北京市高等教育自学考试委员会组编

# 高等数学基础

邵士敏 主编　何怡生 副主编

科学出版社

北京市高等教育自学考试委员会组编

# 高等数学基础

邵士敏　主　编
何怡生　副主编

科　学　出　版　社
2000

## 内 容 提 要

本书较系统地讲解解析几何、一元微积分和线性代数的基础知识，包括基本概念、基本运算和有关应用. 本书重点突出，主线清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学. 各节配有较多的基本类型的例题，适量的练习题，并附有练习题答案. 每章后有小结.

本书可作为高等教育自学考试小学教育专业的高等数学基础的自学教材，也可供教育学院和师范专科学校有关的师生和小学、初中的数学老师参考.

北京市高等教育自学考试委员会组编

**高等数学基础**

邵士敏 主 编

何怡生 副主编

责任编辑 吕 虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

北京双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1996年2月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2000年11月第四次印刷 印张:20 5/8

印数:22 031—24 030 字数:545 000

ISBN 7-03-005290-0/O·852

**定 价: 25.00元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

# 前　言

《高等数学基础》是北京市高等教育自学考试小学教育专业的试用教材．本书重点地较系统地讲授空间解析几何、一元函数微积分与线性代数的基础知识，包括基本概念、基本运算和有关应用，使学员理解变量数学的基本思想和一般方法，提高数学素质，以便居高临下地认识和处理小学数学教材，提高小学数学教学质量．

本书选材的原则是，注重基础，抓住主线，突出重点，并适当联系中小学数学知识．作为自学教材，本书争取做到：通俗易懂，深入浅出，便于自学；引进概念力求自然，讲述概念力求清楚，并尽量给出几何解释和直观说法；重视基本训练，配有较多的基本类型的例题，并给出解法小结；每章后总结该章的知识结构和数学思想方法．此外，编入了少量编者认为重要但超出大纲要求的内容，供读者参考，这些内容前加了 * 号．

邵士敏先生任本书主编，何怡生任副主编，参加编写的有：陈通鑫、王建明（第一、二、三章），刘培娜（第九章），陈焱午（第十、十一、十二章），何怡生（第四、五、八章），邓文虹（第六、七章）等同志．全书由邵士敏先生统编．

本书在编写过程中得到北京教育学院和北京市自学考试办公室的大力支持；清华大学施学瑜先生仔细地审阅了本书的初稿，提出了许多宝贵意见．在此表示衷心的感谢．

由于水平所限，又兼仓促完稿，书中定有不少缺点错误，诚恳地希望读者批评指正．

编者

1995 年 12 月

# 目　录

## 第一篇　解析几何



## 第二篇　微积分

# 第三篇 线性代数

# 第一篇　解析几何

## 第一章　平面解析几何复习

### §1　直线

**1.1　直线方程的几种形式**

1. 点斜式

已知直线 $l$ 过定点 $P_1(x_1,y_1)$，斜率是 $k$，直线 $l$ 的方程是

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

2. 斜截式

已知直线 $l$ 的斜率是 $k$，它和 $y$ 轴交于 $P_1(0,b)$ 点，直线 $l$ 的方程是

$$y=kx+b.$$

3. 两点式

已知直线 $l$ 通过两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，当 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)\neq0$ 时，直线 $l$ 的方程是

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

4. 截距式

已知直线 $l$ 在 $x$ 轴和 $y$ 轴上的截距分别是 $a$ 和 $b(a\neq0,b\neq0)$，直线 $l$ 的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ .$$

当直线 $l$ 过 $O(0,0)$ 时，直线方程无截距式.

5. 一般式

任一直线的方程都是关于 $x$ 和 $y$ 的一次方程，它的一般形式为

$$Ax+By+C=0 .$$

这里 $A,B,C$ 是任意实数，并且 $A,B$ 不同时为零.

这五种形式之间是互相联系的，在一定条件下，从其中一种形式的方程，可以推导出其他形式的方程.

例如，给出五种形式的方程，只要经过去分母、去括号、移项、合并同类项等步骤，就可以化为一般形式，而从一般形式也可以导出其他形式的方程.

事实上，若给定一般式为

$$Ax+By+C=0,$$

显然有

$$Ax+By+C=0 \begin{cases} \xrightarrow{B\neq 0} & y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}. \quad \text{（斜截式）} \\ \xrightarrow[A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0]{} & \dfrac{x}{-\dfrac{C}{A}}+\dfrac{y}{-\dfrac{C}{B}}=1. \quad \text{（截距式）} \end{cases}$$

**例 1** 一直线过点$(-2,4)$，它的倾斜角等于直线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+3$ 的倾斜角的 2 倍，求这直线的方程.

**解** 由方程 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+3$，知其斜率为 $k_1=\mathrm{tg}\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

又由题设知，所求直线的倾斜角为 $2\alpha_1$，

于是 $$\mathrm{tg}2\alpha_1=\frac{2\mathrm{tg}\alpha_1}{1-\mathrm{tg}2\alpha_1}=\frac{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{3},$$

$\therefore$ $k=\sqrt{3}$，且过点$(-2,4)$.

