下

胡传孝 主编 夏显庭 主审

高等学校专科教材

高等数学

石油大学出版社

高等学校专科教材

高 等 数 学

（下册）

主 编 胡传孝

主 审 夏显庭

编 委 胡传孝 刘式杰 何振宇

张继忠 田培基 边晓峰

石 油 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书参照全日制大学专科高等数学教学大纲及课程教学的基本要求，和全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的专科《高等数学》课程的基本要求编写的。

该书分上、下两册共十一章。下册内容为矢量代数与解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分、曲线积分、无穷级数、常微分方程。

书中每节后配有一定数量的习题，书末附有习题答案；每章后配有自测作业题，用来检查学生对本章基本内容掌握的程度。

本书适用于日校大学专科及高等函授大学、电视大学、职工大学等专科生教材，亦适用于工程技术人员自学之用。

高等数学(下册)

胡传孝 主编

石油大学出版社出版发行

(山东省东营市)

新华书店经销

山东省东营新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 11.125 印张 282 千字

1996 年 10 月第 1 版 1996 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—6100 册

ISBN 7-5636-0770-6/O・39

定价：13.00 元

前　言

《高等数学》(专科用)上、下册是参照国家教委制定的全日制"专科高等数学课程教学基本要求"和"普通高等理工院校成人教育专科《高等数学》课程教学基本要求"编写而成的。

本书在编写过程中,在概念与方法上力求与现代数学接轨。在内容安排上,贯彻了少而精的原则,力求条理清楚、重点突出,并将重要内容用黑体字书写。在文字叙述上,既注重了用词准确、语言精练,又注重通俗易懂,便于自学。特别是为了便于成人学习,书中用较多的典型例题进行解题思路与方法的分析、较多地应用了总结性教学的方法,具有一定的特色。

本书第一、二、三章由胡传孝编写,第四、五两章由刘式杰编写,第六、七两章由何振宇、张继忠编写,第八、九两章由田培基编写,第十、十一两章由边晓峰编写。

全书由胡传孝主编,负责全书的修改与统稿工作;夏显庭教授主审了全书。董奉诚、谭鼐、周文龙三位教授专家详细地审阅了全书内容,并提出了宝贵的意见和建议。在此,向三位先生表示诚挚的谢意。

由于我们水平有限,错误和不妥之处在所难免,诚望读者批评指正。

编　者

1995年12月

目　　录

第六章　矢量代数与空间解析几何

§6.1　空间直角坐标系

本节首先将平面直角坐标系进行推广。建立空间直角坐标系。

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的建立

在空间取定一点 o，过 o 点作三条互相垂直的数轴，且以 o 点作为三条数轴的公共原点（如图 6-1 所示）。以 ox、oy 和 oz 分别表示第一个、第二个和第三个坐标轴，且分别称 ox、oy 和 oz 为横坐标轴、纵坐标轴和竖坐标轴。简称为横轴、纵轴和竖轴。于是，由 ox、oy 和 oz 三个坐标轴构成了一个空间直角坐标系 $o\text{-}xyz$。o 点称为这个坐标系的原点。

在图 6-1 中，横轴、纵轴和竖轴的三方向恰好与右手拇指、食指和中指所指方向一致，这样的坐标系叫右手坐标系，简称右手系。

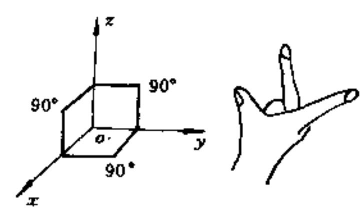


图 6-1

在坐标系中，由 ox 轴和 oy 轴、oy 轴和 oz 轴及 oz 轴和 ox 轴分别确定了三个平面。这三个平面叫坐标平面，分别称为 xoy 平面、yoz 平面和 zox 平面。

