celiang pingcha

高等学校"十五"规划教材

测量平差

葛永慧　主编

中国矿业大学出版社

高等学校"十五"规划教材

测 量 平 差

主　编　葛永慧

副主编　魏峰远　史经俭

编　委　刘海青　张书毕

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/葛永慧主编.—徐州:中国矿业大学出版社,2005.2

ISBN 7-81107-000-6

Ⅰ.测… Ⅱ.葛… Ⅲ.测量平差 Ⅳ.P207

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第002286号

书　　名 测量平差
主　　编 葛永慧
责任编辑 何　戈　潘俊成
责任校对 杜锦芝
出版发行 中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编221008）
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail** cumtpvip@cumtp.com
排　　版 中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷 中国矿业大学印刷厂
经　　销 新华书店
开　　本 787×960　1/16　**印张** 16　**字数** 305千字
版次印次 2005年2月第1版　2005年2月第1次印刷
定　　价 19.20元

前　言

测量平差是测绘工程专业重要的专业基础课之一，同时又是后续其他课程的基础，根据多年的教学与实践我们编写了本书。全书共分8章，第一章介绍了误差及其传播，第二章介绍了平差数学模型与最小二乘原理，第三章介绍了条件平差的原理和方法，第四章介绍了间接平差的原理和方法，第五章介绍了附有限制条件的条件平差，第六章介绍了误差椭圆，第七章介绍了误差分布与平差参数的统计假设检验，第八章介绍了近代平差理论。各章后均附有习题。

本书由五个院校联合编写，第一章由太原理工大学葛永慧编写，第二、五、八章由河南理工大学魏峰远编写，第三章由华北科技学院刘海青编写，第四章由中国矿业大学张书毕编写，第六、七章由西安科技大学史经俭编写。本书由葛永慧任主编，魏峰远、史经俭任副主编。在编写过程中得到了众多同行和同事的支持，在此表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免会存在一些缺点和错误，敬请读者批评指正。

编　者

2004.10

目　录

第一章　观测误差及其传播

第一节　概　　述

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最可靠值(也称为平差值、最佳估值、估值、最或是值、最或然值等)，评定测量成果的精度。解决这两个问题的基础，是要研究观测误差的理论，简称误差理论。本章主要介绍偶然误差的规律性、衡量精度的指标、协方差传播律、权的定义以及测量中常用的定权方法等。

第二节　观测误差及其分类

当对某量进行重复观测时，我们常常发现观测值之间往往存在一些差异。例如，对同一段距离重复丈量若干次，量得的长度通常是互有差异的。另一种情况是，如果已经知道某几个量之间应该满足某一理论关系，但对这几个量进行观测后，也会发现实际观测结果往往不能满足应有的理论关系。例如，从几何上知道一个平面三角形三内角之和应等于 180°，但如果对这三个内角进行观测，则三内角观测值之和通常不等于 180°。在同一量的各观测值之间，或在各观测值与其理论上的应有值之间存在差异的现象，在测量工作中是普遍存在的，这是由于观测值中包含有观测误差的缘故。

观测误差产生的原因很多，概括起来主要有以下三方面。

(1) 测量仪器：测量工作通常是利用测量仪器进行的，由于每一种仪器都具有一定限度的精密度，因而使观测值的精密度受到了一定的限制。例如，在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证在估读厘米以下的尾数时完全正确无误；同时，仪器本身受制造工艺的限制也有一定的误差，例如水准仪的视准轴与水准轴不完全平行、水准尺的分划误差等等。因此，使用这样的水准仪和水准尺进行观测，就会使水准测量的结果产生误差。同样，经纬仪、测距仪、GPS 接收机等仪器的观测结果也会有误差存在。

(2) 观测者：由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水

平，也是对观测成果的质量有直接影响的重要因素。

(3) 外界条件：观测时所处的外界条件，如温度、湿度、压强、风力、大气折光、电离层等因素都会对观测结果直接产生影响。随着这些因素的变化，它们对观测结果的影响也随之不同，因此，观测结果产生误差也是必然的。

测量仪器、观测者、外界条件三方面的因素是误差的主要来源，通常把这三方面的因素合起来称为观测条件。观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系。当观测条件好一些，观测中产生的误差就可能相应地小一些，观测成果的质量就会高一些；反之，观测条件差一些，观测成果的质量就会相对低一些。如果观测条件相同，观测成果的质量也就可以说是相同的。但是，不管观测条件如何，观测的结果都会产生这样或那样的误差，测量中产生误差是不可避免的。当然，在客观条件允许的限度内，我们可以而且必须确保观测成果具有较高的质量。

