四川省教育科学研究所　主编
四川省中小学教材审查委员会　审查

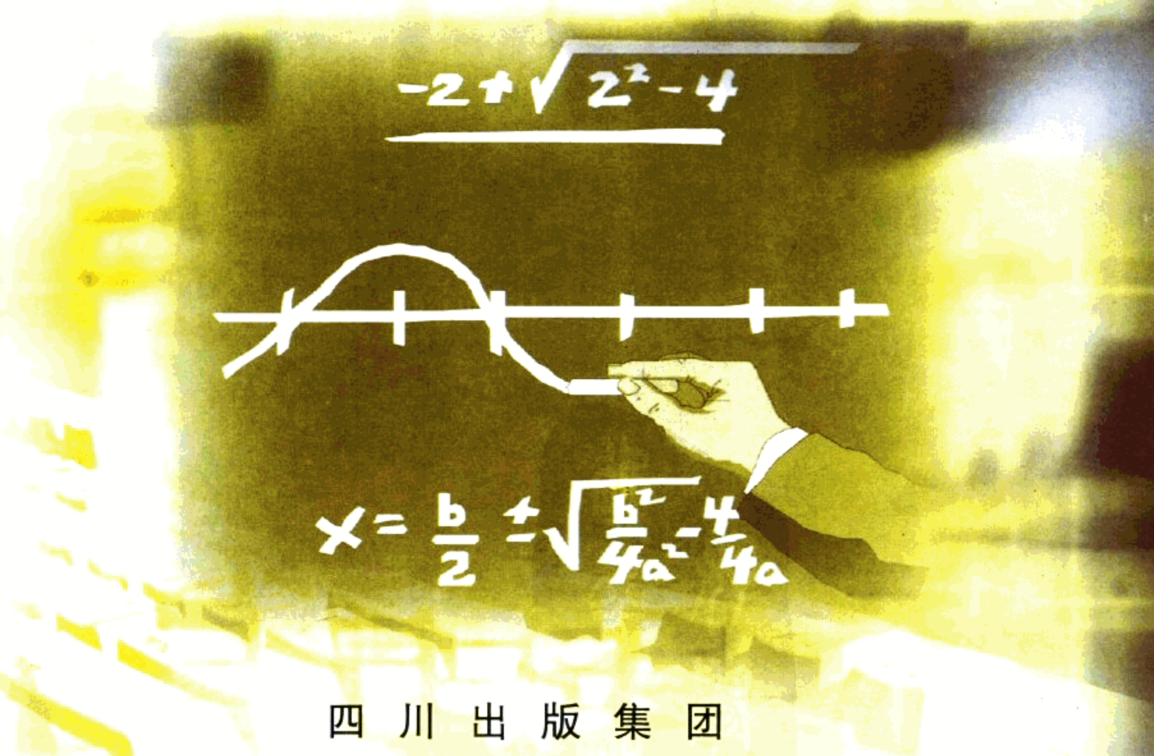
知识与能力训练

ZHI SHI YU NENG LI XUN LIAN

高中数学

第二册（下A）

（必修）



四川出版集团
四川教育出版社

知识与能力训练

高中数学

第二册（下A）
（必修）

四川省中小学教材审查委员会　审查
四川省教育科学研究所
四川省中学学科中心组　主编

四川省教育厅审查推荐　　学生自愿购买

四川出版集团
四川教育出版社
·成都·

责任编辑：余　兰
版式设计：张　涛
封面设计：何一兵
责任校对：左倚丽
责任印制：吴晓光

知识与能力训练
ZHISHI YU NENGLI XUNLIAN
高中数学第二册(下A)(必修)
GAOZHONG SHUXUE DI-ERCE (XIA A) (BIXIU)

四川省教育科学研究所
四川省中学学科中心组 主编

四川出版集团·四川教育出版社　出版
(成都市槐树街2号　邮政编码：610031)
四川新华文轩连锁股份有限公司发行
成都市辰生印务有限责任公司印刷
成品规格 260mm×185mm　　印张 9.75 字数 248 千字
2005年12月第3版　　2005年12月第4次印刷
印数：132001—144000册
* * *
ISBN7-5408-3856-6　　定价：8.55元