$\therefore$ 由点斜式方程得

$$y-4=\sqrt{3}(x+2),$$

即 $$\sqrt{3}x-y+2(2+\sqrt{3})=0 .$$

**例 2** 如图 1-1，三角形的三个顶点是 $A(2,1)$，$B(0,7)$，$C(-4,-1)$，求 $BC$ 边上的中线所在直线的方程.

**解** 设 $BC$ 的中点为 $M$，则 $M$ 点的坐标为 $(-2,3)$.

由两点式得 $BC$ 边上的中线 $AM$ 所在的直线方程为

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{1-3}{2+2},$$

即 $\qquad x+2y-4=0.$

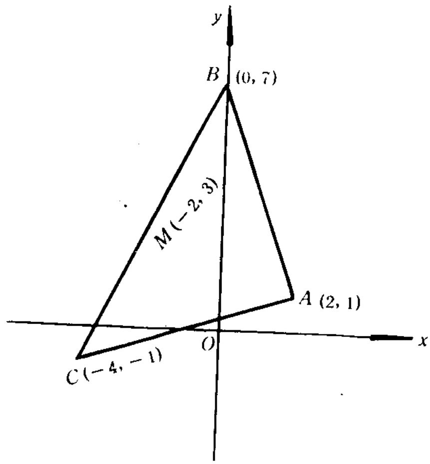


图 1-1

***例 3** 直线过(6，−2)点，并且与两坐标轴围成的直角三角形面积为 3 个面积单位，求这直线的方程(如图 1-2).

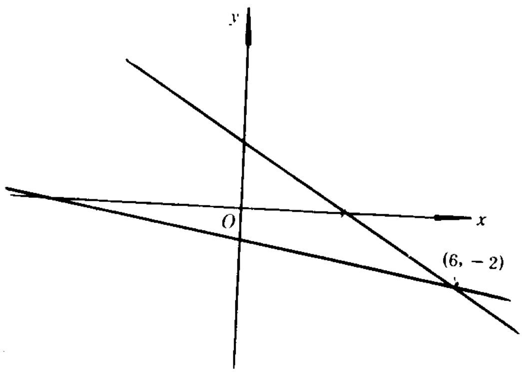


图 1-2

**解** 用截距式表示所求直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

因直线过(6，−2)点，所以

$$\frac{6}{a}+\frac{-2}{b}=1,$$

即
$$6b-2a=ab.$$

又知所求直线与两坐标轴围成的直角三角形面积为3，所以 $|ab|=6$，故得 $6b-2a=\pm 6$，即

$$a-3b=\pm 3.$$

据已知条件的几何意义，容易得知 $a,b$ 必须同号，故

解方程组 $\begin{cases} a-3b=-3, \\ ab=6, \end{cases}$

得
$$\begin{cases} a_1=3, \\ b_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} a_2=-6, \\ b_2=-1. \end{cases}$$

因此所求直线方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1 \text{ 和 } \frac{x}{-6}+\frac{y}{-1}=1.$$

化简，得

$$2x+3y-6=0 \text{ 和 } x+6y+6=0.$$

### 1.2 点到直线的距离

已知直线 $l$ 和一定点 $P_1(x_1,y_1)$，求点 $P_1$ 到直线 $l$ 的距离 $d$. 设直线 $l$ 的方程为

$$Ax+By+C=0,$$

则
$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

**例 4** 求经过点(−5,5)，且和原点间的距离为 1 的直线方程.

**解** 经过(−5,5)点的直线方程，用点斜式表示为

$$y-5=k(x+5),$$

化成一般式，得 $kx-y+5k+5=0$.

原点到这条直线的距离为

$$\frac{|5k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

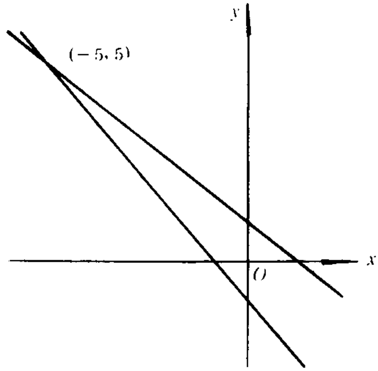


图 1-3

解此方程得 $k_1=-\dfrac{3}{4}$，$k_2=-\dfrac{4}{3}$. 代入点斜式方程，得 $3x+4y-5=0$ 和 $4x+3y+5=0$(如图 1-3).

