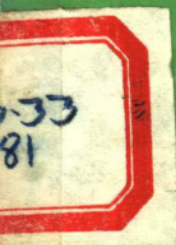


狹義及廣義相對論

引 論

吳 大 猷 著



臺 灣 中 華 書 局 印 行

狹義及廣義相對論

(引 論)

吳 大 猷 著

臺灣中華書局印行

中華民國六十九年十月五版

狹義及廣義相對論(全一冊)

平裝一冊基本定價貳元正

(郵運滙費另加)



著者 吳大猷
發行人 熊鈍生
臺灣中華書局股份有限公司代表

本書局登記證字號
行政院新聞局出版
臺北市重慶南路一段九十四號
臺業字第捌叁伍號
臺灣中華書局印刷廠
臺北市重慶南路一段九十四號
郵政劃撥帳戶：三九四二二號

Chung Hwa Book Company, Ltd.
94, Chungking South Road, Section 1,
Taipei, Taiwan, Republic of China

(臺總)甲書

No.8130

臺參(實)

序

所謂狹義相對論，已成為物理學中一部基本知識。即所謂廣義相對論，也不再是神秘莫測的理論。但一則由於不懂它的人們的渲染，一則因為它所需的數學對一般的習物理者的陌生，所以它仍帶有些神秘性。今年夏因國家安全會議科學發展指導委員會的任務來臺。暑期科學研討會物理組主任王唯農先生和我商量，我答應在研討會的前數星期中講些相對論。為節省在粉板上寫許多數學方程式的時間，和減輕聽講者邊聽邊記的分心，我陸續的寫講義印發給大家。我講的範圍和目的，是介紹相對論的基本觀念。現在這本小冊，便是那些很隨便寫來的講義的原文。我在臺期間，各事極忙，精力和時間，都不容我作更大的嘗試。

我現在想順便的向青年學生們說幾句話。1927—8年我在天津南開大學的三年級。物理系的教授有饒毓泰、陳禮兩先生。比我高一年級的物理系同學有楊景才、龔祖瑛、沈士駿三人。我的班祇有我一人。我們四人，各選一學門，不煩教師，自己摸索，輪流報告。我選定了相對論。後來（1931年）在美國密昔根大學選了一學期的相對論，係數學教授 G.Y. Rainich 所授。此後在自己的工作上和涉獵上，都未再及此部門物理。現在我知道的和瞭解的，大部份還是在南開自己摸索得來的，而從正式選習的那課程，則一點印象都沒有。

我講這些話，是希望大家從早年便養成自己探討學問的習慣，不要依賴教師的講解。知識可以從書和講授得來，但真正的瞭解，是完全要靠自己的努力和天資。一個人要靠自己的消化力來把吃的東西變為他的細胞和精力。好廚師和好菜，或可以增加他的胃口，但最後還是靠他自己的消化吸收能力也。

這本小書不僅範圍很窄，而且可能還有不妥的地方。我的目的，是用最簡捷的十幾小時的講授，解釋相對論的觀念，希望最少可讓聽者讀者知道相對論是甚麼和甚麼不是相對論。這本小書祇能看作餐前的開胃口用的小菜。如看這小菜不開胃，不吃它便是，逕吃正經的菜可也。菜單如下：

P. Bergmann: Introduction to the Theory of Relativity

W. Pauli: Theory of Relativity

A. S. Eddington: The Mathematical Theory of Relativity

V. Fock: Space, Time and Gravitation

Pauli 書成在四十餘年前，但仍不失為一名著。十年前英文譯版時，Pauli 曾加小註若干，略提及新的發展。Eddington 書於數學部份極詳，Bergmann 書較簡淺讀來頗易。惜前者成在四十餘年前，而二書皆不及新的發展。Fock 書亦極詳盡，且及新的發展。（所謂新的發展，是指 Einstein, Hoffmann, Infeld 在 1938 年的重要工作；近十餘年來關於引力波，及引力波的量子化等新發展，則似未有書討論及也）。此外 H. Weyl 之 Space, Time and Matter 一書，和 Einstein 本人的 Theory of Relativity（一九二幾年在普靈斯頓大學的講稿而增添附錄數版的），都是名著，但初讀不易耳。