2. 空间点与有序三数组的对应

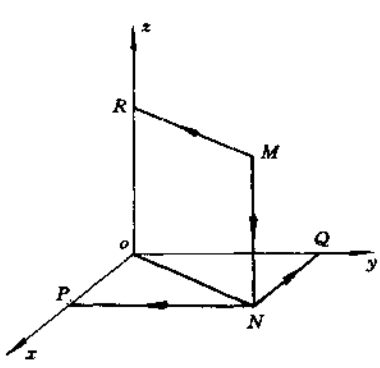


图 6-2

设空间中任意的一点 M，过 M 点作 xoy 平面的垂线与 xoy 平面交于点 N；过 N 点在 xoy 平面内作 ox 轴和 oy 轴的垂线，设垂足分别为 P 点和 Q 点，P 点在 ox 轴上坐标为 x，Q 点在 oy 轴上坐标为 y。连接 ON，过 M 点作 ON 的平行线与 oz 轴相交于 R 点。设点 R 在 oz 轴上的坐标为 z，于是由空间点 M 就得到了一个有序三数组 (x,y,z)。由上述作法知，P、Q、R 点都是唯一确定的，从而 (x,y,z) 是由点 M 唯一确定的一个有序三数组。并称该有序三数组 (x,y,z) 为点 M 在空间直角坐标系 $o\text{-}xyz$ 中的坐标，记为 $M(x,y,z)$。

由空间点 M 求其坐标的作图法如图 6-2。

设有一个有序三数组 (x,y,z)，求以该数组为坐标的空间的点 M。

在 ox 轴,oy 轴和 oz 轴上分别找出以数 x、y 和 z 为坐标的点 P、Q 和 R;分别过点 P、Q 和 R 作 ox 轴、oy 轴和 oz 轴的垂面 APN、BQN 和 ARB,则这三个两两垂直的平面相交于唯一的一点,记为 M,则 M 点就是以 (x,y,z) 为坐标的空间点(如图 6-3)。

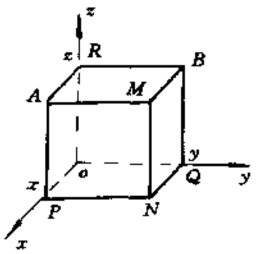


图 6-3

由上可知,由于在空间中引入了空间直角坐标系 $o\text{-}xyz$,使空间的点与有序三数组形成了一一对应。因此,可以将空间中的图形化为数来进行研究。

3. 空间的八卦限

在空间中引入了空间直角坐标系后,三个坐标平面 xoy、yoz 和 zox 将空间分隔成八个部分。每一个部分叫做一个卦限。在 ox 轴正向、oy 轴正向和 oz 轴正向的部分叫第一卦限;在 ox 轴负向、oy 轴正向和 oz 轴正向的部分叫第二卦限。其余第三至八卦限如图 6-4 所示。各卦限分别用罗马数字Ⅰ、Ⅱ、…Ⅷ表示。

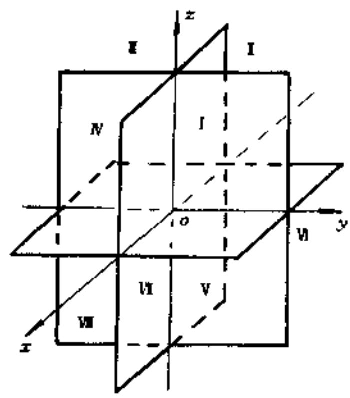


图 6-4

在坐标面上的点其坐标至少有一个为零。在坐标面 xoy 上的点 M 其坐标为 $M(x,y,0)$,即它的竖坐标必为 0;在 yoz 平面上的点 M 其坐标为 $M(0,y,z)$,即横坐标必为 0;在 zox 面上的点 M 的纵坐标必为 0;即 $M(x,0,z)$。

读者可自己确定分别位于三个坐标轴上的点的坐标的特征。原点 o 的坐标为 $o(0,0,0)$。

不在坐标面上的点所在的卦限不同,其坐标的符号也不同,具体关系如表 6-1。

表 6-1

卦限 符号 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
横坐标 x	+	−	−	+	+	−	−	+
纵坐标 y	+	+	−	−	+	+	−	−
竖坐标 z	+	+	+	+	−	−	−	−

二、空间任意两点的距离

1. 设空间任意两点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 和 $N(x_2,y_2,z_2)$ 位于 xoy 平面上方(可位于 xoy 平面上)其距离为 d,又设 $z_1<z_2$,过点 M 和 N 分别作 xoy 平面的垂线,设垂足为 M_1 和 N_1;则 M_1 与 N_1 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,0)$,$N_1(x_2,y_2,0)$。连接 M_1N_1,过 M 点作 M_1N_1 的平行线 MP 交 NN_1 于 P 点,则 P 点坐标为 $P(x_2,y_2,z_1)$(如图 6-5 所示)。