根据观测误差对观测结果的影响的性质，可将观测误差分为系统误差和偶然误差两种。

(1) 系统误差：在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差称为系统误差。简言之，符合函数规律的误差称为系统误差。

设对某一量观测结果的系统误差为 ε，影响因子为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，则系统误差可表示为：$\varepsilon=f_\varepsilon(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$。

系统误差的特例：$\varepsilon=$ 常数。

例如，测距仪的乘常数误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离愈长，误差也愈大；测距仪的加常数误差所引起的距离误差为一常数，与距离的长度无关。这是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如用钢尺量距时的温度与检定尺长时的温度不一致而使所测的距离产生误差；测角时因大气折光的影响而产生的角度误差；等等。这些都是由于外界条件所引起的系统误差。

(2) 偶然误差：在相同的观测条件下作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。简言之，符合统计规律的误差称为偶然误差。

设对某一量观测结果的偶然误差为 Δ，影响因子为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，则偶然误差可表示为：$\Delta=f_\Delta(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$。

例如，经纬仪测角误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差和仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许

多偶然因素所引起的小误差。例如，照准误差可能是由于照准部旋转不正确、脚架或觇标的晃动与扭转、风力风向的变化、目标的背影、大气折光等偶然因素影响而产生的小误差。因此，测角误差实际上是由许许多多微小误差项构成，而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化，其数值的大小和符号的正负具有随机性，这样，由它们所构成的误差，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的。因此，把这种性质的误差称为偶然误差。偶然误差就其总体而言，具有一定的统计规律，有时又把偶然误差称为随机误差。

在测量工作的整个过程中，除了系统误差和偶然误差外，还可能发生错误。例如，照准目标瞄准错误、读数错误、记录错误等。错误的发生，大多是由于工作人员的粗心大意造成的。错误的存在不仅大大影响测量成果的可靠性，而且往往造成返工浪费，给工作带来难以估量的损失，必须采取适当的方法和措施，保证观测结果中不存在错误。一般来说，错误不算作观测误差。

系统误差与偶然误差在观测过程中总是同时发生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质。反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般有累积作用，它对观测成果的质量影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除或减弱系统误差对观测成果的影响，达到实际上可以忽略不计的程度。例如，在测量之前对测量仪器进行认真的检验与校正、在测量过程中采用合适的测量方法、对观测成果进行必要的改正等。

当观测序列中已经排除了系统误差的影响，或者说系统误差与偶然误差相比已处于次要地位，即该观测序列中主要是存在着偶然误差。对于这样的观测序列，就称为带有偶然误差的观测序列。这样的观测结果和偶然误差便都是一些随机变量，如何处理这些随机变量，是测量平差这一学科所要研究的内容。

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，在实际工作中，为了提高成果的质量，防止错误发生，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，一个平面三角形，只需要观测其中的两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致，或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，消除不符值，得到观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此，可以根据概率统计的方法来求出观测量的最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务。测量平差的另一个主要任务是评定测量成果的精度。

第三节　偶然误差的规律性

任何一个被观测量，客观上总是存在着一个能代表其真正大小的数值。这一数值就称为该观测量的真值。通常在表示观测值的字母上方加波浪线表示其真值。

设进行了 n 次观测，各观测值为 L_1、L_2、…、L_n，观测量的真值为 $\widetilde{L}_1$、$\widetilde{L}_2$、…、$\widetilde{L}_n$。由于各观测值都带有一定的误差，所以，每一个观测值的真值 $\widetilde{L}_i$（或 $E(L_i)$）与观测值 L_i 之间必存在一个差数，设为

$$\Delta_i = \widetilde{L}_i - L_i \tag{1-3-1}$$

称 Δ_i 为真误差（在此仅包含偶然误差），有时简称为误差。若记

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}} = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]^{\mathrm{T}},\ \underset{n\times 1}{\widetilde{\boldsymbol{L}}} = [\widetilde{L}_1 \quad \widetilde{L}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{L}_n]^{\mathrm{T}},\ \underset{n\times 1}{\boldsymbol{\Delta}} = [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \cdots \quad \Delta_n]^{\mathrm{T}}$$