這本小書，經楊毓東先生細閱校正，我極願在此致謝。

吳 大 猷

民國五十六年八月於臺北

目 次

第一章 引 言

一、物理定律及理論的性質	1
二、物理定律的不變性	4
1. 不變性	4
2. 不變性與守恒定律	6
3. 矢量、張量的意義	6
4. 不變性與相對論	8

第二章 電磁學摘要

一、電磁基本定律	11
二、電磁勢	15
三、電磁勢(Gauge)變換	17
四、能之守恒	17
五、電磁應力	18
六、電磁現象及對以太之運動	21
1. Michelson-Morley 實驗	22
2. Trouton-Noble 實驗	23
3. Fizeau 實驗	24
4. 星光之偏差	25

第三章 狹義相對論

一、時間、空間的定義	27
------------	----

二、相對論的基本假定	29
三、羅倫茲變換	29
四、Minkowski 之四度幾何	32
五、羅倫茲變換的結果	35
1. 不變性	35
2. 時間的伸長	35
3. “同時”觀念的相對性	36
4. Fitzgerald-Lorentz 之短縮	37
5. 速度之和	37
6. Fizeau 實驗	37
7. Doppler 效應	38
8. 星光之偏差	39

第四章 張量代數

一、張量代數	41
二、垂直變換及羅倫茲變換	44
三、基本張量 $g_{\mu\nu}$	46
四、 $g_{\mu\nu}$ 之幾何解釋及矢量之逆變 (Contravariant) 和協變 (Covariant) 分矢量	48

第五章 電動力學與相對論

一、電動力學之羅倫茲不變性	51
二、電動力學之守恒定律	55
三、能——動量四度矢量	57
四、電動力學與異常 (improper) 羅倫茲變換	59
1. 宇稱 (Parity), 空間的反投	59

2. 時間的逆反·····	62
第六章 相對論力學	
一、引言·····	64
二、相對論力學·····	65
三、能與質量的關係·····	69
第七章 狹義相對論的應用	
一、Sommerfeld 的理論·····	71
二、L. de Broglie 的理論·····	71
三、Dirac 的相對論電子方程式·····	73
第八章 廣義相對論——引言	
一、引言·····	75
二、幾何與物理·····	76
三、等效(Equivalence)原則·····	80
四、牛頓和愛因斯坦的萬有引力理論·····	82
第九章 仿射(Affine)幾何	
一、仿射聯絡(Affine connections)·····	83
二、協變(Covariant)微分·····	89
三、Stokes 定理·····	93
四、平行位移·····	94
五、平移與可積分性·····	97
六、極端線(geodesic)和仿射聯絡·····	100
七、空間曲度與平移——曲度張量·····	102
八、仿射聯絡之可積分性·····	107

第十章 基本張量 $g_{\mu\nu}$

- 一、平的空間和曲的空間的定義..... 111
- 二、 $g_{\mu\nu}$ 張量..... 112
- 三、張量密度..... 117

第十一章 Riemannian 幾何

- 一、極端線 (Geodesic) 之方程式..... 124
- 二、 Γ_{im}^k 與 $g_{\mu\nu}$ 129
- 三、曲度張量 $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}$ 133
- 四、曲度 R 及張量 $R_{\lambda\rho, \sigma\nu}$ 之幾何意義..... 135
- 五、曲的空間和平的空間的條件..... 142
- 六、自然的, 或極端線的 (geodesic) 座標系..... 144
- 七、愛因斯坦張量 G_{μ}^{ν} 148

第十二章 廣義相對論及引力理論

- 一、廣義相對論..... 151
- 二、引力理論——引言..... 154
- 三、引力定律 $R_{\mu\nu}=0(\sqrt{-g}=1)$ 159
- 四、有物質之點的引力定律 ($\sqrt{-g}=1$)..... 163
- 五、引力定律 $R_{\mu\nu}=0(\sqrt{-g}=1)$ 的近似解..... 165
 - (甲) 度量問題..... 168
 - (乙) 光在引力場之徑..... 170

第十三章 引力場方程式之正確解

- 一、Schwarzschild 解..... 173
- 二、水星之運行：近日點之前移..... 178
- 三、光線經日球旁時之偏折..... 184
- 四、恒星光譜線的紅移..... 186