说明

为了适应中学课程（教学）计划和大纲、教材调整的要求，根据我省各地中学教学的实际需要，经四川省中小学教材审查委员会同意，我们组织省内一批富有教学经验的教师和教学研究人员，重新改编了这套中学《知识与能力训练》，供我省中学生使用，亦供教师参考。

这套《知识与能力训练》由四川省教育科学研究所和四川省中学学科中心组主编，编委会领导整个编写工作，由四川省中小学教材审查委员会审定。

这套书与义务教育初中教学大纲（试用修订版）、教材（2002 年版）或高中各科教学大纲（试验修订版）、教材配套使用。编写时注重思想性、教育性；遵循大纲和教材要求，注重基础知识和基本技能的训练及能力的培养；注重实用性，力求做到与节（课）、章（单元）、学期、学年的教学同步；注重层次性，章（单元）末有检测题，书末有总复习题，其内容均考虑到高初中毕业会考和中考、高考的要求，可供不同的读者选用。

本册由四川省中学数学学科中心组编写，陈出、王军、李拴、曾明锵、唐德全等执笔，于克俊统稿，主编是曾渝。

当前，课程（教学）计划、大纲、教材以及“教学要求”时有变动，编写中疏漏难免，不足之处请读者提出批评、建议，以便改进。

四川省教育科学研究所
四川省中学学科中心组
2006 年 2 月

中学《知识与能力训练》编委会人员

目录

第九章
直线、平面、简单几何体

通过本章学习，了解或掌握关于立体图形的一些基础知识．这些基础知识可分为两大部分：第一部分为直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系的判定与性质；第二部分为简单几何体（包括棱柱、棱锥、多面体和正多面体、球等）的概念和性质，以及一些有关的面积与体积计算．

一　空间直线和平面

9.1　平面

【知识要点】

平面：

常见的桌面、黑板面、平静的水面等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面，就是从这样的一些物体中抽象出来的．但是，几何里的平面是无限延展的．

通常我们画出直线的一部分来表示直线（直线是无限延伸的）．同样地，我们也可以画出平面的一部分来表示平面．通常画平行四边形来表示平面（图 9－1）．当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成邻边的 2 倍长．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 9－2）．这样，看起来立体感强一些．

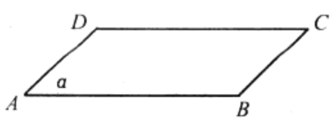


图 9－1

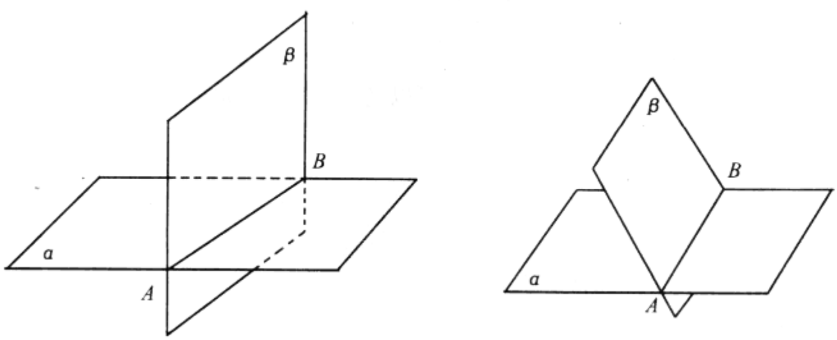


图 9－2

平面通常用一个希腊字母 α，β，γ 等来表示，如平面 α，平面 β，平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 9－1）．

平面的基本性质：

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

如果直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就说直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l，记作 $l \subset \alpha$.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

如果平面 α 和 β 有一条公共直线 l，就说平面 α 和 β 相交，交线是 l，记作 $\alpha \cap \beta = l$.

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

“有且只有一个平面”也可以说成“确定一个平面”.