在直角三角形△MPN 中

$$d^2=|MN|^2=|MP|^2+|PN|^2$$

因为 $|PN|^2=(z_2-z_1)^2$， 又 $|MP|=|M_1N_1|$

由平面解析几何知

$$|M_1N_1|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

故

$$d^2=|MN|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

即

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (6\text{-}1)$$

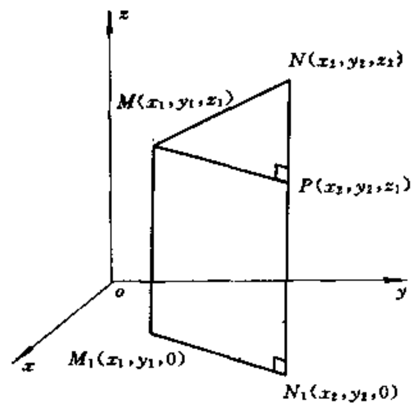


图 6-5

2. 若点 M、N 不是位于 xoy 平面上方，取 $c=\max\{|z_1|,|z_2|\}$，将 M 点与 N 点同时沿着 oz 轴正向移动 c 单位，此时，两点均位于 xoy 平面上方。显然，经平移之后 M 点与 N 点之间的距离未变，仍设为 d。平移后，M 与 N 的坐标分别为 $N(x_1,y_1,z_1+c)$，$N(x_2,y_2,z_2+c)$。

由式(6-1)知

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+[(z_2+c)-(z_1+c)]^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

即式(6-1)成立。

因此，无论 $M(x_1,y_1,z_1)$ 点与 $N(x_2,y_2,z_2)$ 点位于何处，M 与 N 的距离均由式(6-1)确定。

特别，任何点 $M(x,y,z)$ 到原点 $o(0,0,0)$ 的距离 d 为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (6\text{-}2)$$

习　　题

1. 已知点 M 的坐标为 $M(a,b,c)$，求

(1) 与点 M 关于 yoz 平面对称的点的坐标。

(2) 与点 M 分别关于 ox 轴和 oz 轴对称的点的坐标。

(3) 与点 M 关于原点对称的点的坐标。

2. 坐标满足下述各方程的点各表示什么图形。

(1) $x=0$　　(2) $y=0$　　(3) $z=0$

3. 位于 ox 轴、oy 轴和 oz 轴上的点的坐标有什么特点。请说明理由。

4. 求点 A 与 B 之间的距离

(1) $A(0,0,0)$，$B(2,3,4)$　　(2) $A(0,0,0)$，$B(2,-3,-4)$

(3) $A(-2,3,-4)$，$B(1,0,3)$　　(4) $A(4,-2,3)$，$B(-4,1,3)$

§ 6.2 矢量加、减法及矢量与数的乘法

矢量代数是研究一类既有大小又有方向的量(如力、位移、速度等)的有力工具。同时它又是解析几何的理论基础之一。

一、矢量的概念

定义 1 既有大小又有方向的量叫矢量,也叫向量。只有大小的量叫标量(如力、加速度、力矩等是矢量,时间、质量、温度、长度、面积等为标量)。

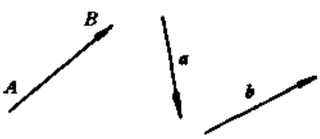


图 6-6

矢量常用给定了长度单位的有向线段来表示。线段的长短表示矢量的大小,线段的指向表示矢量的方向。如以点 A 表示某矢量的起点,用 B 点表示矢量的终点,则该矢量记为$\overrightarrow{AB}$。也可以用一个小写英文字母上加一个箭头(如 $\vec{a}$、$\vec{b}$等)或一个黑体的英文字母来表示矢量。如矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等(如图 6-6 所示)。

定义 2 矢量的大小叫矢量的模。如矢量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模分别记为$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$和$|\boldsymbol{b}|$。

如果某矢量的模为 1,则称该矢量为单位矢量。如分别与矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向一致的单位矢量分别记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$和 $\boldsymbol{b}^{\circ}$。