狹義及廣義相對論

第一章 引 言

一、物理定律及理論的性質

在講相對論之前，我想先解釋一下物理學的目標。這是近代物理學者對物理學的基本觀念（或可以說是態度或哲學）；這也是科學和玄學的分別。一個人當然可以不喜歡，不接受這個觀念，可以喜歡玄學，但他不可以將二者混為一。譬如說，一個人可以喜歡吃牛肉，但他不可以不知牛肉之外還有鷄，不可以強叫鷄作「牛肉」而大大批評這個「牛肉」不好。這個譬喻太膚淺也不很切合，但許多不懂得科學的哲學家，和不懂科學哲學的科學家經常爭執的緣故，大約便是這樣的。相對論不僅在物理學上基本觀念上有極基本的貢獻，在科學哲學上也是有極重要的貢獻的。我們想深刻的瞭解相對論，則不僅要懂得它的數學的部份（這倒是比較容易的），還要懂得它的物理基本觀念上的意義。

物理學的構成，可約分作下列幾項：

(1) 物理現象

所謂現象，包括自然（如行星的運動，聲波的傳播等）及實驗（如飛機的飛行，原子彈的爆炸等）的現象。

由現象的觀察而進到作度量，這是物理學的最基層。

(2) 觀念(concepts)的形成和其精確的定義

一個不習物理學的人，也有對物理現象的觀念，如冷，熱，快，慢等。

但在物理學中，則所有的觀念，都務必根據於度量的準確的定義。如冷熱則有溫度計，快慢則有速度計等。

物理學中的觀念，有些可以說是「原始的觀念」，如時間，空間等。其它有許多可以由這些原始觀念構成的觀念，如速度，動量，動能等。後者都可以準確的加以定義，如

$$v = dr/dt, \text{ 動量} = mv$$

$$\text{動能} = \frac{1}{2}mv^2$$

都可以精確度量的。物理學中絕大多數的觀念，都是後者一類的。

但原始的觀念，便不同了。譬如說「時」的觀念。物理學第一步便把心理的，感覺的人為成份去掉，而用鐘，地球運行，或「原子鐘」等精確的量定時間的長短。這些「時計表」似是不帶人為成份了。由是所謂「絕對時」便成為一極自然（甚或天經地義的）的觀念。牛頓可以說是物理學史中最偉大的人，對「時」的定義，是說「時」是與宇宙一切無關的，均勻的渡去的。這個「絕對時」的觀念，在物理學和哲學中，成為一基本觀念，有二百多年之久。當然有人會對「均勻」兩個字覺得有毛病，但連牛頓本人在內，沒有人真正的嚴重的懷疑這個觀念，或能想出其它定義，避免了這個無意義的繞圈子的定義。

到了1905年，愛因斯坦分析「時」和「空」在物理學中的意義，從度量的觀點，下一定義。這定義，是根據一個觀察者度量時間（時距）和空間（空距）的實驗步驟而下的。換言之，愛因斯坦的「時」「空」，是物理學中有度量意義的觀念，不是玄學中的與宇宙無關的「絕對時」。關於這新定義和新觀念，我將詳細的解釋。現在祇講它們的重要性。

相對論的重要，不僅是它成為物理學中很小數目的基本的原理之一，而是它對物理學本身的基礎有劃時代性的改革。愛因斯坦以實驗度

量上的意義作物理觀念的定義，是一新的哲學。後來海森保 (Heisenberg) 氏創始量子力學，他的出發點，便同是這個觀點。現在量子力學的物理及哲學基礎，大部是由於愛因斯坦的創見。

最可異者，是狹義相對論的數學部份，習物理學幾無不知曉，但很少的人能瞭解它在物理學構成理論的基本觀點上的重要貢獻。即如英國大數學家 E.T. Whittaker，在其 1953 年著之「以太及電學理論史」第二冊中，討論相對論一章有五十餘頁，題為羅倫茲氏及龐格利 (Poincaré) 之相對論，祇在三數不重要處提及愛因斯坦。這顯示其未能瞭解此點也。

(3) 物理定律

有了物理現象的觀察及若干物理觀念 (見前二節)，由觀察結果歸納出來的各觀念間的關係，便成為物理學的法律。例如 Kepler 的行星運動三定律，Boyles 氣體定律等。

