连续介质力学基础

FOUNDATION OF CONTINUUM MECHANICS

熊祝华 傅衣铭 熊慧而 编著

湖南大学出版社

内容提要

本书以笛卡尔张量为主要数学工具，比较系统地介绍了连续介质力学的基本概念，基本理论和基本方法，特别着重于基本概念的阐述。本书共分 10 章，内容包括笛卡尔张量，变形和运动分析，守恒定律，热－力学（或连续介质热力学），本构方程（概念和原理），弹性物质、粘性物质和塑性物质的本构关系，以及普遍张量。书后附有一定数量的习题。

本书可作为力学专业硕士研究生的教材，也可作为力学专业本科生、其它有关专业研究生及工程技术人员的参考书。

连续介质力学基础

Lianxu Jiezhi Lixue Jichu

熊祝华　傅衣铭　熊慧而　编著

□责任编辑　刘其城

□出版发行　湖南大学出版社

社址　长沙市岳麓山　邮码　410082

电话　0731－8821691　0731－8821315

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　长沙市芳鸿印刷厂

□开本　787×1092　16 开　□印张　15　□字数 347 千

□版次　1997 年 10 月第 1 版　□1997 年 10 月第 1 次印刷

□印数　1－500 册

□书号　ISBN 7－81053－102－6/O3·3

□定价　20.00 元

前　言

这是一本为进一步学习和研究连续介质力学的读者提供基础的书籍。连续介质力学的内容包括宏观连续体(固体和流体)的变形几何理论、运动和应力分析，有关力学过程的守恒定律，力学本构关系的理论和原理，以及固体和流体本构方程的一般形式。在连续介质力学中不涉及本构关系的具体表达式以及物质的特性常数，因此所得结果具有普遍适用性。鉴于力学过程和热学过程常常是不可分的，从本世纪50年代开始，建立和发展了一门新的学科——连续介质热力学，或称为热-力学；这是连续介质力学与经典热力学的交叉或结合。连续介质热力学为连续介质力学提供了更为坚实的理论基础，并日益为力学研究工作者所重视。为此，本书专门设置一章介绍这门学科的基本理论和方法。

为了便于读者学习和掌握连续介质力学的理论和方法，本书遵循一般相关书籍的惯常做法，基本上在笛卡尔坐标系内讨论问题，建立有关的原理、方法、方程和公式。本书的最后一章介绍普遍张量；于是只要将在笛卡尔坐标系内所得到的结果写成直接表述式，就可用普遍张量的运算方法和公式获得一般坐标系内的相应结果。对于在实际中广泛应用的正交曲线坐标系，由于它们的局部基是正交基，计算公式将得到简化；为了便于应用，本书最后一章导出了在圆柱坐标系和球坐标系中的有关公式。顺便指出，对于正交曲线坐标系中的张量运算，可以直接建立专门的方法，获得常用的方程和公式，而可避开普遍张量。有兴趣的读者可参阅文献[1]。

为了便于读者学习和理解，本书在内容编排和叙述方面力求循序渐进，由浅入深，简明易懂，推理严谨，特别着重于讲清概念、原理和理论，以便为读者进一步学习连续介质力学及有关力学分支、从事这方面的教学和研究提供比较坚实的理论基础。

本书共分十章，前两章介绍张量的基本概念和基本运算法则，为没有学过张量和张量分析的读者学习本书内容提供有效的数学工具。第三章是关于连续介质变形和运动的分析，第四章介绍守恒定律和应力分析，第五章介绍连续介质热力学的基本定律、理论和方法，第六章介绍本构关系的概念和一般理论，第七、八、九章分别介绍有关弹性、粘性和塑性本构方程的一般形式，最后一章介绍普遍张量。熊慧而编写其中的第一、第二、第三、第四、第八、第九章，傅衣铭编写其余四章，熊祝华修改、审定全部书稿。

