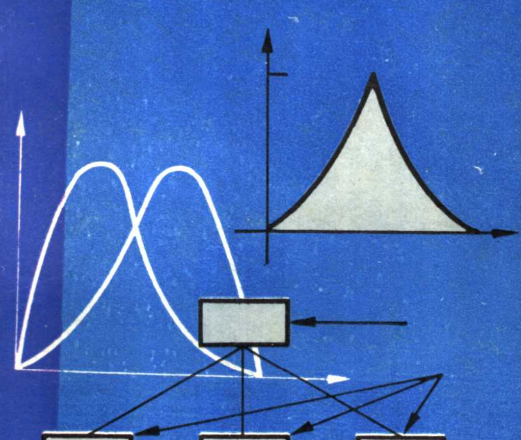
中学生文库

模糊数学



上海教育出版社

中学生文库

ZHONGXUESHENG WENKU

模糊数学

刘应明 任 平 编著

上海教育出版社

责任编辑　冯　贤
封面设计　范一辛

中学生文库　　　　模糊数学
刘应明　任　平　编著

上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷
开本787×1092 1/32　印张3　插页2　字数51,000
1988年4月第1版　1988年4月第1次印刷
印数1—11,800本

ISBN 7-5320-0428-7/G·374　　定价：0.60元

前 言

有一个古老的希腊悖论，是这样说的：

“一粒种子肯定不叫一堆，两粒也不是，三粒也不是……另一方面，所有的人都同意，一亿粒种子肯定叫一堆．那么，适当的界限在哪里？我们能不能说，325647 粒种子不叫一堆而 325648 粒就构成一堆？”

确实，“一粒”和“一堆”是有区别的两个概念．但是，它们的区别是逐渐的，而不是突变的，两者之间并不存在明确的界限．换句话说，“一堆”这个概念带有某种程度的模糊性．类似的概念，如年老、高个子、很大、很小、聪明、价廉物美等等，不胜枚举．

在人们的实际生活和工作中，能不能完全避免模糊性？为了回答这个问题，你只要找上几位好朋友聚在一起，那么，除非见面后就埋头演算数学习题，否则，用不上说几句话，保证得用上上述那类模糊概念．

精确和模糊，是一对矛盾．根据不同情况有时要求精确，有时要求模糊．比如打仗，指挥员下达命令：“拂晓发起

总攻.”这就乱套了.这时,一定要求精确:“×月×日清晨六时正发起总攻.”各个阵地的指挥员还要对对表,生怕出个半分十秒的误差.但是,物极必反.如果事事要求精确,人们就简直没有办法顺利地交流思想——两人见面,问:“你好吗?”可是,什么叫“好”,又有谁能给个精确的定义?

有些现象本质上就是模糊的,如果硬要使之精确,自然难以符合实际.例如,考核学生成绩,规定满60分为合格.但是,59分和60分之间究竟有多大差异,以致一分之差要区别为及格和不及格?根据是很不充分的.

另一方面,有些现象是精确的,但是,适当地模糊化可能使问题得到简化,灵活性大为提高.例如,在地里摘玉米,若要找一个最大的,那很麻烦,而且近乎迂腐.我们必须把玉米地里所有的玉米都测量一下,再加以比较才能确定.它的工作量和玉米地面积成正比.土地面积越大,工作越困难.然而,只要稍为改变一下问题的提法:不要求找最大的玉米,而是找比较大的,即按通常的说法,到地里摘个大玉米.这时,问题从精确变成了模糊,但同时也从不必要的复杂变成意外的简单,挑不多的几个就可以满足要求.工作量甚至和土地面积无关.因此,过分的精确实际成了迂腐,适当的模糊反而灵活.

很奇怪的是,直到本世纪中期,人们还一直把模糊看成贬义词.认识到模糊性的重要和积极意义,是科学史上的一件大事.这个功绩属于美国著名科学家查德(L.A.Zadeh)教授.查德在五十年代从事工程控制论的研究,六

十年代初期转而研究多目标决策问题．长期以来，围绕决策、控制及其有关的一系列重要问题的研究，应用传统数学方法和现代电子计算机解决这类问题的成败得失，使查德逐步意识到传统数学方法的局限性．他指出："在人类知识领域里，非模糊概念起主要作用的唯一部门只是古典数学"，"如果深入研究人类的认识过程，我们将发现人类能运用模糊概念是一个巨大的财富而不是包袱．这一点，是理解人类智能和机器智能之间深奥区别的关键．"精确的概念可以用通常的集合来描述．模糊概念应该用相应的模糊集合来描述．查德抓住这一点，首先在模糊集的定量描述上取得突破．可以把查德的工作和他的前辈的工作做一些联想：

十七世纪，牛顿和莱布尼兹发明微积分，应用这一新方法成功地解决了一系列重要问题．上至天文地理，下至日常生活，数学的影子无处不在，使人们不禁惊叹：大自然是用数学说话．有神论者说造物主是数学家．

然而，到本世纪五十年代，著名数学家被誉为电子计算机之父的冯·诺依曼(Von Neumann)深入地研究了电子计算机和人脑功能的异同，在他最后一本遗作里断言："人脑的语言不是数学的语言"！

十年后，即1965年，查德首次明确而系统地提出模糊集的概念，实际上是企图指出：人脑的语言可能是模糊语言．

当然，这个答案还远未完成．但是，经过二十年的努力，已经可以看出，这方面研究取得的宝贵进展，不仅丰富

了经典的数学理论，而且对开拓电子计算机新的应用领域以至新型计算机的研制都有重要的推动作用.