模为零的矢量称为零矢量,记为 $\vec{0}$。即$|\vec{0}|=0$。零矢量的方向可为任意方向。

如果矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 方向一致且模相等(即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$),则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 相等。记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$(如图 6-7(a)所示)。

若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 模相等,方向相反,则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为相反矢量。记为:$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$(如图 6-7(b)所示)。

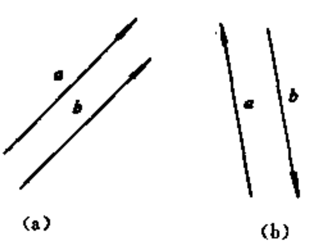


图 6-7

由上述规定可知,我们所研究的矢量只有两个要素:即矢量的大小和方向。这种只考虑矢量大小和方向的矢量叫自由矢量。除了大小、方向外还考虑作用点的矢量叫固定矢量。本书只研究自由矢量。

任何自由矢量经过平行移动使其始端移至原点得到的新矢量与原矢量相等。

显然,起点位于原点,终点位于空间相同(不同)点的矢量表示相等(不相等)矢量。于是,自由矢量就与引入了直角坐标系后的空间的点形成了一一对应。零矢量 $\mathbf{0}$ 对应于原点 o。

二、矢量的加法

在物理学中,我们知道,两个互不平行的力 F_1 和 F_2 的共同作用效果与用这两个力作邻边所做成的平行四边形的对角线表示的力 F(合力)的作用效果相同(如图 6-8(a)所示)。于是就得到了矢量加法的法则。

1. 求矢量和的平行四边形法则

求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，只需将矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的始端都平行移动到同一点 O，然后，在矢量 $\boldsymbol{a}$ 的末端 A 作与矢量 $\boldsymbol{b}$ 平行的直线，在矢量 $\boldsymbol{b}$ 的末端 B 作与矢量 $\boldsymbol{a}$ 平行的直线，设此两直线相交于点 C。则矢量$\overrightarrow{OC}$即为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 6-8(b)所示)。

由矢量求和的平行四边形法则，可以证明矢量加法具有交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 和结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$。

2. 求矢量和的三角形法则

在图 6-8(b)中，矢量 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，于是得到求矢量和的三角形法则。

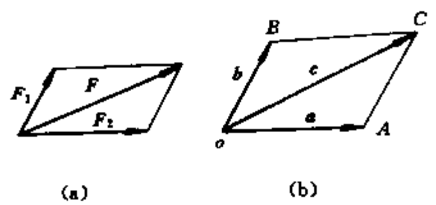


图 6-8

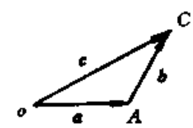


图 6-9

欲求矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，只需将矢量 $\boldsymbol{b}$ 的始端平行移动到矢量 $\boldsymbol{a}$ 的末端，连接 $\boldsymbol{a}$ 的始端与 $\boldsymbol{b}$ 的末端所得的矢量 $\boldsymbol{c}$ 即为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和。即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(如图 6-9)。

3. 多个矢量求和的多边形法则

求矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{a}_3$ 的和，只需将矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$ 平行移动使它们顺次首尾相接(即 $\boldsymbol{a}_i$ 的末端接 $\boldsymbol{a}_{i+1}$的始端，$i=1,2$)，连接矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 的始端与 $\boldsymbol{a}_3$ 的末端所得的矢量 $\boldsymbol{a}$ 即为矢量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{a}_3$ 之和。亦即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$(如图 6-10 所示)。

证 如图 6-10，由矢量求和的三角形法可知

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}$$

故

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}$$

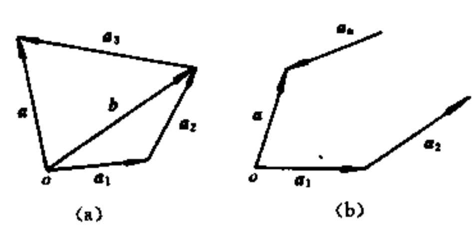


图 6-10

设有 n 个矢量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，为了求这 n 个矢量的和，只需将 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 平行移动，使这 n 个矢量依次首尾顺次相接，然后连接矢量 $\boldsymbol{a}_1$ 的始端与 $\boldsymbol{a}_n$ 的末端，所得矢量就是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和矢量 $\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