本书可作为工程力学专业和相关专业本科生、研究生的教学和参考用书，也可作为有关教师和科技工作者的参考用书。

编　者

1997年8月

目　　次

6 本构方程 概念和原理

7 弹性物质

8 粘性物质

1 欧氏矢量空间　正交变换　张量

本章及下一章都是本书基本内容的准备知识。本章着重介绍笛卡尔坐标系的基及笛卡尔张量的概念；首先介绍字母指标法、求和约定，以及 Kronecker δ 与置换符号及它们的某些应用。

1-1 欧氏矢量空间　基和基矢

1-1-1 欧氏矢量空间

满足下列条件的矢量集合称为实的矢量空间，记作 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{R}$ 中的每一个矢量，例如 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 称为 $\boldsymbol{R}$ 的一个元素：

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 亦为 $\boldsymbol{R}$ 的一个元素；

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$$

(2) $\boldsymbol{R}$ 中包含零矢量 $\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$。对于 $\boldsymbol{R}$ 中的任何元素 $\boldsymbol{u}$，存在一个反元素 $(-\boldsymbol{u})$，使得

$$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$$

(3) 对于任何实数 α，β，有

$$\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$$
$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$$
$$\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$$
$$1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u},\qquad 1\text{ 为单位值}$$

欧氏矢量空间(Euclidean vector space)E 是这样的实矢量空间：

(1) 对于 E 中的任何一对元素 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，可定义一个 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 表示的标量，它具有下列性质：

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}\tag{1-1-1}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0\tag{1-1-2}$$

等号只对 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 成立。

(2) 对于任何实数 α，β，及 E 中的元素 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 等有：

$$(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\beta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\tag{1-1-3}$$

(3) $\boldsymbol{u}$ 的大小(或模)记为 $|\boldsymbol{u}|$，并定义为

$$|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\tag{1-1-4}$$

的正的方根。如果 $|\boldsymbol{u}|=1$，则称 $\boldsymbol{u}$ 为单位矢

如果 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，且 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$，称 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 正交。

1-1-2 基　正交基

若 $\boldsymbol{u}_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 E 中 m 个元素，若能选取 m 个不全为零的标量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,$

m)，使得

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0} \tag{1-1-5}$$

则称这 m 个矢量线性相关。如不能选取 m 个不全为零的标量 α_i 使上式成立，则称为 m 个矢量线性无关或线性独立。

空间 E 内线性无关矢量的最大个数 n 称为空间 E 的维数；n 维空间 E 记作 E_n。由于连续体占有三维物理空间，所以本书一般限于以三维欧氏空间为基础进行讨论。显然，在 E_3 内至多只有三个矢量是线性无关的。

在三维空间 E_3 内，我们定义

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta \tag{1-1-6}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta \boldsymbol{k} \tag{1-1-7}$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的夹角($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$)，$\boldsymbol{k}$ 为单位矢量，它表示 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ 的方向，通常采用右手螺旋法则确定 $\boldsymbol{k}$，即按顺序 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}$ 符合右手法则。称 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的叉积。由以上两式可得

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{1-1-8}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} \tag{1-1-9}$$

及

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \tag{1-1-10}$$

特别地，当三个相互正交的单位矢 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 形成右手三元系时，即按顺序 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 其方向符合右手法则时，则有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \qquad & \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad & \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \qquad & \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}\right\} \tag{1-1-11}$$

其中左侧三式的指标按顺序 1,2,3 排列为顺循环；右侧三式的指标则为逆 1,2,3 顺序排列，称为逆循环。

在 E_3 内三个线性独立的矢量系称为 E_3 的基，其中每个矢量称为基矢。矢量空间的基有无限多，但只有一个基是独立的。例如，设 E_3 中($\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$)和($\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_2', \boldsymbol{u}_3'$)是两个基，显然其中任一个基矢 $\boldsymbol{u}_i$(例如 $\boldsymbol{u}_1$)可用($\boldsymbol{u}_i'$)的线性组合表示，否则，空间就不是三维的；即恒可找到 $\alpha_0 \neq 0$ 及三个不全等于零的标量 α_i($i=1,2,3$)使得

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 \boldsymbol{u}_1 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{u}_i' = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_1 = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \boldsymbol{u}_i', \quad \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0} \end{aligned}\right\} \tag{1-1-12}$$