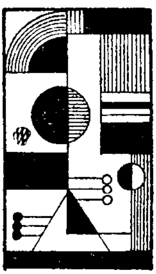
电子计算机问世才四十多年，其影响所及遍布世界各个角落. 科学家预言，到本世纪末，它将渗透人类生活的一切重要领域. 以电子计算机及其相关技术的广泛应用为主要特征的新技术革命，不仅导致国民经济的发展和物质生产水平的提高，而且将影响整个社会的变化，迎来信息社会的明天. 但是，到目前为止，最先进的计算机也还存在一个根本缺陷，即不具备人脑所特有的模糊推理、模糊决策的能力，不能像人那样处理用自然语言表达的知识，不能像人那样做近似推理，也不能用自然语言与人对话. 这些计算机能准确地控制飞船登月，却无法识别人的音容笑貌. 在某种意义上说，其“智能”水平不及一个婴儿. 事实上，把目前全世界所有的超大型计算机动员起来，也解决不了诸如婴儿识别母亲这样一些看起来十分简单的问题. 解决这些问题，要求计算机具备处理模糊信息的能力，从而要求人们对模糊概念、模糊推理进行深入的研究. 这些问题的解决必将使计算机的发展出现根本性的突破，导致新一代计算机即智能计算机的诞生.

谁能在新一代计算机的研究中领先，谁就站在新技术革命的最前列，谁就将在世界经济科学、文化、国防等各方面居于领先地位.

如果同意这个观点，你就会对这门被称为“模糊数学”的学科发生兴趣，对它的重要性有了认识.

末了，我们对模糊数学这个学科的名称说几句话．这个名称也许容易使人产生误会：怎么把数学这门学科搞成模模糊糊的？模糊数学当然不是模模糊糊的学科，它是以数学手段分析与处理模糊性事物的学科，所以当初如果把这个外来词(Fuzzy Mathematics)译成“模糊性数学”或许更贴切些．

目　录



一 集合和逻辑

这一章带有复习性质．有些读者可能感到前两节讨论的内容和中学教材重复.不过,适当的重复有时也是必要的．

1 集 合

进入高中，我们在代数课里就接触到了集合的概念．直观地理解集合的概念并不困难．例如，我们学校的全体师生员工组成一个集合．某个图书馆拥有的全部书刊组成一个集合，全体正整数组成一个集合，此时此刻全世界满十八周岁的人组成一个集合，方程 $x^2-4x+3=0$ 的根组成一个集合，等等．一般地说，我们把具有某种性质的事物的总体叫做集合，通常用大写拉丁字母 A, B, C, … 表示；构成集合的事物叫做元素，通常用小写字母 a, b, c, … 表示．

这里，需要注意的是，我们所谈到的任何一个集合，它所包含的元素都是确定的．换句话说，对任何一个元素，它或者属于这个给定的集合，或者不属于，二者只能择一，是

完全确定的.

如果 a 是某个集合 A 的一个元素，则称元素 a 属于集合 A，以

$$a\in A$$

表示，读作"a 属于 A". 如果 b 不是集合 A 的元素，则称元素 b 不属于集合 A，以

$$b\overline{\in}A \quad 或 \quad b\notin A$$

表示，读作"b 不属于 A".

确定一个集合最直接的办法是把集合的全体成员列举出来. 例如，以 A 表示某校高二(2)班学生的集合，则这班的学生名册就确定了集合 A. 我们知道，每位任课教师都有这么一个名册. 在册的都是高二(2)班的学生，不在册的就不是. 这种确定集合的办法叫列举法. 用列举法确定集合时，往往就把集合的元素全写在大括号内，于是

$$\{1, 3, 4\}$$

表示 1, 3, 4 这三个数组成的集合. 同样

{张三，李四}

表示由张三，李四这两人组成的集合.