【基础题例】

例 1　选择题：空间四点 A，B，C，D，其中任何三点都不在同一直线上，则这四点可以确定（　　）.

(A) 一个平面　　(B) 四个平面

(C) 无数个平面　　(D) 一个或四个平面

分析：可分四点共面和四点不共面两种情况讨论. 当四点共面时，确定一个平面；当四点不共面时，四点中任取三点都可确定一个平面，所以这四点共可以确定四个平面.

答案：(D).

例 2　如图 9－3，已知 AB，CD，EF 是三条直线，其中 $AB /\!/ CD$，EF 与 AB 和 CD 都相交，求证 AB，CD，EF 三直线在同一平面内.

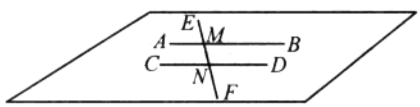


图 9－3

分析：要证明三条直线在同一平面内，可以先由其中两条直线确定一个平面，然后再证明第三条直线也落在这个平面内. 因为 AB 和 CD 是两条平行直线，所以可先确定一个平面 α，再证明直线 EF 也落在平面 α 内就可以了.

证明：因为 $AB /\!/ CD$，所以 AB 和 CD 可以确定一个平面 α.

设 $AB \cap EF = M$，$CD \cap EF = N$.

因为　$M \in AB$，$AB \subset$ 平面 α，

所以　$M \in$ 平面 α.

同理　$N \in$ 平面 α.

又因为　$M \in EF$，$N \in EF$，

所以根据公理 1，$EF \subset$ 平面 α.

所以 AB，CD，EF 三条直线在同一平面内.

练习 1

1．**选择题**（下面各小题都给出代号为（A），（B），（C），（D）的四个结论，其中只有一个是正确的，把你认为正确的结论代号写在题中圆括号内）①：

（1）下列说法正确的是（　　）．

（A）经过三点，有且只有一个平面

（B）经过两条直线，有且只有一个平面

（C）两个平面仅有一个公共点

（D）线段 CD 在平面 β 内，直线 CD 也在平面 β 内

（2）下列记法正确的是（　　）．

（A）点 B 在直线 b 上，记作 $B \subset b$

（B）点 B 在直线 b 外，记作 $B \not\subset b$

（C）点 B 在平面 β 内，记作 $B \subset \beta$

（D）直线 b 在平面 β 内，记作 $b \subset \beta$

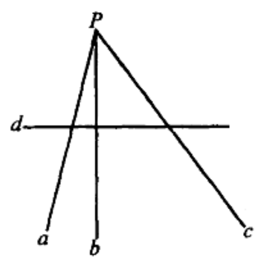
2．**填空题**：

（1）在立体几何中，通常画________来表示平面．当平面是水平放置的时候，通常把________画成________度，横边画成________．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成________．

（2）平面通常用一个________来表示，也可以用________．

3．当三个点的位置怎样时，则经过它们的平面不止一个？

4．已知：如图，直线 a，b，c，d 是两两相交的，其中直线 a，b，c 相交于一点 P．证明：直线 a，b，c，d 共面．



（第 4 题）

① 本书的选择题均同此，后面不再说明．

[redacted]

9.2　空间直线

【知识要点】

空间两条直线的位置关系：

相交直线——有且仅有一个公共点；

平行直线——在同一个平面内，没有公共点；

异面直线——不同在任何一个平面内，没有公共点.

两条直线：

两条平行直线的判定——公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

性质——定理　如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

推论　如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

异面直线：

判定　过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

也可根据两条异面直线的概念来判定.

异面直线 a 和 b 所成的角　直线 a，b 是异面直线，经过空间任意一点 O，作直线 a'，b'，并使 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$. 我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 和 b 所成的角.

异面直线 a 和 b 所成的角，只由直线 a 和 b 的相互位置来确定，而与点 O 位置的选择无关. 为了简便，点 O 可以在两条异面直线中的一条上选取.

通过画平行线的方式，使两条异面直线移到同一平面的位置上，是研究异面直线所成的角时使用的方法. 这种把立体图形问题转化为平面图形问题的方法很重要.