## 1.3 直线与直线间的关系

1. 两直线的交角

两直线 $l_1$ 与 $l_2$ 相交构成四个角，它们是两对对顶角，为简单起见，可先求锐角，用公式

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|.$$

这里的 $k_1$ 与 $k_2$ 分别是直线 $l_1$，$l_2$ 的斜率.

**例 5** 直线经过点 $A(2,-1)$，且和直线 $5x-2y+3=0$ 的夹角是 45°，求此直线的方程.

**解** 所求直线经过点 $A(2,-1)$，故可设此直线的点斜式方程为：$y+1=k(x-2)$. 已知直线 $5x-2y+3=0$ 的斜率 $k'=\dfrac{5}{2}$，因为此两直线的夹角为 45°，则

$$\operatorname{tg}45^\circ=\left|\frac{k-\dfrac{5}{2}}{1+\dfrac{5}{2}k}\right|,$$

即 $$\left|1+\frac{5}{2}k\right|=\left|k-\frac{5}{2}\right|,$$

解得 $$k_1=\frac{3}{7},\quad k_2=-\frac{7}{3}.$$

所求的直线方程为 $y+1=\frac{3}{7}(x-2)$，$y+1=-\frac{7}{3}(x-2)$.

即 $$7y-3x+13=0 \text{ 和 } 3y+7x-11=0.$$

2. 两直线平行与垂直的条件

设直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的斜率分别为 $k_1$ 与 $k_2$，它们的方程分别是

$$l_1:\ y=k_1x+b_1;\qquad l_2:\ y=k_2x+b_2.$$

(1)两条直线有斜率且不重合，如果它们平行，则斜率相等；反之，如果它们的斜率相等，则它们平行. 即

$$l_1/\!/l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.$$

(2)两条直线都有斜率，如果它们互相垂直，则它们的斜率互为负倒数；反之，如果它们的斜率互为负倒数，则它们互相垂直. 即

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}. \text{ 或 } l_1\perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1.$$

**例 6** $a$ 为何值时，直线 $3x-2y+6=0$ 和 $ax-y+2=0$.

(1)互相平行；

(2)互相垂直.

**解** 由 $3x-2y+6=0$，得 $y=\frac{3}{2}x+3$，

$\therefore\quad k_1=\frac{3}{2}.$

由 $ax-y+2=0$，得 $y=ax+2$ ，

$\therefore\quad k_2=a.$

(1)由两直线平行的条件知

$k_1=k_2$，

$\therefore\quad a=\frac{3}{2}.$

(2)由两直线垂直的条件知

$k_1\cdot k_2=-1$，即 $\frac{3}{2}a=-1$，

$\therefore \quad a=-\dfrac{2}{3}.$

3. 两直线的交点

设两条直线的方程是

$l_1$：$A_1x+B_1y+C_1=0$；　　$l_2$：$A_2x+B_2y+C_2=0$.

直线 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点，同时在此两条直线上，它的坐标必须同时满足这两条直线的两个方程，这样，要求两条直线的交点坐标，就是求方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

的解. 根据代数知识可知，当 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解，此解即为二直线交点的坐标.

## 练 习 1

1. 求下列直线的方程，并作图

(1)斜率为 4，过$(-2,3)$点；

(2)过原点，倾角 $\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$.

2. 已知直线上两点的坐标 $A(\dfrac{1}{2},2)$，$B(2,1)$，求直线上横坐标为 1 的 $C$ 点的纵坐标.

3. 已知 $A(3,3)$和 $B(-1,-5)$两点，求过点 $M(-3,2)$且与 $AB$ 平行的直线方程.

4. $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(5,3)$，$B(7,-1)$，$C(-1,5)$，求三条高所在的直线方程.

5. 直线经过点 $P(2,-3)$，且满足下列条件，求直线方程.

(1)它的倾角的正弦是$\dfrac{4}{5}$；

(2)它的倾角是直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的倾角的二倍.

6. 求证直线 $x+2y-5=0$，$2x+4y+5=0$，$2x-y=0$，$7x-11y-35=0$ 围成的一个直角梯形.

7. 已知 $A(6,3)$，$B(9,3)$，$C(3,6)$ 三点，求 $\triangle ABC$ 的三个内角.

8. 已知 $A(3,-2)$，$B(5,2)$，$C(-1,-4)$ 三点，求 $\triangle ABC$ 的面积.

). 一直线过 $(2,-3)$ 点，且平行于 $(1,2)$，$(0,-\frac{3}{2})$ 两点的连线，求它的方程.

10. 一直线通过点 $(5,2)$，且在 $x$ 轴上的截距和在 $y$ 轴上的截距相等，求它的方程.

# §2 圆锥曲线

## 2.1 椭圆及其标准方程

1. 定义 如果平面上一个动点到两个定点的距离的和是一个定数，这个动点的轨迹叫做椭圆.