如图 6-10(b)所示。

4. 矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差定义为一个矢量 $\boldsymbol{c}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反矢量 $-\boldsymbol{b}$ 的和。即

$$c=a-b=a+(-b)$$

如图 6-11 所示。

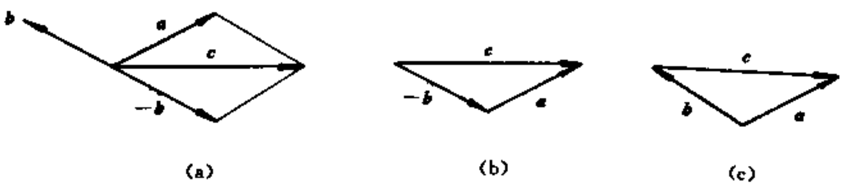


图 6-11

在图 6-11 中，对于 $c=a-b$，可以按矢量求和的三角形法则理解为 $b+c=a$。

三、矢量与数量的乘积

1. **定义 3** 定义实数 λ 与矢量 a 相乘(记为 λa)为一个矢量 c，即 $c=\lambda a$。c 的模等于 λ 的绝对值与矢量 a 的模的积。亦即 $|c|=|\lambda||a|$。当 $\lambda>0$ 时，c 与 a 方向一致；当 $\lambda<0$ 时，c 与 a 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，c 为零矢量，即

$$c \triangleq \lambda a \quad \begin{cases} |c|=|\lambda||a| & \\ c\text{ 与 }a\text{ 方向一致}, & \text{当 }\lambda>0\text{ 时} \\ c\text{ 与 }a\text{ 方向相反}, & \text{当 }\lambda<0\text{ 时} \\ c\text{ 为零矢量}:\vec{0}, & \text{当 }\lambda=0\text{ 时} \end{cases}$$

由定义 3 可知：

(1) 数 λ 与矢量 a 相乘是对矢量 a 进行拉伸($\lambda>1$)、压缩($0<\lambda<1$)和反向拉伸($\lambda<-1$)，反向压缩($-1<\lambda<0$)的一种变换。

(2) 且 $a^{\circ}=\frac{1}{|a|}a$, $\quad -a=(-1)a$

2. 数与矢量相乘的性质

设 λ、μ 为实数，则数与矢量相乘满足结合律与分配律。

(1) 结合律 $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)$

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$

$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$

3. **定理 1** 两个非零矢量 a 与 b 平行的充分必要条件是 $a=\lambda b$，$\lambda\in R$。

证 设 $a\neq\mathbf{0}$，$b\neq\mathbf{0}$，且 $a/\!/b$ 则 $|a|\neq0$，$|b|\neq0$

(1) 若矢量 a 与 b 同向，则令 $\lambda=\frac{|a|}{|b|}$，于是，$a=\lambda b$。

由于 $\lambda>0$，故 a 与 λb 同向，且

$$|\lambda b|=|\lambda||b|=\frac{|a|}{|b|}|b|=|a|$$

若矢量 a 与 b 反向，则令 $\lambda=-\frac{|a|}{|b|}$，则 $a=\lambda b$。

(2) 若 $a=\lambda b$，由 λb 的定义知 a 或者与 b 同向，或者 a 与 b 反向，即 $a/\!/b$。

习　题

1. (1) 在一个平行四边形的边上可以作出几对相等的矢量?

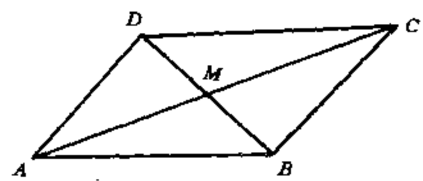
(2) 在一个平面内的正六边形的边上可以作出几对相等矢量?

(3) 在一个等边三角形的边上情形如何?

2. 若矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,问(1) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$ 成立吗?(2) $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{c}|$ 何时成立?

3. 若矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,则 $|\boldsymbol{a}|\leqslant|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$ 为什么?

