授教学大纲编写的（对超出《专业合格证书》考试数学教学大纲的内容和题目均用 * 标出），全书各章均由内容概述，目的要求，例题解议，练习题（包括答案与提示）四个部分组成．内容概述部分对《专业合格证书》考试教学大纲中所规定的数学分析的基本内容进行了综合概括，给出了定义、定理、一些重要公式和结论；目的要求部分依据大纲明确给出了各章内容应掌握的程度；例题解议部分对解题方法进行了分类介绍，通过一解多议或多解一议，阐述了解题规律和技巧，以使读者加深对教材的理解和提高解题能力．例题和习题均选自考纲规定的教材和《人民教育》杂志中登载的初中教师数学自测试题．

本书通俗易懂，注重启发思路，总结规律，交待要领．本书共选配例题410道，具有典型性和启发性，练习题460道，均附有答案与提示（或略解），且难易适度，力求符合大纲规定．

本书除可供初中教师专业合格考试和数学函授学员使用外，还可供自学考生和全日制专科学生及中专（高中）教师

作为参考书。

本书在编写过程中，得到了荆州师专成人教育处的大力支持，谨致谢意。

编　　者

1987年8月30日

本书常用数学符号

$x\in A$	x是集合A的一个元素
$x\overline{\in} A$	x不是集合A的元素
$A\subset B$	集合A是集合B的子集
$A\cup B$	集合A与集合B的并
$A\cap B$	集合A与集合B的交
ϕ	空集
$\forall$	任意给定
$\exists$	存在
$\Longrightarrow$	推出
$\not\Longrightarrow$	不能推出
$\longrightarrow$	趋于
$\not\longrightarrow$	不趋于
$\Longleftrightarrow$	当且仅当（互推）
$Y\sim X$	Y与X等价
$\sup$	上确界
$\inf$	下确界
$n!$	n的阶乘，即$1\cdot2\cdot3\cdots n$
$(2n)!$	$2n$的双阶乘，即$2\cdot4\cdot6\cdots(2n)$
$\max$	最大
$\min$	最小
$\underline{\underline{\exists\text{且}}}$	存在并且等于

目　录

第一章　函　数

一　内容概述

（一）　绝对值及其基本性质

1． 绝对值的定义

$$|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

2． 绝对值的基本性质

1）　$|a|=|-a|\geqslant 0$，　$|a|=0\Longleftrightarrow a=0$；

2）　$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

3）　$|a|<\varepsilon\ (\varepsilon>0)\Longleftrightarrow -\varepsilon<a<\varepsilon$；

4）　$|a|>N\ (N>0)\Longleftrightarrow a>N$或$a<-N$；

5）　$\left||a|-|b|\right|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$；（称为三角不等式）

6）　$|ab|=|a||b|$；

7）　$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$

3．邻域

满足绝对值不等式$|x-a|<\delta$的全体实数（即$a-\delta<x<a+\delta$或开区间$(a-\delta,a+\delta)$）称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$；满足不等式$0<|x-a|<\delta$的全体实数（即$(a-\delta,a+\delta)$

$-\{a\}$）称为点a的δ去心邻域，记作$U^0(a,\delta)$。

（二） 函数概念

1．函数的定义

定义1·1 设有非空数集A与实数集R．若对任意数$x\in A$，按照对应关系f都有唯一一个数$y\in R$与之对应，则称f是定义在数集A上的函数，记为$f: A\longrightarrow R$。

其中A称为函数f的定义域，对任意数$x\in A$依对应关系f对应的y，记作$y=f(x)$，称为f在x的函数值，全体函数值集合

$$f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}\subset R$$

称为函数f的值域。x称为自变量，y称为因变量．

注 1）依定义，函数总是单值的．

2）定义域和对应关系是构成函数的两大要素。因此：①可以约定将定义在A上的函数f简记为"$y=f(x),x\in A$"；②自变量与因变量选用何种记号无关紧要，如"$y=f(x)$，$x\in A$"与"$u=f(t),t\in A$"表示同一函数；③两个函数的定义域与对应关系都相同，则称两个函数相等，否则不等．

2．函数的图象

设函数$y=f(x),x\in A$，称平面点集

$$\{(x,y)|y=f(x),x\in A\}$$

为函数$y=f(x)$在A上的图象．

3．函数的表示法

一般有解析法（公式法）、列表法、图象法和叙述法．

4．数列

定义在自然数集N上的函数，称为数列，记作$a_n=f(n)$，$n\in N$（公式法），或记作$\{a_n\}$（数串表示法）．

（三）函数的特性种类

1．有界函数

定义1·2 若存在常数 $M>0$，对任意$x\in A$有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在A上有界.

