沈云霞 主编

生活中的图论

上海科学普及出版社

生活中的图论

沈云霞 主编

上海科学普及出版社

责任编辑　倪汉虞

生活中的图论

沈云霞　主编

上海科学普及出版社出版

（上海曹杨路500号　邮政编码200063）

新华书店上海发行所发行　常熟文化印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 3[illegible]5　字数 82000

1991年2月第1版　1991年2月第1次印刷

印数　1—5000

ISBN 7-5427-0378-1/G·134　定价：1.50元

前　言

突飞猛进的科学技术，有力地推动了数学的发展，特别是电子计算机的逐步普及，使数学不论在内容上还是在研究方法上都有了变化，用途也日益广泛，几乎深入到人类所从事的每个领域。现代化的生产与生活，不仅需要掌握传统的数学基础知识，还需要掌握一些与现代化密切相关的数学知识，那种在学校中学得的数学知识可适用一辈子的观点已开始受到冲击，不断补充或更新数学知识已成为现代人生活与工作的需要，特别是数学教师的需要。教育要改革，数学教材必须面向现代化事业。

作者曾荣幸地参加1982年苏步青教授举办的第一期中学数学骨干教师讲习班，在苏教授用高等数学解决初等数学问题的启发下，萌发了写一本浅显的现代中小学数学书的想法。

数学问题往往都要用运算来找出解答，而运算的涵义是不断发展的，学习运算的目的不仅是为了解决一些实际问题，而且也是发展智力的需要。

本书名为《现代中小学数学运算趣谈》，它包含下面几个意思：

（一）把运算看作对应法则，可以对数作运算，也可以对非数的事物作运算，它是四则运算概念的推广与发展，有着丰富的内容，是现代化社会中经常要用到的一个重要概念。

（二）渗透或介绍一些现代数学的思想方法，虽然它们大多与高等数学有密切联系，思维方式又比较多样，但它们的一

些基本思想方法往往并不艰深，常常连小学生都能清楚理解。

（三）叙述中把发展思维能力，特别是把培养发现创造能力放在重要位置。

（四）尽量与中小学数学教材有机结合起来，使读者既能扩大知识视野，发展思维能力，又能加深对数学基础知识的理解。

（五）注意与计算机联系，介绍计算机中的一些思想方法，并且使计算机成为学习与研究数学的工具。

本书内容大部分是作者近十年来的教学体会与科研成果，一部分已发表在杂志上，有的是对小学、初中数学教师的讲座内容，由于内容有新意，又有趣味性，受到了师生们的欢迎。

本书叙述上力求通俗易懂，简明扼要，鼓励读者探索、发现与创造。大部分内容可作为小学、初中学生的练习、统测、竞赛或课外兴趣小组活动材料。本书还介绍了一些又快又好的编题方法，因此可以作为小学、初中数学教师职后培训的材料或教学参考书，也可以作为师范学校数学教法课的教材或补充教材。

全书共十二章，在编写中参考了近几年的英文、日文数学杂志及数学教材。各章内容基本上是独立的，但也有联系和互相渗透。教学或阅读时，次序可以改变，富有弹性。本书在上海师范专科学校、上海安亭师范学校作为小学数学教法课教材时，约用了34课时授完。使用中作了不少修改。定稿后蒙上海师范专科学校高级讲师孙平川、青浦县教育局胡志国、安亭师范附小许杰等同志仔细审阅，致以衷心感谢。由于水平有限，课题又是新的，缺点一定不少，希读者多提意见，以利改正。

作　者

1990年10月

内 容 提 要

本书叙述了现代中小学数学中的一些新运算，如逻辑运算、非十进制数运算、自定义运算等。它有机地与中小学数学教材相结合，曾作为上海市安亭师范、上海师范专科学校数学教法课教材。其中一部分是对小学、初中数学教师作讲座的内容，也是小学、初中学生统测、竞赛的资料。全书富有新意，通俗易懂，趣味性强，可作为小学、初中数学教师职后培训的材料或教学参考书，也可作为师范学校数学教法课教材或补充教材，还可作为中学生或具有中学水平的数学爱好者的课外读物。