则有

$$\boldsymbol{\Delta} = \widetilde{\boldsymbol{L}} - \boldsymbol{L} \tag{1-3-2}$$

如果以被观测值的数学期望表示该观测值的真值

$$E(\boldsymbol{L}) = [E(L_1) \quad E(L_2) \quad \cdots \quad E(L_n)]^{\mathrm{T}} = [\widetilde{L}_1 \quad \widetilde{L}_2 \quad \cdots \quad \widetilde{L}_n]^{\mathrm{T}} = \widetilde{\boldsymbol{L}}$$

则有

$$\boldsymbol{\Delta} = E(\boldsymbol{L}) - \boldsymbol{L} \tag{1-3-3}$$

在此我们用观测值的真值与观测值之差定义真误差，有些教材和文献上用观测值与观测值的真值之差定义真误差。这两种定义方式仅仅是使真误差符号相反，对于后续各种计算公式的推导没有影响。

前面已经指出，就单个偶然误差而言，其大小或符号没有规律性，即呈现出一种偶然性（或随机性）。但就其总体而言，却呈现出一定的统计规律性。并且指出它是服从正态分布的随机变量。人们从无数的测量实践中发现，在相同的观测条件下，大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的统计规律性。下面用一个实例来说明。

在相同的条件下，独立地观测了 358 个三角形的全部内角，由于观测值带有偶然误差，故三内角观测值之和不等于其真值 180°。各个三角形内角和的真误差：

$$\Delta_i = 180° - (L_1 + L_2 + L_3)_i \quad (i = 1,2,\cdots,358)$$

式中，$(L_1+L_2+L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间的间隔 $\mathrm{d}\Delta$ 为 0.20″，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列，统计误差出现在各区间内的个数 v_i，以及“误差出现在某个区间内”这一事件的频率 v_i/n（$n=358$），其结果列于表 1-1 中。

表 1-1　　某测区三角形内角和的误差分布

误差的区间 /(″)	Δ为负值			Δ为正值			备注
	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$	个数 v_i	频率 v_i/n	$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.063	46	0.128	0.064	$\mathrm{d}\Delta=0.02''$ 等于区间左端值的误差算入该区间内
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0.000	0.000	0	0.000	0.000	
和	181	0.505		177	0.495		

从表中可以看出，误差的分布情况具有以下性质：

(1) 误差的绝对值有一定的限值；

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差多；

(3) 绝对值相等的正负误差的个数相近。

偶然误差的分布情况，除了采用上述误差分布表的形式表达外，还可以利用图形来表达。例如，以横坐标表示误差的大小，纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值，即$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$(此处间隔值均取为 $\mathrm{d}\Delta=0.02''$)。根据表 1-1 中的数据绘制出图 1-1 所示的条形图。在图 1-1 中每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如，图中画有斜线的长方条面积，就是代表误差出现在(0.00″，+0.20″)区间内的频率 0.128，这种图形通常称为直方图，它形象地表示了误差的分布情况。

由此可知，在相同观测条件下所得到的一组独立观测的误差，只要误差的总个数 n 足够多，那么，误差出现在各区间内的频率就总是稳定在某一常数(理论频率)附近，而且当观测个数愈多时，稳定的程度也就愈大。例如，就表 1-1 中的一组误差而言，在观测条件不变的情况下，如果再继续观测更多的三角形，则可以预测，随着观测值的个数愈来愈多，当 $n\to\infty$ 时，各频率也就趋于一个完全确定的数值，这就是误差出现在各区间内的频率。也就是说，在一定的观测条件下，对应着一种确定的误差分布。

在 $n\to\infty$ 的情况下，由于误差出现的频率已趋于完全稳定，如果此时把误差区间间隔无限缩小，则图 1-1 中各长方条顶边所形成的折线将变成如图 1-2 所