其中 β_i 不全于零，且为有限值(因 $\alpha_0 \neq 0$)。可称 β_i 为 $\boldsymbol{u}_1$ 在基($\boldsymbol{u}_i'$)上的分量。以上结论可推广为：E_3 中的任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 均可表示为 E_3 一个基的基矢的线性组合，即

$$\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \boldsymbol{u}_i \tag{1-1-13}$$

($\boldsymbol{u}_i$)为选定的一个基，β_i 为 $\boldsymbol{r}$ 相对于基($\boldsymbol{u}_i$)的分量。可以证明，同一个矢量在同一个基上的分解是唯一的，即式(1-1-12)和(1-1-13)中的 β_i 是唯一确定的；从而可知 E_3 中各个基

之间存在唯一确定的变换关系。另方面，同一矢量在两个基上的分量不同，但它们之间有一定的变换关系。

在应用中，选用的基总是同一定的坐标系相关连的。不同的坐标系有不同的基。在 E_3 中最简单的基是由三个相互正交的单位矢所构成的基，称为标准正交基，而且这个基是固定不变的，今后我们用 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 表示它的基矢，缩记为 $(\boldsymbol{e}_i)$；这个基是与笛卡尔坐标系相关连的。在本书中，我们基本上是采用基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 来讨论问题，即基本上在笛卡尔坐标系内建立连续介质力学的基本理论和基本方程。

1-2 字母指标法

1-2-1 字母指标

在实际中，有不少物理量（或几何量）不能用一个标量加以定量描述，而要用一组标量才能描述，这组标量中的每一个称为该物理量的分量。这些分量都与空间的基密切相关，或者，具体地说，与所选用的坐标系密切相关。例如，空间中（此处及下面均指 E_3 空间）的点的位置要用三个坐标 x,y,z（在笛卡尔坐标系内，下同）表示，点的位移和速度分别要用其在三个坐标轴方向的分量 u,v,w 和 v_x,v_y,v_z 表示等等。以上这类量统称为矢量。另外，还有一类量，它们同时与两个方向有关，例如，变形体内任一点处的应力矢（总应力），不仅它自身具有方向，而且还与截面的方向有关；这类量要用九个标量才能定量描述，即一点处的应力状态，或者说一点处各个截面方向上应力矢的集合要用九个应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yx},\tau_{yz},\tau_{zy},\tau_{zx},\tau_{xz}$ 来描述；变形体内一点处的应变状态也有类似情况。为了书写简洁，便于采用求和约定（见下面），在张量记法中，都采用字母指标（或标号）记法，即将某一物理量的所有分量用同一个字母表示，并用指标（标号）区分各个分量。例如将点的位置坐标 x,y,z 写作 x_1,x_2,x_3，并用 $x_i(i=1,2,3)$ 表示；将笛卡尔坐标轴正向的单位矢 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 写作 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$，并用 $\boldsymbol{e}_i$ 表示（$\boldsymbol{e}_i$ 即笛卡称坐标系的基）；类似地，点的位移和速度的分量分别用 u_i 和 v_i 表示；应力分量共有九个，要采用两个指标，记作 $\sigma_{ij}(i,j=1,2,3)$ 等。在微分运算中，可将函数 $\varphi(x,y,z)$ 的偏导数 $\partial\varphi/\partial x,\partial\varphi/\partial y,\partial\varphi/\partial z$ 分别写成 $\varphi_{,1},\varphi_{,2},\varphi_{,3}$，并缩写成 $\varphi_{,i}$。由于连续介质力学的研究对象是占有三维物理空间的连续体，所以字母指标 i,j,k 等的约定域均取为 1,2,3。

1-2-2 求和指标 求和约定

在同一项中重复出现两次的字母指标称为求和指标，它表示将该指标依次取 1,2,3 时所得各项之和，这就是求和约定。例如

$$\left.\begin{aligned} a_ib_i &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_{ij}b_j &= a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 \\ a_{ii} &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{aligned}\right\} \tag{1-2-1}$$