这两个定点叫做椭圆的焦点，常用 $F_1$，$F_2$ 表示，两焦点之间的距离叫做焦距.

2. 标准方程

根据椭圆的定义，选择直角坐标系，取过焦点 $F_1$，$F_2$ 的直线为 $x$ 轴，线段 $F_1F_2$ 的垂直平分线为 $y$ 轴.

设 $P(x,y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$；那么 $P$ 到两个焦点的距离的和是 $2a$，即

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

由此可推得方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0). \tag{2.1}$$

这个方程叫做椭圆的标准方程(如图 1-4).

它所表示的椭圆的焦点在 $x$ 轴上. 这里 $c^2=a^2-b^2$.

如果椭圆的焦点在 $y$ 轴上，焦点是 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$(如图

1-5)，只要将方程(2.1)的 $x$，$y$ 互换，就可以得到它的方程. 这时方程为

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0).$$

这个方程也是椭圆的标准方程.

3. 几何性质

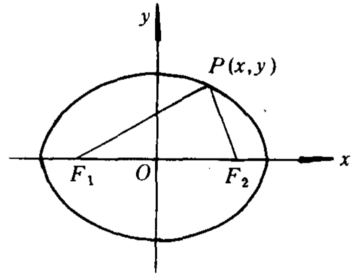


图 1-4

(1)对称性

椭圆关于 $x$ 轴、$y$ 轴和原点都是对称的. $x$ 轴和 $y$ 轴都是椭圆的对称轴，原点是椭圆的对称中心，又叫做椭圆的中心，根据这个性质，在画椭圆的图形时，只要画出椭圆在第一象限的图形，就可以画出它的整个图形.

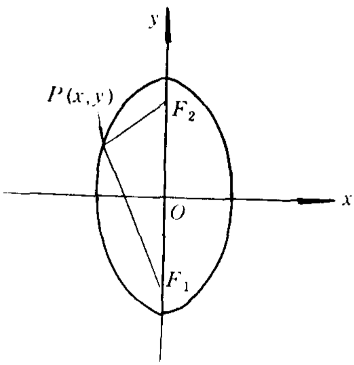


图 1-5

(2)顶点

椭圆和坐标轴的四个交点 $A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$，叫做椭圆的顶点.

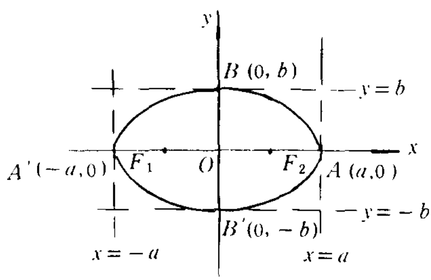


图 1-6

线段 $A_1A_2$，$B_1B_2$ 分别叫做椭圆的长轴和短轴. $|A_1A_2|=2a$，$|B_1B_2|=2b$. $a$ 和 $b$ 分别叫做椭圆的长半轴和短半轴. $|F_1F_2|=2c$ 是焦距，$c$ 叫做椭圆的半焦距.

(3)范围

椭圆位于直线 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所围成的矩形之内(如图 1-

6).

(4)离心率

椭圆的焦距与长轴的比 $e=\frac{c}{a}$,叫做椭圆的离心率,因为 $a>c>0$,所以 $0<e<1$. 当 $e$ 的值越接近于 1 时,椭圆就越扁平;当 $e$ 的值越接近于 0 时,椭圆就越接近于圆.

如果 $a=b$,则 $c=0$,两个焦点重合,这时椭圆的标准方程成为

$$x^2+y^2=a^2,$$

图形就是圆了.

对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,相应于焦点 $F(c,0)$ 的准线方程是 $x=\frac{a^2}{c}$. 由椭圆的对称性可得,相应于焦点 $F'(-c,0)$ 的准线方程是 $x=-\frac{a^2}{c}$,所以椭圆有两条准线.

**例 1** 求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的长轴和短轴的长、焦点的坐标、准线方程和离心率,并作图.

**解** 把椭圆方程化为标准形式,得

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1,$$

可知 $a=2,b=1,c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

因此,这个椭圆的长轴 $2a=4$,短轴 $2b=2$,焦点坐标为 $F_1(-\sqrt{3},0)$ 和 $F_2(\sqrt{3},0)$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,准线方程 $x=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

作出椭圆的四个顶点:$A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,$B_1(0,-1)$,$B_2(0,1)$. 从它的标准方程可得 $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$,在第一象限 $x\leqslant 2$ 的范围内计算几组 $x,y$ 的对应值:

| $x$ | 0.5 | 1 | 1.5 | …… |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.97 | 0.87 | 0.66 | …… |

先描点画出椭圆在第一象限内的图形,再利用它的对称性,就可以