两条异面直线互相垂直　如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线互相垂直. 异面直线 a 和 b 互相垂直，也记作 $a\perp b$.

两条异面直线的公垂线　和两条异面直线都垂直相交的直线，叫做两条异面直线的公垂线.

两条异面直线的距离　两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段（公垂线段）的长度，叫做两条异面直线的距离.

【基础题例】

例 1　三个平面两两相交，得到三条交线，如果其中两条相交于一点，那么第三条也经过这点.

分析：如图 9－4，三个平面 α，β，γ，平面 α 和平面 γ 的交线为 OB，平面 β 和平面 γ 的交线为 OA，要证明平面 α 和平面 β 的交线也过 O 点，关键在于证明点 O 为平面 α 和平面 β 的公共点.

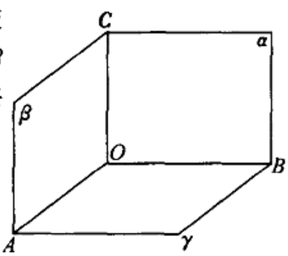


图 9－4

证明：$\because\ \ \alpha\cap\gamma=OB$，

$\therefore\ \ O\in\alpha$.

$\because\ \ \beta\cap\gamma=OA$，

$\therefore\ \ O\in\beta$，即 O 是 α，β 的公共点.

根据公理 2，平面 α 和平面 β 的交线过 O 点.

例2 已知 A，B，C，D 是空间的四个点，AB，CD 是异面直线.

求证：AC 和 BD，AD 和 BC 也都是异面直线.

分析：要证明 AC 和 BD 是异面直线，就是要证明 AC 和 BD 不在同一个平面内. 可以应用反证法，先假定 AC 和 BD 在同一个平面内，然后证明它与已知条件"AB，CD 是异面直线"发生矛盾，由此证明结论成立. 同理可证 AD 和 BC 是异面直线.

证明：用反证法证明. 假设直线 AC 和 BD 共面，即有平面 α 使 $AC \subset \alpha$，$BD \subset \alpha$，于是 A，B，C，D 四点在同一个平面 α 内. 这样，AB，CD 就分别有两个点在平面 α 内，所以 AB 和 CD 在平面 α 内，即 AB 和 CD 不是异面直线. 这就与已知条件矛盾.

所以 AC 和 BD 是异面直线.

同理，AD 和 BC 也是异面直线.

评注：要证明两条直线是异面直线，除了应用"过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线"直接证明外，也常常应用反证法，如本例.

例3 如图9-5，在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$ cm，$AA_1=2$ cm，求 BC 和 A_1C_1 所成角的度数以及 AA_1 和 BC_1 所成角的正切值.

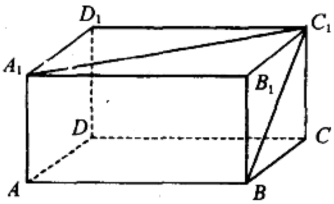


图9-5

分析：根据"过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线"可直接判断 BC 和 A_1C_1、AA_1 和 BC_1 是两对异面直线，再根据"直线 a，b 是异面直线. 经过空间任意一点 O，作直线 a'，b'，并使 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$. 我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 和 b 所成的角.""为了简便，点 O 可以在两条异面直线中的一条上选取"，先确定两对异面直线 BC 和 A_1C_1，AA_1 和 BC_1 所成的角，再根据平面几何的有关知识求出它们的度数或正切值.

解：$\because$ $B_1C_1 /\!/ BC$，

$\therefore$ BC 和 A_1C_1 所成的角就是 B_1C_1 和 A_1C_1 所成的锐角 $\angle A_1C_1B_1$.

在 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=AB=4$ cm，$B_1C_1=BC=4$ cm，$\angle A_1B_1C_1=90°$，即 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 是等腰直角三角形.

$\therefore$ $\angle A_1C_1B_1=45°$，即 BC 和 A_1C_1 所成角为 $45°$.