在上列各式中，根据求和约定，都省略了求和记号 $\sum\limits_{i=1}^{3}$ 或 $\sum\limits_{j=1}^{3}$。求和指标通常称为“哑标”或“伪标”。

求和指标已经不是用以区分该指标所表示的各个分量，而是一种约定的求和标记，因

此可以选用任何字母而不会改变其含义，亦即求和指标可以任意变换字母，例如：

$$\left.\begin{aligned} a_i b_i &= a_j b_j \\ a_{ij} b_j &= a_{ik} b_k \\ \varphi_{,i} dx_i &= \varphi_{,j} dx_j \end{aligned}\right\} \tag{1-2-2}$$

但是如果指标不是字母，而是数字，则不适用求和约定；例如 a_{11}, a_{22}, a_{33} 都分别表示一个分量。

在同一项中重复出现的字母指标不能超过二次。因此，乘积 $(a_{11}+a_{22}+a_{33})(b_{11}+b_{22}+b_{33})$ 不能缩写成 $a_{ii}b_{ii}$，而应写作 $a_{ii}b_{jj}$。

在有些情况下，同一项中虽然出现重复两次的指标，但并不按该指标求和，则应另加说明，或者另加特殊记号，否则，一律按求和约定运算。此外，有时也会在同一项中必须出现重复二次以上的指标，这时则可加上求和记号，例如

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 \tag{1-2-3}$$

这表明上式不采用求和约定，故字母指标重复出现的次数不受限制。或者，对一个指标加上特殊记号，如圆括号或加下横线（本书均加下横线），表示该指标不属求和指标，但随求和指标取值。于是式(1-2-3)可写成

$$\lambda_{\underline{i}} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 \tag{1-2-4}$$

1-2-3 自由指标

同项内不重复出现的指标称为自由指标。自由指标表示一般的项，该指标可取 1，2，3 中任何一个数。例如，u_i 表示三个位移分量中的任何一个，σ_{ij} 表示九个应力分量中的任何一个。

在同一方程中，各项的自由指标必须相同，而且应理解（约定）为该方程对自由指标的约定域都成立。例如 $a_i = b_{ij}x_j$ 是下列三式的缩写：

$$\begin{aligned} a_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ a_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ a_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned}$$

在同一方程中，不能任意改变其中一项或部分项的自由指标；如有必要，必须各项的自由指标同时换为另一个字母。

1-3 Kronecher δ 置换符号

1-3-1 Kronecher δ

符号 δ_{ij} 表示九个量并规定

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases} \tag{1-3-1}$$

如上规定的 δ_{ij} 称为 Kronecher δ。根据式(1-3-1)的规定，δ_{ij} 同另一带字母指标的量（包括 δ_{ij} 自身）相乘，且有求和指标时，则将该量中的求和指标丢弃，而将 δ_{ij} 中的自由指标代换该量中的求和指标；据此有如下等式：

(1)

$$\left.\begin{aligned}\delta_{ij}\delta_{ij} &= \delta_{ii}(\text{或 } \delta_{jj}) = 3\\ \delta_{ij}\delta_{jk} &= \delta_{ik}\\ \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{km} &= \delta_{im}\end{aligned}\right\} \tag{1-3-2}$$

$$a_{ij}\delta_{ij} = a_{ii} \tag{1-3-3}$$

$$\left.\begin{aligned}a_{ij}\delta_{jk} &= a_{ik}\\ a_i\delta_{ij} &= a_j\end{aligned}\right\} \tag{1-3-4}$$

式(1-3-4)可用来改变指标的字母,例如

$$a_{ij}x_j - \lambda x_i = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j$$

(2) 因为 $a_{ii}=a_{jj}=a_{jk}\delta_{jk}$,所以

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}} = \delta_{jk} \tag{1-3-5}$$

或者

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial a_{jk}} = \delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk} \tag{1-3-6}$$

(3) 点的坐标 x_i 彼此独立,所以

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = x_{i,j} = \delta_{ij} \tag{1-3-7}$$

(4) 设 a_{ij}为九个彼此独立的量,则

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{kl}} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1-3-8}$$

