初等数学自学丛书

几何习题解答

刘增贤　王汇淳　合编

中央广播电视大学出版社

初等数学自学丛书

几　何

习　题　解　答

刘增贤　王汇淳　编

中央广播电视大学出版社

初等数学自学丛书

几何习题解答

刘增贤　王汇淳　编

*

中央广播电视大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
重庆新华印刷厂印装

*

开本787×1092　1/32　印张6.5　千字144
1984年5月第1版　1985年2月第1次印刷
印数 1—104,000
书号：7300·19　定价：0.85元

目　录

基 本 知 识

二、基本图形的简单性质

1．略。

2．略。

3．根据图形，填写下列空白：

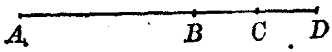


图 1

（1）$AC=BC+(AB)$

（2）$CD=AD-(AC)$

（3）$AC+CD=(AB)+BD$

4．分别用三个大写字母写出图中的$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$，并指出哪些是锐角，哪些是钝角。

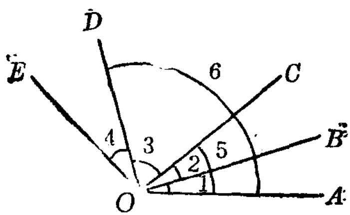


图 2

答：$\angle 1=\angle AOB$ 锐角；$\angle 2=\angle BOC$ 锐角；

$\angle 3=\angle COD$ 锐角；$\angle 4=\angle DOE$ 锐角；

$\angle 5=\angle AOC$ 锐角；$\angle 6=\angle AOD$ 钝角。

5. 根据图形，填写下列空白：

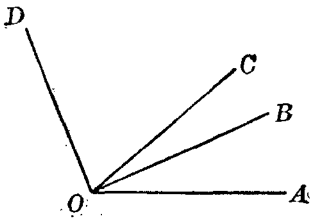


图 3

(1) $\angle AOC = \angle AOB + (\angle BOC)$

(2) $\angle BOD = (\angle BOC) + (\angle COD)$

(3) $\angle COD = \angle AOD - (\angle AOC)$

(4) $\angle BOC = (\angle BOD) - \angle COD$

6. (1) 先把下列角化成度、分、秒，再求它们的余角：$56.28°$，$9.003°$，$0.35°$

(2) 先把下列角度化成度，再求它们的补角：$21°30'$、$87°27'$，$105°16'30''$.

解：(1) $56.28° = 56°16'48''$ 它的余角等于$30°43'12''$；

$9.003° \doteq 9°11'$ 它的余角约等于 $80°59'49''$；

$0.35° \doteq 21'$ 它的余角约等于$89°39'$.

(2) $21°30' = 21.5°$ 它的补角等于$158.5°$；

$87°27' = 87.45°$ 它的补角等于$92.55°$；

$105°16'30'' = 105.275°$ 它的补角等于$74.725°$.

7. 如图4，如果$\angle 1 = 65°16'$，$\angle 2 = 78°51'$，$\angle 3$是多少度？

答：$\angle 3 = 35°53'$.

8. 已知一个角等于它的补角的 3 倍，求这个角.

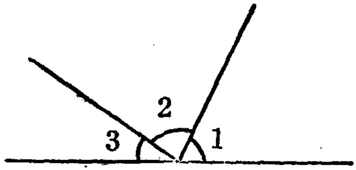


图 4

解：设这个角的度数为x，则其补角的度数为$\frac{x}{3}$。

$\because \quad x+\frac{x}{3}=180°$

$\therefore \quad x=135°$。

9．如图5，直线AB和CD相交于O点，已知$\angle BOC=120°$，求$\angle AOC$、$\angle BOD$和$\angle AOD$的度数。

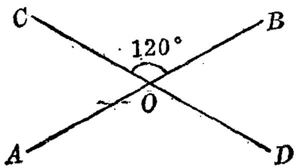


图 5

答：$\angle AOC=60°$；$\angle BOD=60°$；$\angle AOD=120°$。

10．如图6，等圆O与O'相交于A、B两点。在下面的括号内注明下列等式的理由：

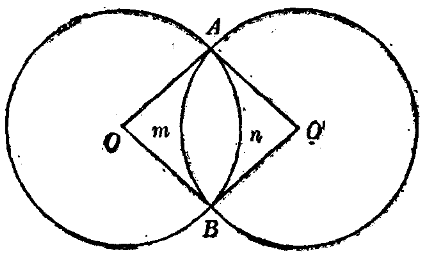


图 6

(1) $OA=OB$

(同圆的半径相等)