目　录

第一章　违反常规的运算

一个人要有创造能力，不仅要有扎实的基础知识，而且还要有摆脱传统习惯束缚的思维能力，才可能有所创造，有所发明。比如牛顿看到苹果从树上掉下，一般人都认为是当然的事，但牛顿不受一般人传统观念的束缚，提出了为什么苹果不向天空飞上去的问题，可见地球对苹果有吸引力，从而逐渐发现了著名的万有引力定律。一般的发明创造，往往都是在摆脱传统习惯束缚后才出现的，数学上也往往如此。

但要摆脱传统习惯的束缚，并不是一件容易的事情，需要有意识地练习、思考，才能逐渐培养出这种能力，下面来作一些这方面的练习。

§1.1　不退位减法

减法中，遇到不够减时，就要用退一作十的方法来计算，但这种退位减法往往容易算错，并不一定方便，那么可不可以不用退位的方法来计算呢？可以的，而且方法还不止一种呢！

(一)拆数

因为 $100=99+1$，$500=499+1$，$719=699+1+19$，$324=299+1+24$ 等，所以 $526-287$ 可以写成 $499+27-287$，计算就很方便：

$$\begin{array}{r} 526 \\ -287 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 499+27 \\ -287 \\ \hline 212 \\ +\ \ 27 \\ \hline 239 \end{array}$$

又如：

$$\begin{array}{r} 621 \\ -267 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 599+22 \\ -267 \\ \hline 332 \\ +\ \ 22 \\ \hline 354 \end{array},$$

$$\begin{array}{r} 3124 \\ -3038 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3099+25 \\ -3038 \\ \hline 61 \\ +\ \ 25 \\ \hline 86 \end{array} \text{等。}$$

这样可保证够减，不需退位。

(二)凑十数

比如 3 的凑十数是 7，1 的凑十数是 9，5 的凑十数是 5 等，遇到不够减时，就立即改用加上减数的凑十数。比如 62－34，先要算 2－4，可以变成 2＋(10－4)，即 2＋6＝8，这时相邻的高位上就要减去 1。例如：

$$\begin{array}{cc} 6 & 2 \\ -3 & 4 \\ \hline 2 & 8 \\ \nearrow & \nearrow \\ 5-3 & 2+(10-4) \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} 8 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 6 & 3 \\ \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ 7-5 & 3+3 & 1+2 \end{array},$$

$$\begin{array}{cccc} 7 & 0 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 4 & 1 \\ \nearrow & \uparrow & \uparrow & \nwarrow \\ 6-3 & -1+6 & 0+4 & 8-7 \end{array} \quad \text{等。}$$

这样的方法有个缺点，有时相邻高位上减 1 容易忘掉，造成计算错误，因此产生下面的凑十数记数法。

(三)凑十数记数法

在减法计算中，如果要加上减数的凑十数，就在相邻高位上方记个 1，否则记 0，例如：

$$
\begin{array}{r}
1\\
804\\
-267\\
\hline
7\\
\downarrow\\
4+3
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r}
11\\
804\\
-267\\
\hline
47\\
\downarrow\\
0+4
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r}
110\\
804\\
-267\\
\hline
647\\
\downarrow\\
8-2
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{r}
110\\
804\\
-267\\
\hline
647\\
-110\\
\hline
537
\end{array}
\text{。}
$$

熟练后可以写得简单些，例如：

$$
\begin{array}{r}
110\\
6582\\
-3297\\
\hline
3395\\
-\ 110\\
\hline
3285
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
101 & 1 & 0\\
659 & 2 & 3\\
-398 & 2 & 7\\
\hline
361 & (10) & 6\\
-101 & 1 & 0\\
\hline
260 & 9 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
11 & 1 & 1 & 0\\
70 & 0 & 0 & 3\\
-43 & 0 & 0 & 7\\
\hline
37 & (10) & (10) & 6\\
-11 & 1 & 1 & 0\\
\hline
26 & 9 & 9 & 6
\end{array}
\text{。}
$$