当 $i=j$ 时,上式变为式(1-3-6)。

(5) 基($\boldsymbol{e}_i$)有如下的关系

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{1-3-9}$$

上式也可作为 δ_{ij}的定义。

1-3-2 置换符号 e_{ijk}

置换(或排列)符号用 e_{ijk}表示,它共有 27 个量,但规定

$$e_{ijk} = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{当 } i,j,k \text{ 按 } 1,2,3 \text{ 顺序时(顺循环)}\\ -1, & \text{当 } i,j,k \text{ 逆 } 1,2,3 \text{ 顺序时(逆循环)}\\ 0, & \text{当 } i,j,k \text{ 中有重复指标时(非循环)}\end{array}\right\} \tag{1-3-10}$$

虽然,置换符号共有 27 个量,但只有六个不为零,在 e_{ijk}的指标中,每相邻两个互换一次位置,e_{ijk}将改变一次正负号。由于相邻指标位置互换偶数次,不改变指标的循环性质,所以不改变 e_{ijk}的正负号;反之,相邻指标位置互换奇数次,e_{ijk}将改变正负号。例如

$$e_{ijk} = -e_{jik} = -(-e_{jki}) = e_{jki} = -e_{kji} \tag{1-3-11}$$

设($\boldsymbol{e}_i$)是右手笛卡尔坐标系的基,则按式(1-1-11)并结合式(1-1-9)和(1-3-10),可将 $\boldsymbol{e}_i$ 的叉积写成

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1-3-12}$$

上式是式(1-1-11)的缩写式,而式(1-1-11)则是上式的展开式。

根据式(1-1-13),任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 在基($\boldsymbol{e}_i$)上的分量设为 a_i,则矢量 $\boldsymbol{a}$ 可写成

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i$$

于是两矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积为(参阅式(1-3-12))

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \times b_j \boldsymbol{e}_j = e_{ijk} a_i b_j \boldsymbol{e}_k \tag{1-3-13}$$

请读者写出上式的展开式。因为 $e_{ijk} = -e_{jik}$,所以有

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

由式(1-3-12)及(1-3-13),可得

$$\boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = e_{ijk} \tag{1-3-14}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = e_{ijk} a_i b_j c_k \tag{1-3-15}$$

式中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量。式(1-3-13)的展开式可表示成行列式的形式

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1-3-16}$$

及

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} a_i b_j c_k \tag{1-3-17}$$

由上式显然可见

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{13-18}$$

现取

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i = A_{1i} \boldsymbol{e}_i, \quad a_i = A_{1i}$$

$$\boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}_j = A_{2j} \boldsymbol{e}_j, \quad b_j = A_{2j}$$

$$\boldsymbol{c} = c_k \boldsymbol{e}_k = A_{3k} \boldsymbol{e}_k, \quad c_k = A_{3k}$$

将上式中的值代入式(1-3-17),得

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = |A_{ij}| = e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \tag{1-3-19}$$

上式为以 A_{ij} 为元素的行列式(或矩阵 $[A_{ij}]$ 的行列式)的缩写式。由于矩阵转置不改变其行列式的值,所以上式也可写成

$$|A_{ij}| = e_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{3k} \tag{1-3-20}$$

式(1-3-19)是按行展开,(1-3-20)是按列展开。

如果将式(1-3-19)和(1-3-20)中的相邻行(或列)任意调换位置,行列式可能改变正、负号,但不改变其绝对值:调换偶次,不改变正、负号;调换奇次,改变正、负号。这同置换符号改变指标的法则一致;因此,设行列式的行改变位置后的顺序为 p,q,r 则有

$$e_{ijk} A_{pi} A_{qj} A_{rk} = e_{pqr} |A_{ij}| \tag{1-3-21}$$

类似地,列改变后的顺序为 p,q,r 时,

$$e_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr} = e_{pqr} |A_{ij}| \tag{1-3-22}$$

1-3-3 δ_{ij} 与 e_{ijk} 的关系

以 δ_{ij} 为元素的行列式为

$$|\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{1-3-23}$$

现将$|\delta_{ij}|$的行任意调换位置，由式(1-3-21)得到

$$|\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = e_{ijk}|\delta_{ij}| = e_{ijk} \tag{a}$$