又 $\because$ $BB_1 /\!/ AA_1$，

$\therefore$ AA_1 和 BC_1 所成的角就是 BB_1 和 BC_1 所成的锐角 $\angle B_1BC_1$.

在 $Rt\triangle B_1BC_1$ 中，$BB_1=AA_1=2$ cm，$B_1C_1=BC=4$ cm，$\angle BB_1C_1=90°$.

$\therefore$ $\tan\angle B_1BC_1=\dfrac{B_1C_1}{BB_1}=\dfrac{4}{2}=2$，即 AA_1 和 BC_1 所成角的正切值为 2.

例4 如图9-6，$A_1B_1C_1D_1—ABCD$ 是一个正方体，若棱长为 m，P，Q，R，S 分别为棱 AA_1，BB_1，CC_1 上的点，且 $AP=BQ=B_1R=C_1S=\dfrac{1}{3}m$，求异面直线 PQ 与 RS 间的距离.

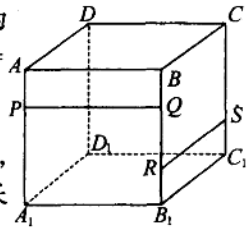


图9-6

分析：根据两条异面直线的公垂线和两条异面直线的距离的定义，先找出 PQ，RS 的公垂线段，再用平面几何的有关知识求出它的长度.

解：∵ $AP \parallel BQ$ 且 $AP = BQ = \frac{1}{3}m$，而$\angle PAB = 90°$，

∴ $APQB$ 为矩形．

∴ $PQ \perp BB_1$．

同理 $RS \perp BB_1$．

又∵ $PQ \cap BB_1 = Q$，$RS \cap BB_1 = R$，

∴ RQ 是异面直线 PQ 与 RS 的公垂线段．

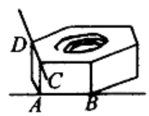
∵ $RQ = BB_1 - BQ - B_1R = m - \frac{1}{3}m - \frac{1}{3}m = \frac{1}{3}m$．

∴ 异面直线 PQ 与 RS 间的距离为$\frac{1}{3}m$．

练习 2

1．**判断题**（正确的在括号内画“√”，错误的在括号内画“×”）①：

(1) 图中六角螺帽的两条棱 AB，CD 所在直线是异面直线．（　　）



（第1(1)题）

(2) 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成角相等．（　　）

2．**填空题**：

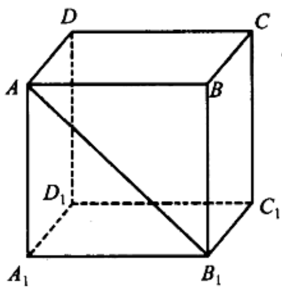
(1) ____________两条直线叫做异面直线．

(2) 平面里的定义、定理等，对于非平面图形，____________才能应用．

(3) 过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内____________的直线是异面直线．

(4) 确定一个平面的两条直线只能是____________．

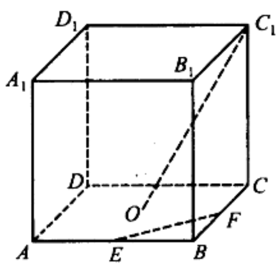
(5) 过一点而和两条异面直线分别平行的两条相交直线所成的____________叫做两条异面直线所成的角．这个角如果是直角，我们就说____________．



（第2(6)题）

(6) 如图，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中选出两条棱和两条面对角线，使这四条线段所在的直线两两都是异面直线，如果我们选定一条面对角线 AB_1，那么另外三条线段可以是____________．（只需写出一种）

(7) 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为正方形$ABCD$ 的中心，E，F 分别为AB、BC 的中点，则异面直线 C_1O 与 EF 的距离为____________．



（第2(7)题）

3．**选择题**：

(1) 下列说法正确的是（　　）．

(A) 不相交的两条直线叫做平行直线

(B) 第 1（1）题图中六角螺帽的两条棱 AB，CD 所在直

① 本书的判断题均同此，后面不再说明．

线所成角是 120°

(C) 两条互相垂直的直线不一定相交

(D) 两条异面直线的公垂线长叫做两条异面直线的距离

(2) 下列记法正确的是（　　）.