(2) $OA=O'A$

（等圆的半径相等）

（3）$O'A=O'B$ （同圆的半径相等）

（4）$OB=O'B$ （等圆的半径相等）

（5）$\overset{\frown}{AmB}=\overset{\frown}{AnB}$ （等圆中等弦所对的劣弧相等）

（6）$\angle AOB=\angle AO'B$ （等圆中，等弦所对的圆心角相等）。

三、尺规作圆的基本知识

1．已知线段 a和 $b(a>b)$，用直尺和圆规作一条线段使它等于：

（1）$a+3b$；（2）$2a-b$；（3）$2(a-b)$．

解：（1）任作一条射线OP，在OP上截取$OA=a$，在射线AP上截取$AB=3b$，则线段$OB=a+3b$．

（2）、（3）略．

2．已知两个锐角$\angle\alpha$和$\angle\beta$，且$\angle\alpha>\angle\beta$，用直尺和圆规作下列各角．

（1）$\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)$　　（2）$\frac{1}{2}(\angle\alpha-\angle\beta)$

（3）$\frac{1}{2}\angle\alpha+\angle\beta$　　（4）$\angle\alpha-\frac{1}{2}\angle\beta$

解 （1）作$\angle AOB=\angle\alpha$，以O为顶点，以OB为一边，在$\angle AOB$外作$\angle BOC=\angle\beta$．作$\angle AOC$的平分线OD．那么$\angle AOD=\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)$．

（2）作$\angle AOB=\angle\alpha$，以O为顶点，以OB为一边，在$\angle AOB$的内部作$\angle BOC=\angle\beta$，作$\angle AOC$的平分线OD．那么$\angle AOD=\frac{1}{2}(\angle\alpha-\angle\beta)$．

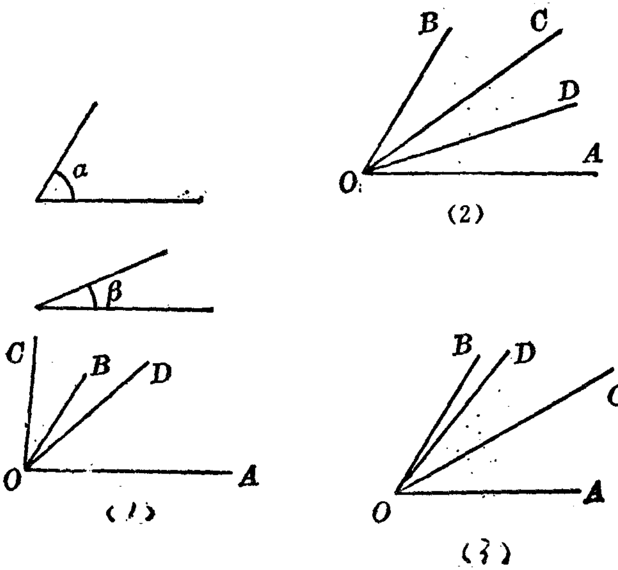


图 7

(3) 作$\angle AOB=\angle\alpha$，再作$\angle AOB$的平分线OC．以O为顶点，OC为一边，在$\angle AOC$的外部作$\angle COD=\angle\beta$，那么$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle\alpha+\angle\beta$．

(4) 作$\angle AOB=\angle\alpha$，以O为顶点，OB为一边，在$\angle AOB$的内部作$\angle BOC=\angle\beta$，作$\angle BOC$的平分线OD，那么$\angle AOD=\angle\alpha-\frac{1}{2}\angle\beta$．（图略）

3．作一个角，使它等于一个已知角的补角的一半．

解：如图8，将已知角$\angle AOB$的一边OA反向延长，得$\angle BOC$，再作$\angle BOC$的平分线OD，那么$\angle COD$或$\angle BOD$为所求。

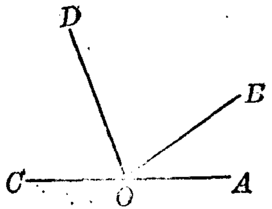


图 8

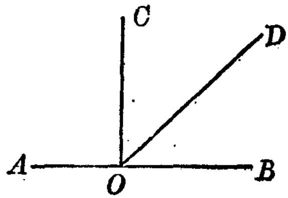


图 9

4. 作一个角，使它等于45°。

解：如图9，作直线AB，在上取一点O，作$\angle AOB$的平分线OC，再作$\angle BOC$的平分线OD，那么$\angle BOD=45°$，$\angle DOC=45°$。

5. 两直线相交于一点，求作所生成的四个角的平分线。

解：如图10，AB、CD相交于O，作$\angle COB$的平分线OE，反向延长OE，得直线FE，过O点作直线HG，使$HG\perp EF$，那么直线EF、HG分别平分AB与CD相交所成的角。