再将$|\delta_{ij}|$的列任意调换位置，则由式(1-3-22)可得到

$$|\delta_{ij}{}^*| = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} = e_{pqr}|\delta_{ij}| = e_{ijk}e_{pqr} \tag{1-3-24}$$

展开上式，并令 $i=p$，得到

$$e_{ijk}e_{iqr} = (\delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}) \tag{1-3-25}$$

在上式中，令 $j=q$，得到

$$e_{ijk}e_{ijr} = 2\delta_{kr} \tag{1-3-26}$$

再令 $k=r$，得到

$$e_{ijk}e_{ijk} = 6 \tag{1-3-27}$$

由上式及式(1-3-21)或(1-3-22)，可得

$$e_{ijk}e_{pqr}A_{ip}A_{jq}A_{kr} = 6|A_j| \tag{1-3-28}$$

1-4 余弦变换矩阵

现设(e_i)和(e_i')为 E_3 内两个笛卡尔坐标系的基(相当于笛卡尔坐标系转动)，它们之间有一定的变换关系(参阅 1-1-2)，现在令

$$e_i' = l_{i'j}e_j \tag{1-4-1}$$

$l_{i'j}$是基矢 e_i'在基(e_i)上的分量。将上式两侧点乘 e_k，得到

$$e_i'e_k = l_{i'k} \tag{1-4-2}$$

这表明 $l_{i'j}=e_i' \cdot e_j$ 是 e_i'和 e_j 夹角的余弦，且显然有

$$l_{i'j} = l_{ji'} \tag{1-4-3}$$

式(1-4-1)可写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{Bmatrix} = [l_{i'j}]\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} \tag{1-4-4}$$

记$[L]=[l_{i'j}]$，称为余弦变换矩阵：

$$L_{ij} = l_{i'j} = e_i'e_j \tag{1-4-5}$$

则式(1-4-4)可缩写成为

$$\{e_i'\} = [L]\{e_i\} \tag{1-4-6}$$

e_i 也可在基(e_i')上分解，即

$$\left.\begin{aligned} e_i &= l_{ij'}e_j' \\ l_{ij'} &= e_i \cdot e_j' = l_{j'i} \end{aligned}\right\} \tag{1-4-7}$$

类似地可写出

$$\left.\begin{aligned} \{e_i\} &= [L]'\{e_i'\} \\ L_{ij}' &= l_{ij'} \end{aligned}\right\} \tag{1-4-8}$$

注意到

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{1'1} & l_{1'2} & l_{1'3} \\ l_{2'1} & l_{2'2} & l_{2'3} \\ l_{3'1} & l_{3'2} & l_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11'} & l_{21'} & l_{31'} \\ l_{12'} & l_{22'} & l_{32'} \\ l_{13'} & l_{23'} & l_{33'} \end{bmatrix}$$

$$[L]' = \begin{bmatrix} l_{11'} & l_{12'} & l_{13'} \\ l_{21'} & l_{22'} & l_{23'} \\ l_{31'} & l_{32'} & l_{33'} \end{bmatrix}$$

从以上两式可见

$$[L]' = [L]^T$$

于是式(1-4-8)可写成

$$\{e_i\} = [L]^T\{e_i'\} \tag{1-4-9}$$

可以证明$[L]$为非奇异矩阵，它可以求逆$[L]^{-1}$，于是由于(1-4-6)，可解出

$$\{e_i\} = [L]^{-1}\{e_i'\}$$

比较上式与式(1-4-9)，可得

$$[L]^T = [L]^{-1}$$

上式表明，$[L]$是正交矩阵，所以这种余弦变换又称为正交变换。

因为$[L][L]^T=[I]$， $[I]$为单位矩阵，于是

$\det([L][L]^T)=(\det[L])^2=1$

或者

$$\det[L] = \pm 1 \tag{1-4-11}$$

当 $\det[L]=1$ 时，称为正常（或正向）正交变换矩阵，它对应于基(e_i)和(e_i')同为右手（或左手）三元系；当 $\det[L]=-1$ 时，称为非正常（或反向）正交变换矩阵，它对应于(e_i)和(e_i')分别是右(左)和左(右)手三元系。