列举法的好处是可以具体看清集合的元素，比较直观. 但是，当集合中元素的数目很大时，就显得累赘. 如果元素的数目是无限多，它就更不适用. 因此，有时我们还需要用描述法，即用描述集合元素所特有的公共属性来确定这个集合：具有这属性的元素属于这个集合，否则就不属于. 用描述法表示集合时，可以在大括号内先写上这个集

合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合元素的公共属性．如

$$\{x \mid x^2-4x+3=0\}$$

表示“方程 $x^2-4x+3=0$ 的根”组成的集合，

$$\{x \mid |x-2|<3,\ x\in R\}$$

表示“与2的差的绝对值小于3的全体实数”组成的集合，其中 R 表示实数集．有时，为简单起见，也可省去竖线及其左边部分，于是

$$\{\text{直角三角形}\}$$

就表示直角三角形的集合．

列举法和描述法各有特点．在实际研究中，采用哪一种表示方法，要根据具体问题来确定．例如，暂时只知道元素的性质的集合，只好用描述法表示．如用 B 表示方程 $x^2-4x+3=0$ 的根的集合

$$B=\{x \mid x^2-4x+3=0\}.$$

在没有求出这个方程的根以前，只好这样表示．但是，求出这个方程的根以后，B 当然可以更直观地用列举法表示，即

$$B=\{1,\ 3\}.$$

在小学算术和中学代数里，我们通过对“数”之间的大小关系及其运算的讨论来研究数的性质．现在，同样需要通过对“集合”之间的关系和运算的讨论来研究集合的性质．

定义1 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 中的任何一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \quad \text{或} \quad B\supseteq A.$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

如果 A 不是 B 的子集，即 A 中至少有一个元素不属于 B，则可记作

$$A \nsubseteq B \quad 或 \quad B \nsupseteq A.$$

读作“A 不包含于 B”或“B 不包含 A”.

定义 2 设 A 和 B 是两个集合，如果 A 中的任何一个元素都是 B 的元素，同时 B 中的任何一个元素也是 A 的元素，则称 A 和 B **相等**，记作

$$A=B.$$

如果 A 中至少有一个元素不在 B 中，或者 B 中至少有一个元素不在 A 中，则称 A 和 B 不相等，记作

$$A \neq B.$$

两个集合相等，意味着这两个集合包含着相同的元素．根据定义，要证明两个集合 A 和 B 是相等的，必须证明

(1) A 中任何一个元素都是 B 的元素；

(2) B 中任何一个元素都是 A 的元素．

初听起来，这好象是不必要的绕圈子．但是，这种“绕圈子”确实是验证两个集合相等的唯一办法．

定义 3 不包含任何元素的集合叫作**空集**，以 $\varnothing$ 表示．

定理 1 设 A 是任意一个集合，则有 $\varnothing \subseteq A$，即空集是任意集合的子集．

证明 用反证法．若 $\varnothing \nsubseteq A$，由定义，$\varnothing$ 中至少有一个元素不属于 A，但 $\varnothing$ 不包含任何元素，这是矛盾的，所以有 $\varnothing \subseteq A$.

也许你会认为空集既然是"空"的，什么都不包含，因此就无足轻重这就错了．事实上，空集不仅重要(请回忆算术中数零的作用!)，有时还很招人喜欢．例如，我们刚参加一场考试，用 A 表示在这场考试中成绩不合格的人的集合．如果 $A=\varnothing$，于是大家一定都非常高兴．

定义 4 设 A、B 是两个集合．由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的**交集**，简称 A、B 的**交**，以 $A\cap B$ 表示，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

定义 5 设 A、B 是两个集合．由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的**并集**，简称 A、B 的**并**，以 $A\cup B$ 表示，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

为了讨论补运算，需要引进全集的概念．

一般说来，当我们进行实际研究时，总是围绕着某个确定的主题，与之无关的事物我们就不涉及．例如，平面几何研究的就是平面上点的集合．通常把所要研究的事物的全体叫做**全集**，也叫**论域**．我们只在论域的范围内讨论问题．论域通常用大写拉丁字母 I、U、V 等表示．

定义 6 设 U 为论域．对任意集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做 A 在论域 U 中的**补集**，或简称 A 的**补**，记作 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

可以证明，对任意集合 A, B, $C\subseteq U$，有

S1) 等幂律

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

S2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

S3) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

S4) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

S5) 德·摩根律

$$(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

S6) 双重否定律

$$\overline{\overline{A}} = A$$

S7) 两极律

$$\boldsymbol{U} \cup A = \boldsymbol{U}$$

$$\varnothing \cup A = A$$

$$\boldsymbol{U} \cap A = A$$

$$\varnothing \cap A = \varnothing$$

S8) 补余律

$$A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U}$$

$$A\cap\overline{A}=\varnothing$$

严格证明这些性质，要用前面介绍的“绕圈子”的办法．不过，我们宁可利用一些具体例子来说明，这将更直观而易于接受．

［例 1］ 论域 $U=\{a, b, c\}$，则 U 的全部子集是

$$U=\{a, b, c\}$$

$$A=\{a, b\}$$

$$B=\{b, c\}$$

$$C=\{a, c\}$$

$$D=\{a\}$$

$$E=\{b\}$$

$$F=\{c\}$$

$$\varnothing$$

容易看出 $$A\cap B=\{b\}=E$$

$$A\cap C=\{a\}=D$$

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=E\cup D=\{a, b\}=A$$

另一方面 $$B\cup C=\{a, b, c\}=U$$

$$A\cap(B\cup C)=A\cap U=A$$

即 $$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

这就是 S4)．其他性质都可类似地进行验证

［例 2］ 用矩形表示论域 U．A, B, C 三个集合分别用矩形内的三个圆表示，这就是所谓的韦恩(Venn)图(图1)．