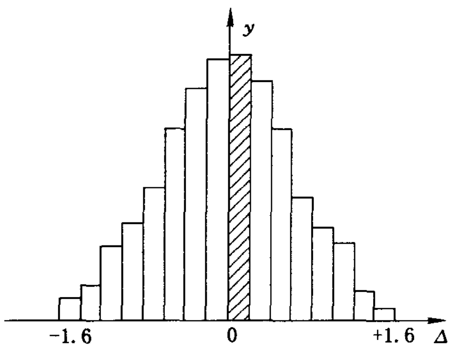

图 1-1

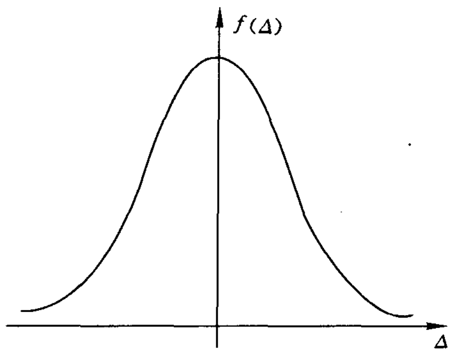

图 1-2

示的光滑曲线。这种曲线也就是误差的概率分布曲线，或称为误差分布曲线。

由此可见，偶然误差的频率分布，随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布。在以后的理论研究中，都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型，这不仅可以带来工作上的便利，而且基本上也是符合实际情况的。我们用概率的术语来概括偶然误差的几个特性如下：

(1) 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，其出现的概率为零；

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大；

(3) 绝对值相等的正负误差出现的概率相同；

(4) 偶然误差的数学期望为零，即 $E(\Delta)=E(E(L)-L)=E(L)-E(L)=0$。

换句话说，偶然误差的理论平均值为零。

对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述四个特性。

图 1-1 中的各长方条的纵坐标为$\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$，其面积即为误差出现在该区间内的概率。如果将这个问题提到理论上来讨论，则以理论分布取代经验分布(图1-2)，此时，图 1-1 中各长方条的纵坐标就是 Δ 的密度函数 $f(\Delta)$，而长方条的面积为 $f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$，即代表误差出现在该区间内的概率，$P(\Delta)=f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$。概率密度表达式为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-3-4}$$

式中：σ 为中误差。

当上式中的参数 σ 确定后，即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$，所以该曲线是以横坐标为 0 处的纵轴为对称轴。当 σ 不同时，曲线的位置不变，但分布曲线的形状将发生变化。偶然误差 Δ 是服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量。

第四节　精度和衡量精度的指标

评定测量成果的精度是测量平差的主要任务之一。精度就是指误差分布的密集或离散的程度。例如，两组观测成果的误差分布相同，便是两组观测成果的精度相同；反之，若误差分布不同，则精度也就不同。

从直方图来看，精度高，则误差分布较为密集，图形在纵轴附近的顶峰则较高，且由长方形所构成的阶梯比较陡峭；精度低，则误差分布较为分散，在纵轴附近顶峰则较低，且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线的形态上，即有误差分布曲线较高而陡峭和误差分布曲线较低而平缓两种情形。

在一定的观测条件下进行的一组观测，它对应着一种确定的误差分布。如果分布较为密集，即离散度较小时，则表示该组观测质量较好，也就是说，这一组观测精度较高；反之，如果分布较为离散，即离散度较大时，则表示该组观测质量较差，也就是说，这一组观测精度较低。在相同的观测条件下所进行的一组观测，由于他们对应着同一种误差分布，对于这一组中的每一个观测值，都称为是同精度观测值。

为了衡量观测值的精度高低，可以按本章第三节的方法，把在一组相同条件下得到的误差，用组成误差分布表、绘制直方图或画出误差分布曲线的方法来比较。在实用上，是用一些数字特征来说明误差分布的密集或离散的程度，称它们为衡量精度的指标。衡量精度的指标有很多种，下面介绍几种常用的精度指标。

一、方差和中误差

用 σ^2 表示误差分布的方差，误差 Δ 的概率密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

由方差的定义知

$$\sigma^2=D(\Delta)=E(\Delta^2)-(E(\Delta))^2$$

由于在此 Δ 主要包括偶然误差部分，$E(\Delta)=0$，所以有

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) \mathrm{d}\Delta \tag{1-4-1}$$

σ 就是中误差

$$\sigma = \sqrt{E(\Delta^2)} \tag{1-4-2}$$

不同的 σ 将对应着不同形状的分布曲线，σ 愈小，曲线愈为陡峭，σ 愈大，则曲线愈为平缓。σ 的大小可以反映精度的高低，所以常用中误差 σ 作为衡量精度的指标。

正态分布曲线具有两个拐点，它们在横轴上的坐标为 $X_{拐} = \mu_x \pm \sigma$，μ_x 为随机变量 X 的数学期望。对于偶然误差，由于其数学期望 $E(\Delta) = 0$，所以拐点在横轴上的坐标为

$$\Delta_{拐} = \pm \sigma \tag{1-4-3}$$

如果在相同的条件下得到了一组独立的观测误差，可由式(1-3-1)，并根据定积分的定义可以写出

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) \mathrm{d}\Delta \tag{1-4-4}$$