请注意，其中遇到同数相减时，差不要写 0，应写 10。这种方法熟练后也很方便。

§1.2 高位算起

笔算加法、减法、乘法都是从低位算起，这当然是对的，但能不能从高位算起呢？

我国青年速算专家史丰收，从小不仅知识学得扎实，而且肯动脑筋，不受传统习惯的束缚，他在小学读书时就想，读数、写数、看数都是从高位开始的，只有笔算是从低位开始算起的，如果笔算也从高位开始，那读、写、看、算就都一致了，很可能会明显提高计算速度。后来经过他多年艰苦努力，终于创造出一套从高位算起的快速计算法，有些复杂的计算，连计算器都不如他算得快呢！

下面介绍他创造的乘法从高位算起的一个例子：乘数是2，只要记住口诀"满五进一"，就能方便地从高位算起。比如计算 8513×2：

先在最高位左边添个0，即 08513×2，然后从高位到低位逐个乘以2，每乘一位要看右面相邻一个数是否满5，如果满5就加1，反之就不加，计算过程如下：

0乘以2得0，因右面相邻数是8，满5要进1，所以得 $0+1=1$；8乘以2得6(10已进，不算)，右面相邻数是5，满5进1，所以 $6+1=7$；5乘以2得0，右面相邻数是1，不满5不进1，所以得0；1乘以2得2，右面相邻数是3，不满5不进1，所以得2；3乘以2得6，右面没有相邻数，当然不进1，所以得6，因此 $8513\times 2=17026$。

$$\begin{array}{r} 08513 \\ \times \quad 2 \\ \hline 17026 \end{array}$$

$$0+1 \qquad 6+0$$

至于乘数是3，4，5… 等其他数的方法，可参看史丰收写的«快速计算法»一书。

上面这个例子告诉我们，有时从相反角度来考虑问题，往往能有所创造。

§1.3 分母乘分子减

异分母减法，通常先通分，化成同分母减法来计算。如果不是这样计算，往往就会有错误。但有时在一定条件下违反这个常规，将分母相乘，分子相减，也可以得到正确的结果。比如 $\frac{5}{6}-\frac{4}{5}$，可以直接将分母6与5的积当分母，把分子5与

4的差作分子，即

$$\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{5-4}{6\times5}=\frac{1}{30},$$

而 $$\frac{5}{6}-\frac{4}{5}=\frac{5\times5}{6\times5}-\frac{4\times6}{5\times6}=\frac{25-24}{30}=\frac{1}{30}。$$

用两种方法计算得出相同的结果，说明计算都是正确的。还有类似的例子：

$$\frac{6}{7}-\frac{5}{6}=\frac{6-5}{7\times6}=\frac{1}{42},$$

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{3\times2}=\frac{1}{6},$$

$$\frac{8}{9}-\frac{2}{3}=\frac{8-2}{9\times3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9},$$

$$\frac{10}{11}-\frac{4}{5}=\frac{10-4}{11\times5}=\frac{6}{55},$$

$$\frac{16}{17}-\frac{6}{7}=\frac{16-6}{17\times7}=\frac{10}{119},$$

$$\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{11-1}{12\times2}=\frac{5}{12}。$$

不难知道，计算都是正确的，那么为什么这样计算也是可以的呢？注意上面的分数是有规律的：

一般说来，设正整数 x, y, 则

$$\frac{x}{x+1}-\frac{y-1}{y}=\frac{xy-(x+1)(y-1)}{(x+1)y}$$
$$=\frac{xy-xy+x-y+1}{(x+1)y}=\frac{x-(y-1)}{(x+1)y}。$$

这就是说，如果两个分数的分母分别比它们的分子多1，那么这两个分数相减，可以用“分母乘，分子减”的方法来计算。

§1.4 分数乘法的启示

分数乘法很简单，分子乘分子，分母乘分母，那么加法、减法、除法能不能也用类似的方法呢？

(一)异分母加法 一般先通分，再按同分母加法的计算法则计算，那么有没有可按分子加分子，分母加分母来计算的情况呢？就是说有没有满足 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b+d}{a+c}$ 的正整数 a、b、c、d 呢？