易证

$$\left.\begin{aligned} l_{i'j}l_{k'j} &= \delta_{i'k'} = e_i' \cdot e_k' \\ l_{j'i}l_{j'k} &= \delta_{ik} = e_i \cdot e_k \end{aligned}\right\} \tag{1-4-12}$$

1-5 张量及其坐标变换

1-5-1 矢量的分量表示及其坐标变换

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在基(e_i)上的分量表示式为

$$\boldsymbol{a} = a_j e_j$$

于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=a_j\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i=a_i \tag{1-5-1}$$

上式可记为

$$a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i) \tag{1-5-2}$$

即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 上的分量为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}_i)$

现在设有两个基$(\boldsymbol{e}_i)$和$(\boldsymbol{e}_i{}')$，则有

$$\boldsymbol{a}=a_j\boldsymbol{e}_j=a_i{}'\boldsymbol{e}_i{}' \tag{1-5-3}$$

上式表明 $\boldsymbol{a}$ 在基$(\boldsymbol{e}_i)$和$(\boldsymbol{e}_i{}')$上的分量虽不相同，但它们与基矢的线性组合是相等的，这说明矢量是坐标系不变性的。

用 $\boldsymbol{e}_i{}'$ 点乘式(1-5-3)的前两项，并参照式(1-5-2)，可得

$$a_i{}'=a_jl_{ji'}=l_{i'j}a_j \tag{1-5-4}$$

或者写成矩阵形式

$$\{a_i{}'\}=[L]\{a_i\} \tag{1-5-5}$$

由式(1-5-3)或(1-5-5)，易得

$$\left.\begin{aligned}a_i&=l_{ij'}a_j{}'\\ \{a_i\}&=[L]^T\{a_i{}'\}\end{aligned}\right\} \tag{1-5-6}$$

式(1-5-4)～(1-5-6)是矢量的坐标变换式。再次指出，在本书中，基本上限于在笛卡尔坐标系内讨论问题。

1-5-2　二阶基矢　二阶张量

在上面我们看到，矢量的分量表示是与基矢 $\boldsymbol{e}_i$(或 $\boldsymbol{e}_i{}'$)相关连的。可以称 $\boldsymbol{e}_i$ 为一阶基矢，它的线性组合为矢量。现在可定义 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ 为二阶基矢；$\otimes$为外乘或并乘符号；九个二阶基矢 $\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j(i,j=1,2,3)$组成二阶基$(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$，可称二阶基是 J_2 空间(九维空间)的基。如果二阶基矢的线性组合 $T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$ 是坐标不变性的，则称 T_{ij}为二阶张量(记为 $\boldsymbol{T}$)在基$(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$上的分量，即

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{1-5-7}$$

据此可称矢量为一阶张量(与一阶基矢相关连)，标量为零阶张量(不与基矢相关连)。由式(1-5-7)易得

$$T_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{1-5-8}$$

或记作

$$T_{ij}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j) \tag{1-5-9}$$

进一步定义

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=T_{ij}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{b})=T_{ij}a_ib_j \tag{1-5-10}$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_j$ 时 $a_i=1,b_j=1$，上式就变为式(1-5-9)。

现在设有两个二阶基$(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)$和$(\boldsymbol{e}_i{}'\otimes\boldsymbol{e}_j{}')$，根据二阶张量的坐标系不变性，有

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=T_{ij}{}'\boldsymbol{e}_i{}'\otimes\boldsymbol{e}_j{}'$$

将基矢的坐标变换式(1-4-1)和(1-4-7)分别代入上式，可分别得到

$$T_{ij}{}'=l_{i'k}l_{j'l}T_{kl}=l_{i'k}T_{kl}l_{lj'} \tag{1-5-11}$$

$$T_{ij}=l_{ik'}l_{jl'}T_{kl}=l_{ik'}T_{kl}l_{l'j} \tag{1-5-12}$$

以上两式可分别写成矩阵形式如下