对于离散型

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n} \text{ 或 } \sigma = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-4-5}$$

“[表达式]”是测量平差教材和文献中的一个惯用符号，与数学中的“$\sum$”读音和意义相同，表示方括号中表达式的所有项求和。例如，$[\Delta\Delta] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2$。

方差是真误差平方(Δ^2)的数学期望，也就是 Δ^2 的理论平均值。在分布律为已知的情况下，$E(\Delta^2)$是一个确定的常数。或者说，方差 σ^2 是$\frac{[\Delta\Delta]}{n}$的极限值，它们都是理论上的数值。实际上观测个数 n 总是有限的，由有限个观测值的真误差只能得到方差和中误差的估值，方差 σ^2 和中误差 σ 的估值分别用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示，即

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} \text{ 或 } \hat{\sigma} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-4-6}$$

这就是根据一组等精度独立真误差计算方差和中误差估值的基本公式。在后续的文字叙述中，在不需要特别强调“估值”意义的情况下，也将“中误差的估值”简称为“中误差”。

二、平均误差

在一定的观测条件下，一组独立的偶然误差绝对值的数学期望称为平均

误差。

设以 θ 表示平均误差，则有

$$\theta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) \mathrm{d}\Delta$$

如果在相同条件下得到了一组独立的观测误差，则平均误差为

$$\theta = \lim_{n \to \infty} \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-4-7}$$

即平均误差是一组独立的偶然误差绝对值的算术平均值之极限值。因为

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) \mathrm{d}\Delta = 2\int_{0}^{+\infty} \Delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\Delta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} (-\sigma \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \right]_0^{\infty}$$

所以有

$$\theta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \approx 0.797\ 9\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma \text{ 或 } \sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\theta \approx 1.253\theta \approx \frac{5}{4}\theta \tag{1-4-8}$$

上式是平均误差 θ 与中误差 σ 的理论关系式。由此可见，不同大小的 θ，对应着不同的 σ，也就对应着不同的误差分布曲线。因此，也可以用平均误差 θ 作为衡量精度的指标。

由于观测值的个数 n 总是一个有限值，在实用上也只能用 θ 的估值来衡量精度，并用 $\hat{\theta}$ 表示 θ 的估值，但仍然简称为平均误差，则

$$\hat{\theta} = \pm \frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-4-9}$$

三、或然误差

随机变量 X 落入区间 (a,b) 内的概率为

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x) \mathrm{d}x$$

对于偶然误差 Δ 来说，误差 Δ 落入区间 (a,b) 的概率为

$$P(a < \Delta < b) = \int_{a}^{b} f(\Delta) \mathrm{d}\Delta$$

或然误差 ρ 的定义是：误差出现在 $(-\rho, +\rho)$ 之间的概率等于 1/2，即

$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) \mathrm{d}\Delta = \frac{1}{2}$$

将 Δ 的概率密度代入上式，并作变量代换，令

$$\frac{\Delta}{\sigma} = t, \Delta = \sigma t, \mathrm{d}\Delta = \sigma \mathrm{d}t$$

则得
$$\int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta)\mathrm{d}\Delta = 2\int_{0}^{\rho/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

由概率积分表查得，当概率为 1/2 时，积分限为 0.674 5，即得

$$\rho \approx 0.674\ 5\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma \text{ 或 } \sigma \approx 1.482\ 6\rho \approx \frac{3}{2}\rho \tag{1-4-10}$$

上式是或然误差 ρ 与中误差 σ 的理论关系。不同的 ρ 也对应着不同的误差分布曲线，因此，或然误差 ρ 也可以作为衡量精度的指标。

实用上，因为观测值个数 n 是有限值，因此也只能得到 ρ 的估值 $\hat{\rho}$，但仍简称为或然误差。它是这样求得的：将相同观测条件下得到的一组误差，按绝对值的大小排列，当 n 为奇数时，取位于中间的一个误差值作为 $\hat{\rho}$，当 n 为偶数时，则取中间两个误差值的平均值作为 $\hat{\rho}$。在实用上，通常都是先求出中误差的估值，然后按(1-4-10)式求出或然误差 ρ。