如果 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b+d}{a+c}$，即

$$abc+a^2d+bc^2+acd=abc+acd,$$

可得 $a^2d+bc^2=0$，而 a、b、c、d 为正整数，所以满足这个式子的 a、b、c、d 是不存在的，就是说两个分数相加，“按分子加分子，分母加分母”的方法必定是错误的。

(二)异分母减法 有没有按“分子减分子，分母减分母”来计算的情况呢？

有的，而且还有不少解答呢！

因为如果 $\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{b-d}{a-c}$，即 $\frac{bc-ad}{ac}=\frac{b-d}{a-c}$，变形得 $abc-acd=abc-a^2d-bc^2+acd$，即 $ad(a-2c)+bc^2=0$，而 a、b、c、d 为自然数，所以必有 $a-2c<0$，$a<2c$。

求出满足上述式子要求的 a、b、c、d 是比较困难的，现可以用计算机帮助寻找解答。为了计算方便，先取 b、c、d 为 1 到 10 的数，由于 $a<2c$，取 a 为 1 到 $2c-1$ 的数，逐个代入试验，看看有没有满足要求的解答。

```
5    PRINT "有这样的分数减法吗？"
```

```
10 FOR C=1 TO 10
20 FOR A=1 TO 2*C-1
30 FOR B=1 TO 10
40 FOR D=1 TO 10
45 IF A-C=0 THEN 60
50 IF B/A-D/C< >(B-D)/(A-C)THEN 60
55 PRINT B;"/";A;"-";D;"/";C;"=";"(";B;
"-";D;")";"/";"(";A;"-";C;")"
60 NEXT D
70 NEXT B
80 NEXT A
90 NEXT C
100 END
]RUN
```

有这样的分数减法吗?

3/1-4/2=(3-4)/(1-2)

6/1-8/2=(6-8)/(1-2)

3/3-4/2=(3-4)/(3-2)

6/3-8/2=(6-8)/(3-2)

5/1-9/3=(5-9)/(1-3)

8/2-9/3=(8-9)/(2-3)

8/4-9/3=(8-9)/(4-3)

5/5-9/3=(5-9)/(5-3)

3/2-4/4=(3-4)/(2-4)

6/2-8/4=(6-8)/(2-4)

如果取 a、b、c、d 为 1 至 100，或 1 至 1000，或 1 至更大的数，逐个代入试验，显然计算机会打印出更多的解答。实

际上确有无限多的解答。

当然在一般情况下，两个分数相减，是不可以用"分子减分子，分母减分母"的方法来计算的，但在满足 $ad(a-2c)+bc^2=0$ 的条件下，就可以用"分子减分子，分母减分母"的方法来计算。

(三)分数除法能否按"分子除以分子，分母除以分母"的方法计算呢？先看几个例子：

$$\frac{8}{9}\div\frac{2}{3}=\frac{8\div2}{9\div3}=\frac{4}{3},\quad 而\quad \frac{8}{9}\div\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{4}{3}。$$

$$\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{6\times2}\div\frac{2}{3}=\frac{10\div2}{12\div3}=\frac{5}{4},$$

而
$$\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{5}{4}。$$

$$\frac{7}{8}\div\frac{5}{9}=\frac{7\times5\times9}{8\times5\times9}\div\frac{5}{9}=\frac{(7\times5\times9)\div5}{(8\times5\times9)\div9}=\frac{63}{40},$$

而
$$\frac{7}{8}\div\frac{5}{9}=\frac{7}{8}\times\frac{9}{5}=\frac{63}{40}。$$

一般说来，教科书上的分数除法法则为：

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad},$$

而按"分子除以分子，分母除以分母"的法则计算：

$$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b\div d}{a\div c}=\frac{bc}{ad},$$

结果相同。

因此分数除法是可以按"分子除以分子，分母除以分母"的方法来计算的。如果 $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}$ 中，b 不能被 d 整除，则可在 $\frac{b}{a}$ 的分子、分母上都乘以 d；如果 a 不能被 c 整除，则可在 $\frac{b}{a}$ 的分子、分母上都乘以 c，然后再按"分子除以分子，分母除以分