4. 如习题 4 图,M 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线交点,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示矢量 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$。



习题 4 图

§6.3　矢量坐标

一、矢量与数轴

1. 矢量与数轴的夹角

设数轴 u 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 相交,则称矢量 $\boldsymbol{a}$ 的正向与数轴 u 的正向的夹角 α 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 的夹角(如图 6-12(a)所示)。若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 不相交,则在数轴 u 上任取一点 A,作矢量 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$,则称 $\overrightarrow{AB}$ 与数轴 u 的夹角 α 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 的夹角(如图 6-12(b)所示)。

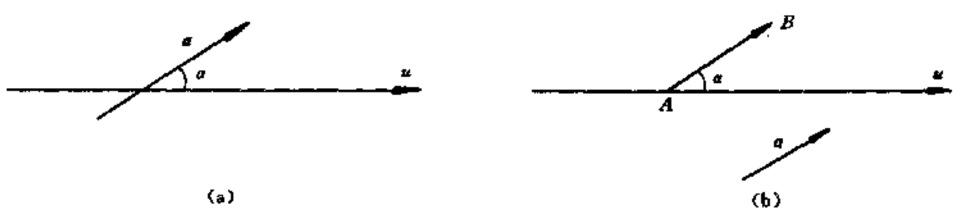


图 6-12

2. 矢量在轴上的投影

设 α 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 u 的夹角,则称 $\boldsymbol{a}$ 的模与角 α 的余弦的乘积:$|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在数轴 u 上的投影。记为 $Prj_u\boldsymbol{a}\triangleq|\boldsymbol{a}|\cos\alpha$

定理 2　和矢量在数轴上的投影等于各分矢量在该数轴上投影的和。即若 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

则　$Prj_u\boldsymbol{c}=Prj_u\boldsymbol{a}+Prj_u\boldsymbol{b}$

证略。

二、基本单位矢量

定义 4　在直角坐标系 $o\text{-}xyz$ 中,设有三个单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$,它们的方向分别与 ox 轴

正向、oy 轴正向和 oz 轴正向一致，则称矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为基本单位矢量(如图 6-13)。

定义 5 在直角坐标系 $o\text{-}xyz$ 中，设矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 ox 轴、oy 轴和 oz 轴的夹角分别为 α、β 和 γ，则称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦。

矢量的方向余弦一旦被确定，则矢量的方向就唯一确定。

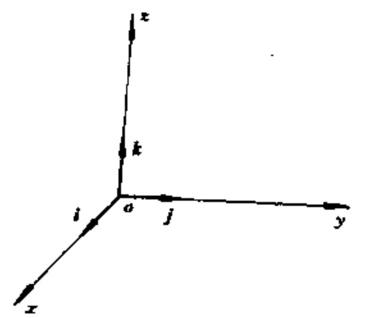


图 6-13

定义 6 设点 M 为直角坐标系 $oxyz$ 中任意一点，其坐标为 $M(x,y,z)$，则称矢量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的矢径。其模记为 $r\triangleq|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|$。

定理 3 设点 $M(x,y,z)$ 的矢径为 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，则 $\boldsymbol{r}$ 的模 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{r}$。

证 如图 6-14，设点 $M(x,y,z)$ 在 xoy 面上投影为 N，在 ox 轴、oy 轴和 oz 轴上分别表示数 x、y 和 z 的点为 P、Q 和 R。由矢量求和的多边形法则，有

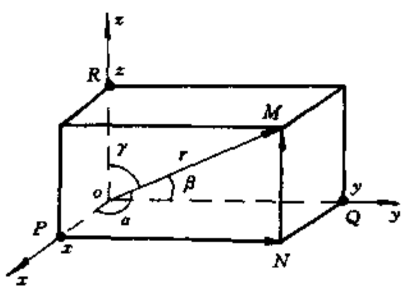


图 6-14

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$

又 $\quad \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$

故

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{6-3}$$

$$\begin{aligned} r^2 &=|\overrightarrow{ON}|^2+|\overrightarrow{NM}|^2 \\ &=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{NM}|^2 \\ &=|x|^2+|y|^2+|z|^2 \\ &\Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned} \tag{6-4}$$

从图 6-14 中不难看出：

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OP}}{r}=\frac{x}{r} \qquad \cos\beta=\frac{\overline{OQ}}{r}=\frac{y}{r} \qquad \cos\gamma=\frac{\overline{OR}}{r}=\frac{z}{r}$$