(A) 直线 a 是经过平面 α 内点 A 的直线记作 $a\in\alpha$，$A\in a$，$A\in\alpha$

(B) AB 是异面直线 a 和 b 的公垂线段记作 $AB\perp a$，$AB\cap a=A$，$AB\perp b$，$AB\cap b=B$

(C) 直线 b 经过平面 β 内的点 B 和平面 β 外的点 A 记作 $B\subset b$，$A\subset b$，$B\subset\beta$，$A\not\subset\beta$

(D) 直线 c 在平面 α 内，但在平面 β 外记作 $c\in\alpha$，$c\notin\beta$

(3) 已知 a，b，c，d 是四条直线，如果 $a\perp c$，$a\perp d$，$b\perp c$，$b\perp d$，则结论“$a\parallel b$”与“$c\parallel d$”中成立的情况是(　　).

(A) 一定同时成立

(B) 至多一个成立

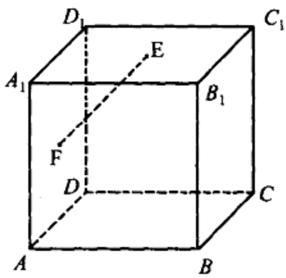
(C) 至少一个成立

(D) 可能同时不成立

(4) 如图，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 和 ADD_1A_1 的中心，则 EF 和 CD 所成的角是(　　).

(A) 30°　　(B) 45°

(C) 60°　　(D) 90°



(第3(4)题)

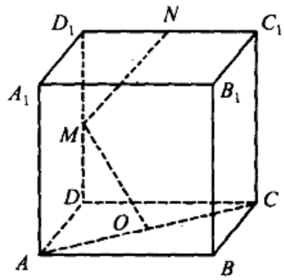
(5) 如图，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是底面 $ABCD$ 的中心，M，N 分别是棱 DD_1，D_1C_1 的中点，则直线 OM（　　）.

(A) 是 AC 和 MN 的公垂线

(B) 垂直于 AC，但不垂直于 MN

(C) 垂直于 MN，但不垂直于 AC

(D) 与 AC，MN 都不垂直



(第3(5)题)

4. 垂直于同一条直线的两条空间直线，它们是不是互相平行的？

[redacted]

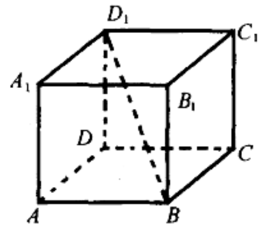
5. 两条相交直线的交点不在两条异面直线上时，它们能不能与两条异面直线都相交？为什么？

6. 设图中的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3.

(1) 图中哪些棱所在的直线与直线 BD_1 成异面直线？

(2) 求棱 CC_1 和 A_1D_1 所在直线所成角的大小；

(3) 求异面直线 A_1B_1 和 CC_1 的距离.



(第 6 题)

9.3 直线与平面平行的判定和性质

【知识要点】

直线和平面的位置关系：

直线在平面内——直线和平面有无数个公共点. 直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$.

直线和平面相交——直线和平面有且只有一个公共点. 直线 a 与平面 α 相交于点 A，记作 $a\cap\alpha=A$.

直线和平面平行——直线和平面没有公共点. 直线 a 与平面 α 平行，记作 $a/\!/\alpha$.

我们把直线和平面相交或平行的情况统称直线在平面外. 直线 a 在平面 α 外，记作 $a\not\subset\alpha$.

直线和平面平行的判定和性质：

直线和平面平行的判定定理　如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

有了这个判定定理，我们便可以根据直线间平行推证直线与平面平行. 这是处理立体图形的一种常用方法，即将直线与平面间关系的问题转化为直线间关系的问题来解决.

直线和平面平行的性质定理　如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.