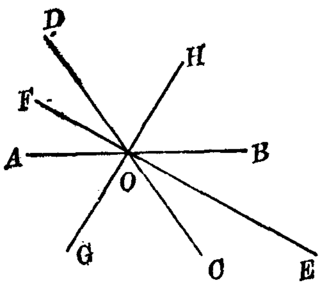


图 10

四、命题、定理和定理的证明

1. 试述下列诸定义：

线段、角、锐角、角的平分线。

略。

2. 试述下列关系的定义：

两直线互相垂直；两角互为余角；两角互为邻补角。

略。

3. 说出下列命题的题设与题断：

(1) 两条直线相交成四个角，如果其中有一个角是直角，那么其余三个角也是直角。

(2) 平角都相等。

(3) 直角都相等。

(4) 在同圆或等圆中，两弧相等，它们所对的弦相等，它们所对的圆心角亦等。

答：(1) 题设：两条直线相交成四个角，其中有一个角是直角

题断：其余的三个角也都是直角。

(2) 题设：有若干个平角。

题断：它们都相等。

(3) 题设：有若干个直角。

题断：它们都相等。

(4) 题设：在同圆或等圆中，两弧相等。

题断：它们所对的弦相等，它们所对的圆心角也相等。

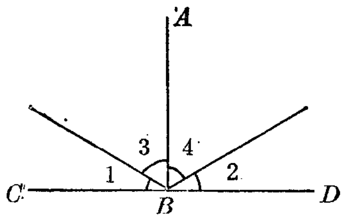


图 11

4. 如图 11，已知：$AB \perp CD$，$\angle 1 = \angle 2$

求证：$\angle 3 = \angle 4$

证明：$\because$ $AB \perp CD$（已知）

$\therefore$ $\angle ABC$和$\angle ABD$都是直角(直角的定义)

$\therefore$ $\angle ABC=\angle ABD$ (直角都相等)

即 $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$ (等量代换)

又 $\angle 1=\angle 2$ (已知)

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$ (等量减等量，差相等)

5. 如图12. 已知：$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1+\angle 2=\angle 3$，

求证：$\angle 1=\frac{1}{2}\angle 3$

证明 $\because$ $\angle 1+\angle 2=\angle 3$ (已知)

$\angle 1=\angle 2$ (已知)

$\therefore$ $\angle 1+\angle 1=\angle 3$ (等量代换)

即 $2\angle 1=\angle 3$

$\therefore$ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle 3$ (等量之半相等)

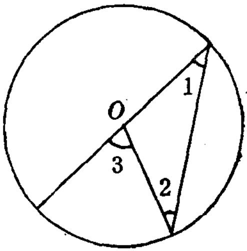


图 12

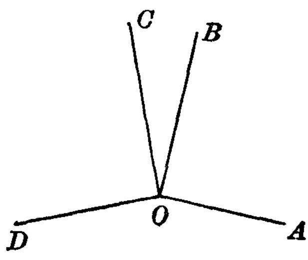


图 13

6. 如图13，已知：$OA\perp OB$，$OC\perp OD$.

求证：$\angle AOC=\angle BOD$.

证明：$\because$ $OA\perp OB$，$OC\perp OD$ (已知)

$\therefore$ $\angle AOB$和$\angle COD$ 都是直角 (直角定义)，

∴　$\angle AOB = \angle COD$（直角都相等）

∴　$\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$（等量加等量，和相等）

即　$\angle AOC = \angle BOD$.

7. 如图14，已知：$\angle 1$和$\angle 3$都是$\angle 2$的余角.

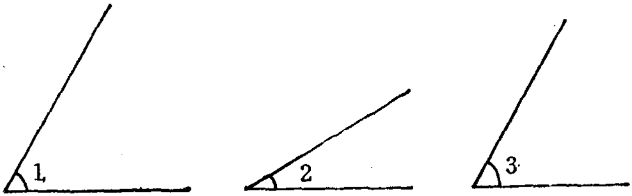


图 14

求证：$\angle 1 = \angle 3$

证明：$\angle 1 + \angle 2$和$\angle 2 + \angle 3$都是直角　（两角互余的定义）

∴　$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2$　（直角都相等）

∴　$\angle 1 = \angle 3$　（等量减等量，差相等）.

综 合 练 习

1. 说明直线、射线和线段的区别.

答：直线是向两个方向无限延伸的，它没有端点；射线是直线的一部分，它向一个方向无限延伸，且有一个端点；线段也是直线的一部分，它有两个端点.

2. 下列语句是否正确？为什么？

（1）延长直线AB到C；

（2）连结两点的直线最短；

（3）连结两点的线段，叫做这两点的距离.