由于当 n 不大时，中误差比平均误差更能灵敏地反映大的真误差的影响，同时，在计算或然误差时往往是先算出中误差，因此，世界各国通常都是采用中误差作为精度指标，我国也统一采用中误差作为衡量精度的指标。

四、极限误差

中误差不是代表个别误差的大小，而是代表误差分布的离散度的大小。由中误差的定义可知，它是代表一组同精度观测误差平方的平均值的平方根极限值，中误差愈小，即表示在该组观测中，绝对值较小的误差愈多。按正态分布表查得，在大量同精度观测的一组误差中，误差落在$(-\sigma,+\sigma)$、$(-2\sigma,+2\sigma)$和$(-3\sigma,+3\sigma)$的概率分别为

$$\left.\begin{aligned} P(-\sigma < \Delta < +\sigma) &\approx 68.3\% \\ P(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) &\approx 95.5\% \\ P(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) &\approx 99.7\% \end{aligned}\right\} \tag{1-4-11}$$

上式反映了中误差与真误差间的概率关系。绝对值大于中误差的偶然误差，其出现的概率为 31.7%；而绝对值大于二倍中误差的偶然误差出现的概率为 4.5%；特别是绝对值大于三倍中误差的偶然误差出现的概率仅有 0.3%，这已经是概率接近于零的小概率事件，或者说这是实际上的不可能事件。一般以三倍中误差作为偶然误差的极限值 $\Delta_{限}$，并称为极限误差，即

$$\Delta_{限} = 3\sigma \tag{1-4-12}$$

实践中，也常采用 2σ 作为极限误差的。例如测量规范中的限差通常是以 2σ 作为极限误差的。实用上以中误差的估值 $\hat{\sigma}$ 代替 σ。在测量工作中，如果某误差超过了极限误差，那就可以认为它是错误，相应的观测值应进行重测、补测或舍去不用。

五、相对误差

对于某些长度元素的观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达所观测结果的好坏。例如，分别丈量了 1 000 m 及 500 m 的两段距离，它们的中误差均为 ±2 cm，虽然两者的中误差相同，但就单位长度而言，两者精度并不相同。显然前者的相对精度比后者要高。此时，必须采用另一种办法来衡量精度，通常采用相对中误差，它是中误差与观测值之比。如上述两段距离，前者的相对中误差为 1/50 000，而后者则为 1/25 000。

相对中误差是个无名数，在测量中一般将分子化为 1，即用 $1/N$ 表示。

对于真误差与极限误差，有时也用相对误差来表示。例如，经纬仪导线测量时，规范中所规定的相对闭合差不能超过 1/2 000，它就是相对极限误差；而在实测中所产生的相对闭合差，则是相对真误差。与相对误差相对应，真误差、中误差、极限误差等均称为绝对误差。

例 1-1 观测了两段距离，分别为 1 000 m±2 cm 和 500 m±2 cm。问：这两段距离的真误差是否相等？中误差是否相等？它们的相对精度是否相同？

解 这两段距离的真误差不相等。这两段距离的中误差相等，均为±2 cm。它们的相对精度不相同，前一段距离的相对中误差为 1/50 000，后一段距离的相对中误差为 1/25 000。

相对精度是对长度元素而言的，如果不特别说明，相对精度是指相对中误差。角度元素没有相对精度。

第五节 协方差传播律及其应用

协方差传播律是研究函数与自变量之间的协方差运算规律。在实际工作中，某些量的大小往往是由观测值通过一定的函数关系间接计算出来的，例如，图 1-3 中 A 和 B 为已知点，为了确定 P 的平面坐标，观测了边长 s 和角度 β。

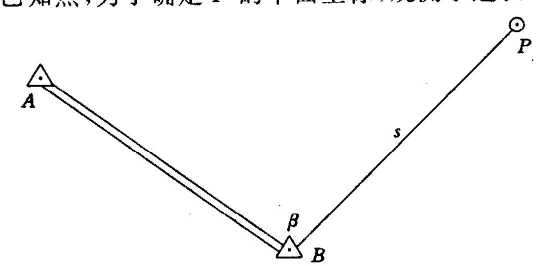

图 1-3