【基础题例】

例1　如图 9－7，已知空间四边形 $ABCD$，其中 E，F，G，H 分别是边 AB，BC，CD，AD 的中点，求证对角线 AC，BD 和由四条边中点所确定的平面 EG 平行.

分析：根据“如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行”，要证 AC，BD 和平面 EG 平行，就是要证 AC，BD 和平面 EG 内的一条直线平行；由图可知，也就是要证 $AC /\!/ HG$（或 $AC /\!/ EF$），$BD /\!/ EH$（或 $BD /\!/ FG$）.

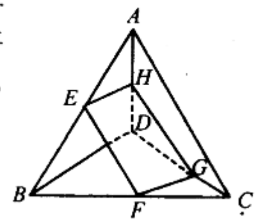


图 9－7

证明：∵　$HG \underline{/\!/} \frac{1}{2}AC$，$EF \underline{/\!/} \frac{1}{2}AC$，

∴　$HG \underline{/\!/} EF$.

∴　E，F，G，H 四点确定一个平面 EG.

∵　$AC \not\subset$ 平面 EG，$HG \subset$ 平面 EG，$AC /\!/ HG$，

∴　$AC /\!/$ 平面 EG.

同理　$BD /\!/$ 平面 EG.

评注：本例我们通过直线间平行推证直线与平面平行. 这是处理立体图形的一种常用方法，即将直线与平面间关系的问题转化为直线间关系的问题来解决.

例2　如图 9－8，已知直线 $a /\!/$ 直线 b，平面 M 和 N 分别过直线 a 和 b，M 和 N 相交于直线 c.

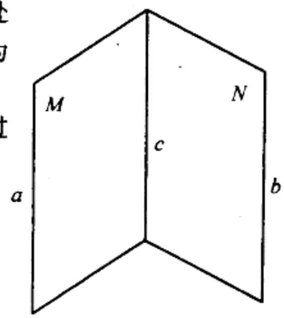


图 9－8

求证：$c /\!/ a$，$c /\!/ b$.

证明：∵　$a \not\subset$ 平面 N，$b \subset$ 平面 N，$a /\!/ b$，

∴　$a /\!/$ 平面 N.

又∵　$a \subset$ 平面 M，平面 $M \cap$ 平面 $N = c$，

∴　$c /\!/ a$.

同理　$c /\!/ b$.

练习 3

1. 判断题：

(1) 如果一条直线和一个平面有两个公共点，那么这条直线在这个平面内.　(　　)

(2) 一条直线和一个平面平行，它就和这个平面内的任何直线或者平行或者异面.　(　　)

2. 选择题：

(1) 如果两条直线同时平行于一个平面，那么这两条直线的位置关系是（　　）.

(A) 平行　　(B) 相交

(C) 异面　　(D) 以上三种情况都可能

(2) 下列说法正确的是（　　）.

(A) 两条平行直线中的任一条如果平行于一个平面，那么另一条直线也平行于这个平面

(B) 三条两两平行的直线或者共面，或者其中一条直线平行于另两条直线确定的平面

(C) 如果一条直线和一个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行

(D) 如果一条直线在一个平面外，那么这条直线一定和这个平面平行

[redacted]

3. **填空题：**

(1) 画直线 b 在平面 β 内时，应把直线 b 画在表示平面 β 的平行四边形______；画直线 b 和平面 β 平行时，应把直线 b 画在表示平面 β 的平行四边形______；画直线 b 和平面 β 相交时，应把直线 b 画______________________________.

(2) 直线 c 在平面 γ 外，是指______________________，记作________，也可以记作________.

4. 求证：如果平面外的两条平行线中有一条和平面内的某一条直线平行，那么另一条直线也和这个平面平行.

5. 过已知点 Q 求作一个平面，使它分别与不过这点的两条已知异面直线 a 和 b 平行（过 Q，a 的平面不平行于 b，过 Q，b 的平面不平行于 a）.

6. 已知：AB，BC，CD 是不在同一个平面内的三条线段. 求证：经过这三条线段的中点 E，F，G 的平面 α 和 AC 平行，也和 BD 平行.