几何特征是$f(x)$的图象能介于两条水平直线$y=\pm M$之间.

定义1·2 若存在p（或q），对任意$x\in A$，有$f(x)\leqslant p$（或$f(x)\geqslant q$），则称函数$f(x)$在A上有上界（或下界）.否则，称$f(x)$在A上无上界（或无下界）. 无上界或无下界统称无界.

定理1·1 $f(x)$在A上有界$\Longleftrightarrow f(x)$在A上既有上界又有下界.

注 1）若$f(x)$在A上有上界（或下界），则有无穷多个上界（或下界）；2）函数的有界性与指定讨论的数集A有关，如$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[\delta,1]$（$\delta>0$）上有界，但在$(0,\delta)$上无界；3）有界±有界＝有界，有界×有界＝有界（指两函数运算）.

2．单调函数

定义1·3 设$f(x)$，$x\in A$，对A上的任意两数x_1与x_2，当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)<f(x_2)$），则称$f(x)$在A上单调增加（严格增加）.

当$x_1<x_2$时，总有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称$f(x)$在A上单调减少（严格减少）.

上述四种函数统称为单调函数；严格增加或严格减少函数统称为严格单调函数；若数集A为区间，则称此区间为单调区间.

$f(x)$在A上严格增加（严格减少）的几何特征是$f(x)$在A上的图象沿横轴正向上升（下降）。类似理解单调增加（或减少）函数的几何特征。

注 函数的单调性与指定讨论的数集A有关，如$f(x)=x^2$在$(-\infty,0]$上严格减少；在$[0,+\infty)$上严格增加；在$[-5,2]$上非单调。

3．奇函数与偶函数

定义1·4 设$f(x)$在A上有定义，若对任意x、$-x\in A$，有$f(-x)=-f(x)$（或$f(-x)=f(x)$），则称$f(x)$在A上是奇函数（或偶函数）。

奇、偶函数的几何特征是：奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于y轴对称。

注 1）若函数的定义域不是关于坐标原点对称的，就不能言及它的奇偶性。如$f(x)=x^2$，$x\in[-1,2]$就不是偶函数。因为对任意$x\in[-1,2]$，$-x$不一定$\in[-1,2]$，即并不是对任意$x\in[-1,2]$，都有$f(-x)=f(x)$成立；2）四则运算性质：奇(偶)±奇(偶)=奇(偶)，奇(偶)$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$奇(偶)=偶，奇$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\div}$偶=奇。（参加运算的函数，定义域须相同）

4．周期函数

定义1·5 设$f(x)$定义在数集A上，若存在正数l，对任意$x\in A$，有$x\pm l\in A$，使得$f(x\pm l)=f(x)$，则称$f(x)$是周期函数，称l为$f(x)$的一个周期。

周期函数的几何特征是，它的图象在长度为周期l的各区间上的图象相同。

注 1）由定义知，若$l>0$是$f(x)$的一个周期，则nl（n是正、负整数）也是它的周期，因此，周期函数一定有

无穷多个周期，通常所说函数的周期专指它的最小正周期；2）并非一切周期函数都有最小正周期，如常函数和狄利克莱函数就无最小正周期；3）由1）知周期函数的定义域 A 必是既无上界又无下界的无穷集合（但不一定是无穷区间 $(-\infty, +\infty)$. 如 tgx 是周期函数，其定义域是除去 $k\pi+\frac{\pi}{2}$（k 为整数）的实数集），否则就不是周期函数.

（四）函数的四则运算与复合

1． 函数的四则运算

若两个函数的定义域的交集非空，则两个函数可在其交集上进行加、减、乘、除（分母非零）运算.

2． 函数的复合

定义1·6 设 $z=f(y)$ 定义在数集 B 上，$y=\varphi(x)$ 定义在数集 A 上，设 $G=\{x|\varphi(x)\in B, x\in A\}\neq\phi$. 若对任意 $x\in G$，按照对应关系 φ 对应唯一一个 $y\in B$，再按照对应关系 f 对应唯一一个 z，即对任意 $x\in G$ 都对应唯一一个 z，于是在 G 上定义了一个函数，称为 $z=f(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 在 G 上的复合函数. 记作 $z=f[\varphi(x)]$，$x\in G$，称 $z=f(y)$ 为外函数，$y=\varphi(x)$ 为内函数，y 为中间变量.

注 1）$z=f[\varphi(x)]$ 可看成将 $y=\varphi(x)$ 代入 $z=f(y)$ 而得，这种将一个函数代入另一个函数的运算称为函数的复合；2）要求 $G\neq\phi$，或内函数的值域 $\subseteq$ 外函数的定义域，否则不能复合.