(4) 物理學的目標

近代的物理學者，對物理學的看法，和通常的了解不同。物理學不是要「解釋」物理現象，因為「解釋」便引入了玄學的因素。物理學主要的目的是用若干物理觀念，以上述的定律方式，敘述物理現象。例如上述的氣體定律 $PV = RT$ ，祇是敘述一個氣體的氣壓，體積，溫度三個觀念間的關係。這是物理學嚴格的，基本的定義。

(5) 物理學中的理論

但物理現象是層出不窮的 (如近年來由於高能加速器之建造，我們對所謂基本粒子的觀察，不斷進展)。怎樣可以發現「所有」的定律，來敘述「所有」(已知和尚未發現)的現象呢？這便是物理學的「理論」的任務了。一個理論，是就已有的或新引入的觀念，假設這些觀念間若干關係 (或方程式)，這些假設最低的條件是可以敘述已知的各定律，但我們當

然要求(或希望)由它們可以導出更多的關係,可敘述尚未被觀察到的現象。物理學的理論,係將歸納式的方法,替以演繹(deductive)式的方法。量子力學,是物理學理論的最好的例子。

假若我們目的祇要敘述某若干數的定律,則通常可有許多不同的理論(假設),都一樣的勝任。在這些理論中,又怎樣的去取呢?通常的選擇條件是(一)普遍性和(二)簡單性。所謂普遍性,是從比較很小數目的假設,可以導演出許多新的關係(觀念間的方程式)且都和觀察結果相符的。牛頓的萬有引力論,祇作引力為距離平方反比的假設,便可以敘述各行星運動定律,便是一例。但所謂簡單性的條件,便不易判定了。「簡單」實在和「熟識」有關。對一個知識豐富的人很「簡單」的,對另一個人可能是很艱深的。

二、物理定律的不變性(Invariance)

1. 不變性

上節中曾說物理學的理論,它的目標之一,是使原理有普遍性。譬如說,牛頓的萬有引力的理論,可以述敘行星的運動(亦即是行星的位置與時間的關係)。但這定律,顯然的和採用座標無關,也和採用「時」的始點無關。由是我們得到一極重要的,所謂不變性的觀念。

這個觀念是由另一觀念引來的。我們可以將空間座標系平行的移動(Translation),或將其繞座標系中心轉動(Rotation),或將座標對中心反投(Inversion)使所有座標都變它們的符號,或將時的座標平移,如下

(1) 空座標之平移

$$r \rightarrow r + d,$$

(2) 空座標之轉動

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij},$$

(3) 空座標之反投

$$r \longrightarrow -r, \quad (x \longrightarrow -x, y \longrightarrow -y, z \longrightarrow -z),$$

(4) 時座標之平移

$$t \longrightarrow t + t_0, \quad (t_0 = \text{常數})$$

上四項變換(Transformation)皆謂之運作(Operation),可用運作子(Operator)表示之。

$$(1) \quad r \longrightarrow Tr = r + d, \quad d = \text{常數}$$

$$(2) \quad r \longrightarrow Rr, \quad R \text{ 爲上式之方陣(運作)}$$

$$(3) \quad r \longrightarrow Pr = -r, \quad P \text{ 稱爲宇稱(Parity)運作子(或反投運作子)}$$

$$(4) \quad t \longrightarrow \oplus t = t + t_0.$$

上文所謂不變性,即是一個定律(或是一個方程式,或是物理觀念間的一關係),經過某一個變換(即運作)而不變易的性質。最簡單的例,如兩點間的距離爲 d , 或

$$|r_2 - r_1| = d,$$

的關係,不因上述四運作而變易是也。

物理學中許多的定律,對上述四運作中皆有不變性。如牛頓之萬有引力定律;電磁場之基本方程式(Maxwell氏)等皆是。在此吾人務必注重的,便是某一定律對某一運作是否有不變性的問題,有時好似是自然而然的便可解答,但最後的答案仍是須由實驗觀察得來。1956年李政道楊振寧二氏,首次提出所謂「弱作用」對空間反投運作,可能沒有