答：（1）不正确，因为直线本身就是向两个方向无限延伸的。

（2）不正确，因为直线是无所谓长短的。

（3）不正确．连结两点的线段长，叫做这两点的距离．

3．说明余角、补角、邻角、邻补角的区别．

答：一个角α的余角是与它之和为90°的角；它的补角是与它之和为180°的角；它的邻角是与它有相同顶点，公用一边且与α居于公用边异侧的角，α的邻补角是既与它相邻，又与它互补的角．

4．试述垂直、垂线、垂足的定义．

从略．

5．什么是命题，什么是定理、公理？

答：命题是用以叙述一个明确判断的完整语句．经过证明为真确的重要命题称为定理．不加证明而被采用的命题称为公理．

6．什么是尺规作图，什么是作图公法？

答：只用圆规和直尺这两种作图工具完成的作图称为尺规作图．根据圆规、直尺的作图功能所决定的作图法称为作图公法．它们有以下四项作图法：

（1）过已知两点作一直线．

（2）延长一已知线段．

（3）以已知点为圆心，已知长为半径作圆．

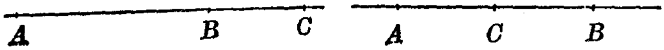
（4）在已知直线上截取一线段等于已知线段．

7．在直线l上有$AB=10\text{cm}$，$BC=5\text{cm}$，分下列两种情形求AB的中点和BC的中点间的距离：

（1）B点在A、C之间；

（2）C点在A、B之间．

答：（1）两线段中点的距离为7.5cm.（图15-1）



(1)　　　　(2)

图 15

（2）两线段中点的距离为2.5cm.（图15-2）

8．已知线段 a、b、c $(a>b>c)$，求作线段.

（1）$3b-2c$　　（2）$a+c-b$　　（3）$4c$

解：（1）作射线OP，在射线OP上截$OB=3b$，在OB上取一点A，使$AB=2c$．则$OA=3b-2c$.（图16）

（2）、（3）略.

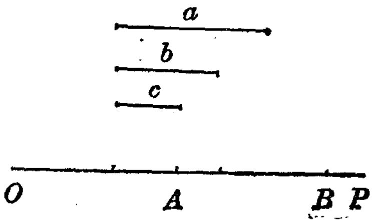


图 16

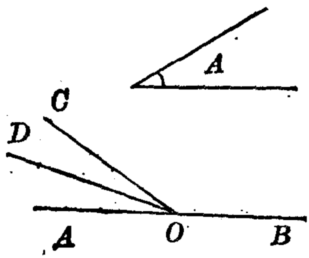


图 17

9．已知$\angle A$，求作

（1）$180^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

（2）$90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

解：（1）作直线AB，在线段AB上取一点O，以O为顶点，以OA为一边作$\angle AOC=\angle A$，作$\angle AOC$的平分线OD，

那么$\angle BOD=180°-\frac{1}{2}\angle A$。（见图17）

（2）作直线AB，在线段AB上取一点O，过O作AB的垂线CD。以O为顶点，以OC为一边作$\angle COE=\angle A$，作$\angle COE$的平分线OF，那么$\angle BOF=90°+\frac{1}{2}\angle A$。（图18）

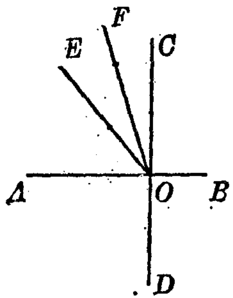


图 18

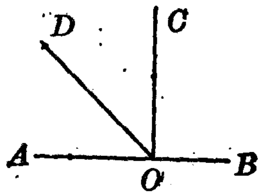


图 19

10．用尺规作出：

（1）135°；（2）67°30′的角。

解：（1）作直线AB，在线段AB上取一点O，过O作AB的垂线CO，再作$\angle COA$的平分线OD，那么$\angle BOD=135°$.（图19）

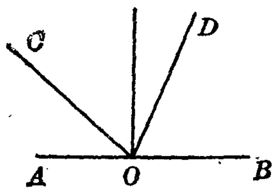


图 20

（2）作$\angle BOC=135°$，作$\angle BOC$的平分线OD，那么$\angle BOD=67°30'$。（图20）

11．已知：AOB是一直线，OD平分$\angle AOC$，OE平分$\angle COB$，（如图21）。

求证：$OD\perp OE$

证明：∵ AOB是一直线（已知），

∴ $\angle BOC + \angle COA = 180°$

∵ OD平分$\angle AOC$（已知），

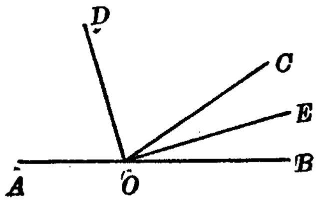


图 21

∴ $\angle COD = \frac{1}{2}\angle COA$ （角平分线定义）

∵ OE平分$\angle COB$ （已知）

∴ $\angle COE = \frac{1}{2}\angle BOC$ （角平分线定义）

∴ $\angle COD + \angle COE = \angle EOD$

$$= \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle COA)$$

$$= \frac{1}{2}(180°) = 90°$$

（等量代换）

∴ $OD \perp OE$ （垂直的定义）。