（五）反函数

1．反函数的定义

定义1·7 设函数$y=f(x)$，$x\in A$。若对任意$y\in f(A)$，有唯一一个$x\in A$与之对应，使$f(x)=y$，则在$f(A)$上定义了一个函数，称为函数$y=f(x)$的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(A)$$

注 1）由定义知，$f(x)$有反函数$\Longleftrightarrow$对其定义域中任意不同的两点$x_1\neq x_2$，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，（即一一对应）；2）一个不满足条件1）的函数，若将函数限制在定义域中的某个子集上，就可能存在反函数，如$\sin x$在定义域R上不存在反函数，但在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\subset R$上存在反函数$\arcsin x$；3）$x=f^{-1}(y)$与$y=f^{-1}(x)$同为$y=f(x)$的反函数（因为函数仅与定义域及对应关系有关，而与自变量及因变量用何字母表示无关）。

2．反函数的图象

反函数$y=f^{-1}(x)$的图象与直接函数$y=f(x)$的图象关于直线$y=x$为对称。

定理1·2 （反函数存在的充分条件）若函数$y=f(x)$在数集A上严格增加（或严格减少），则函数$y=f(x)$存在反函数，且反函数$x=f^{-1}(y)$在$f(A)$上也严格增加（或严格减少）。

（六） 初等函数

1．基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数统称为基本初等函数。显然，常值函数$y=c$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它的图象是过点$(0,c)$且与x轴平行的直线，是有界偶函数，且是不存在最小正周期的周期函数。关

于其他五种基本初等函数的定义域、值域、性质和图象讨论如下：

1）幂函数$y=x^{\alpha}$（α是实数）

由于α的取值不同，定义域和性质有所不同，但不管怎样，总在$(0,+\infty)$上有定义，下面仅就α是有理数的情形列表如下（见表1—1）.

2） 指数函数与对数函数（见表1—2）.

3） 三角函数（见表1—3）.

4） 反三角函数（见表1—4）.

2． 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合所得到的（且可用一个解析式子表示的）函数称为初等函数。

依上述定义，x的整数部分函数$y=[x]$、x的小数部分函数$y=\{x\}=x-[x]$、符号函数$y=\mathrm{sgn}x$、狄利克莱函数$y=D(x)$、黎曼函数$y=R(x)$和不能用一个解析式子表示的分段函数都是非初等函数.

二 目的要求

1． 正确理解和掌握函数、有界函数与无界函数、单调函数、奇偶函数和周期函数的概念，了解函数的各种表示法和记号.

2． 理解和掌握函数的四则运算及复合，反函数的定义、图象、存在条件和求法.

表1—1

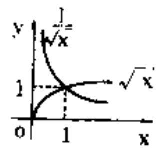
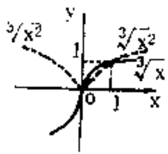
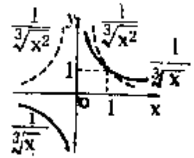
$y=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$，q是自然数，p是正负整数，p、q互质						
q	q是偶数		q是奇数			
p	（p必是奇数）		p＞0		p＜0	
	p＞0	p＜0	p是奇数	p是偶数	p是奇数	p是偶数
定义域	$[0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	R		R－{0}	
值域	$[0, +\infty)$			$[0, +\infty)$	R－{0}	$(0, +\infty)$
严增区间						$(-\infty, 0)$
严减区间		$(0, +\infty)$		$(-\infty, 0]$	R－{0}	$(0, +\infty)$
奇偶性			奇	偶	奇	偶
例（$\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{3}$）图象						

表1—2

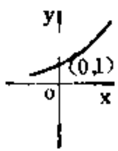
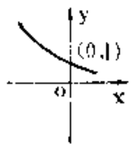
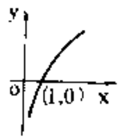
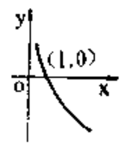
	$y=a^x(0<a\neq1)$		$y=\log_a x(0<a\neq1)$	
a	a>1	0<a<1	a>0	0<a<1
定义域	R		(0，+∞)	
值　域	(0，+∞)		R	
严增区间	R		(0，+∞)	
严减区间		R		(0，+∞)
图象				

表1—3

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}x$	$y=\mathrm{ctg}x$
定义域	R	R	$R-\{k\pi+\frac{\pi}{2}\}$	$R-\{k\pi\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	R	R
严增区间	$[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}]$	$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$	$(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2})$	
严减区间	$[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$	$[2k\pi, (2k+1)\pi]$		$(k\pi, (k+1)\pi)$
奇偶性	奇	偶	奇	奇
周期	2π	2π	π	π
图象