不變性的疑問。此項推想殊由吳健雄等實驗證實，為物理定律的對稱 (Symmetry) 性之研究開一新紀元。

2. 不變性與守恒定律

物理學中的不變性的重要，是：凡對每一運作有不變性，即另有一與其相當的守恒定律 (Conservation Law)。在力學中，如一系統的 Hamiltonian H 對空間座標平移運作有不變性，則此系統的動量必為一常數。

蓋由運動方程式，在 X 方向之動量 P ，符合下式

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

如
$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

則
$$P = \text{常數},$$

而此即動量守恒定律也。

同是理，下表可見 H 之不變性與守恒定律之關係。

H 對運作之不變性	守 恒 定 律
空 間 平 移	動 量
空 間 轉 動	角動量
空 間 反 投	宇稱性 (Parity)
時 間 平 移	能

上表祇指出在古典物理中時，空的變換和熟稔的守恒定律。此外尚有其他的對稱性和守恒定律，不在相對論範圍內，茲不提及。

3. 矢量、張量的意義

在淺的物理學裏，我們引入了矢量 (Vector) 和張量 (Tensor) 的觀

念。現在我們從比較高一點的觀點，對矢量張量的觀念下一定義。這觀點便是從空間座標的轉動運作來看各物理觀念的性質。矢量的定義，是基於下列之座標變換方程式，由初淺之幾何，如一點在一座標系的座標為 x_1, x_2, x_3 ，在另一由此座標系以轉動得來的座標系的座標為 x'_1, x'_2, x'_3 ，則此二座標的變換方程式為

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i, j = x, y, z$$

$$\sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}.$$

如 v_x, v_y, v_z 乃遵守上述之變換定律之量值，

$$v'_i = \sum_j a_{ij} v_j,$$

則 v_x, v_y, v_z 謂為一矢量 $\mathbf{v}$ 之分量。

同此，張量乃遵守下列之變換定律之量值，如

$$T_{ij}, T_{ijk}, \quad i, j = x, y, z,$$

$$T'_{ij} = \sum_{k,m} a_{ik} a_{jm} T_{km}$$

$$T'_{ijk} = \sum_{r,s,t} a_{ir} a_{js} a_{kt} T_{rst}, \text{ 等}$$

所謂非向量 (scalar) 乃在座標變換時不變之量值，如一矢量的長度，兩矢量間的角度等。

張量觀念的重要性，是在討論物理量 (Physical quantity) 對座標轉動變換的性質，和物理定律對這變換的不變性。假若某一個物理定律，是可以用下列的方程式表出的：

$$(1) \text{ 兩矢量相等: } \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

$$\text{或簡寫為 } \mathbf{V} = 0.$$

$$(2) \text{ 兩張量相等(包括非向量及矢量)}$$

$$T = S,$$

則我們即知道這物理定律（即定律的方程式），對座標轉動的運作有不變性。因在此運作下，

$$T'_{ij} = \sum_{k,m} a_{ik} a_{jm} T_{km},$$

$$S'_{ij} = \sum_{k,m} a_{ik} a_{jm} S_{km},$$

如在原來座標系內 $T_{km} = S_{km}$ ，則在新座標系內， $T'_{ij} = S'_{ij}$ 也。

總結這節：假若一個物理定律，可以用一張量的方程式表出，則這定律在任何由轉動變換達到的座標皆不變。

4. 不變性與相對論

在通常三度空間之座標轉動運作下，物理定律有不變性，是顯然的，似乎沒有甚麼重要意義。但這個觀念是極重要的。在狹義及廣義相對論中，這「不變性」是一基本性的觀念。

「相對論」的觀念，由來已久，不是由愛因斯坦首創的。舉例言之，在古典力學中，即有所謂伽利利奧（Galileo）變換及不變性。假若有二座標系，沿 X 方向，以均速 v 作相對的移動。在牛頓力學中，「時」乃絕對的時，故在二系中用的「時」是同一的絕對時。一點的 X 座標在這兩座標系中的數值，有下列的關係

$$t = t'$$

$$x = x' + vt'$$

一質點的運動方程式（牛頓第二定律），在 X 系中是

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{力},$$

假若此力祇是質點間之距離的函數，則此力在二座標系中顯為相同。由上式及由 x, t 和 x', t' 的變換關係，可得

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \text{力},$$