定义 7 若矢量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，其中 a_1、a_2、a_3 为实数。则称 $a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位矢量的分解式。$a_1\boldsymbol{i}$、$a_2\boldsymbol{j}$、$a_3\boldsymbol{k}$ 分别叫矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 ox 轴、oy 轴和 oz 轴上的分矢量，a_1、a_2、a_3 为 $\boldsymbol{a}$ 的矢量坐标。记作

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}\triangleq a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{i}+a_3\boldsymbol{k} \tag{6-5}$$

显然式(6-5)就是点 M 的矢径按基本向量的分解式。

$$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

例 1 已知点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，求矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $|\overrightarrow{AR}|$ 和方向余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$。

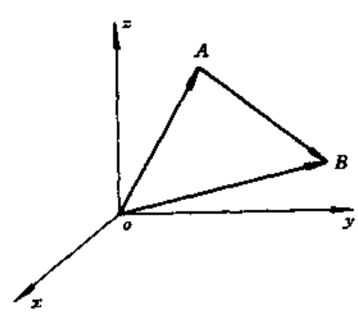


图 6-15

解 如图 6-15

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{6-6}$$

记点 P 的坐标为 $P(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，则式(6-6)表明矢量$\overrightarrow{AB}$与矢量$\overrightarrow{OP}$相等，故

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

$\overrightarrow{AB}$的方向余弦与$\overrightarrow{OP}$方向余弦也相等。

即
$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{|\overrightarrow{AB}|},\quad \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{|\overrightarrow{AB}|},\quad \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{|\overrightarrow{AB}|}\tag{6-7}$$

由式(6-6)知，任何矢量的坐标分别等于其终点与起点相应坐标的差。

由式(6-7)知，任何矢量的方向余弦的平方和等于 1。即

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 2 已知矢量$\overrightarrow{AB}$与三个坐标轴的夹角相等，设$|\overrightarrow{AB}|=3$，且 A 点的坐标为 $A(0,1,-2)$，求矢量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦及$\overrightarrow{AB}$矢量。

解

(1) 设$\overrightarrow{AB}$与三个坐标轴的夹角分别为 α,β,γ，由题设知 $\alpha=\beta=\gamma$。由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，故 $3\cos^2\alpha=1$，因而 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

即
$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 设 B 点的坐标为 $B(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AB}=\{x,y-1,z+2\}$，又 $\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{x}{3}$，$\cos\beta=\frac{y-1}{3}$，$\cos\gamma=\frac{z+2}{3}$，即 $\frac{x}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{y-1}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{z+2}{3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，从而 $x=\pm\sqrt{3}$，$y=1\pm\sqrt{3}$，$z=-2\pm\sqrt{3}$

故

$$\overrightarrow{AB}=\{x,y-1,z+2\}=\pm\{\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}\}$$

定理 4 设矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

证 当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda$ 为实数。即

$$a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=\lambda(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})=\lambda b_1\boldsymbol{i}+\lambda b_2\boldsymbol{j}+\lambda b_3\boldsymbol{k}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$$

故

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda\tag{6-8}$$

说明： 在式(6-8)中，若某个 b_i 为零$(i=1,2,3)$，则认为分子 a_i 也为零。

定理 5 已知点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，点 $M(x,y,z)$分有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$成定比$\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}=\lambda(\lambda\in R,\lambda\neq-1)$，则点 M 的坐标满足：$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

证 设 O 点为坐标原点，则矢量

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$$

$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$$

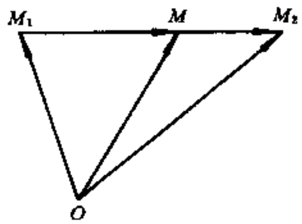


图 6-16

如图 6-16，由于矢量$\overrightarrow{M_1M}$和$\overrightarrow{MM_2}$在同一条直线上，依题意有

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$$

即 $\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}=\{\lambda(x_2-x),\lambda(y_2-y),\lambda(z_2-z)\}$

从而 $x-x_1=\lambda x_2-\lambda x,y-y_1=\lambda y_2-\lambda y,z-z_1=\lambda z_2-\lambda z$

$$\Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{6-9}$$

由式(6-9)知，当 M 为有向线段$\overrightarrow{M_1M_2}$的中点时，$\lambda=1$。从而

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{6-10}$$

例 4 用矢量方法证明任意梯形两腰中点的连线的长等于上下底边长的和的一半。

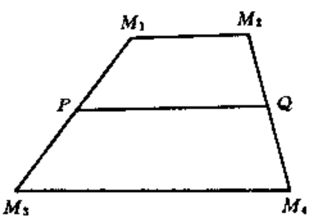


图 6-17

证 如图 6-17，P、Q 分别为线段 M_1M_3 和 M_2M_4 的中点，$M_1M_2 /\!/ M_3M_4$，设点 M_i 的坐标为 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3,4$。

则 P 的坐标为 $P\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2},\frac{z_1+z_3}{2}\right)$，$Q$ 点的坐标为 $Q\left(\frac{x_2+x_4}{2},\frac{y_2+y_4}{2},\frac{z_2+z_4}{2}\right)$，从而矢量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=\left\{\frac{x_2+x_4}{2}-\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_2+y_4}{2}-\frac{y_1+y_3}{2},\frac{z_2+z_4}{2}-\frac{z_1+z_3}{2}\right\}\\&=\left\{\frac{1}{2}(x_2-x_1)+\frac{1}{2}(x_4-x_3),\frac{1}{2}(y_2-y_1)+\frac{1}{2}(y_4-y_3),\frac{1}{2}(z_2-z_1)+\frac{1}{2}(z_4-z_3)\right\}\\&=\frac{1}{2}\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}+\frac{1}{2}\{x_4-x_3,y_4-y_3,z_4-z_3\}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{M_3M_4}\end{aligned}$$

故 $$|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_3M_4}|$$

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}/\!/\overrightarrow{M_3M_4}$且方向相同，故

$$|\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_3M_4}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|+|\overrightarrow{M_3M_4}|$$

$$\Rightarrow|\overrightarrow{PQ}|=\frac{1}{2}[|\overrightarrow{M_1M_2}|+|\overrightarrow{M_3M_4}|]$$

习　题

1. 写出矢量 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$，$\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$的坐标，并分别求出各矢量的模及方向余弦。

2. 求矢量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 与各坐标轴的夹角。

3. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,1,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{2,-3,5\}$，求 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 和 $\boldsymbol{b}^{\circ}$，并分别用 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 表示 $\boldsymbol{a}$，用 $\boldsymbol{b}^{\circ}$ 表示 $\boldsymbol{b}$。

4. 试证三点：$A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形。

5. 已知矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,x,0\}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}=\{-2,1,y\}$ 平行，求：

(1) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$；

(2) 分别求 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦。

6. 已知矢量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦 $\cos\alpha=\frac{2}{7}$、$\cos\beta=\frac{3}{7}$，又知 $\boldsymbol{a}$ 与 oz 轴的夹角是钝角，求 $\cos\gamma$，又当 $|\boldsymbol{a}|=3$ 时，求 $\boldsymbol{a}$ 按基本向量的分解式。

§6.4 矢量的数量积与矢量积

引例 已知如图 6-18，物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，沿直线从 A 点运动到 B 点，求力 $\boldsymbol{F}$ 做的功 W。

解 由力学知识得知

$$W=|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{F}|\cos\alpha$$

一、矢量的数量积

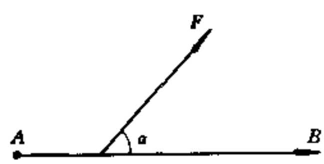


图 6-18

1. 两矢量的夹角

将矢量 $\boldsymbol{a}$ 平行移动使其始端与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的始端重合，则矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的正向的夹角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$ 规定为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。常记为 $\alpha\triangleq(\boldsymbol{a}\,\hat{,}\,\boldsymbol{b})$。

2. **定义 8** 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为二矢量，其夹角为 α，则称 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 矢量的模的积与夹角余弦的乘积为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(也称为点积或内积)。记为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha$$

3. 矢量数量积的主要性质

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|Prj_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|Prj_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

(2) $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

(4) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(5) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

(6) 与数相乘的结合律(设 $m\in R$)：$m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})$

证 仅证性质(3)和性质(5)

(3) 设 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $(\boldsymbol{a}\,\hat{,}\,\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$$

反之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则下述三种情况必居其一：