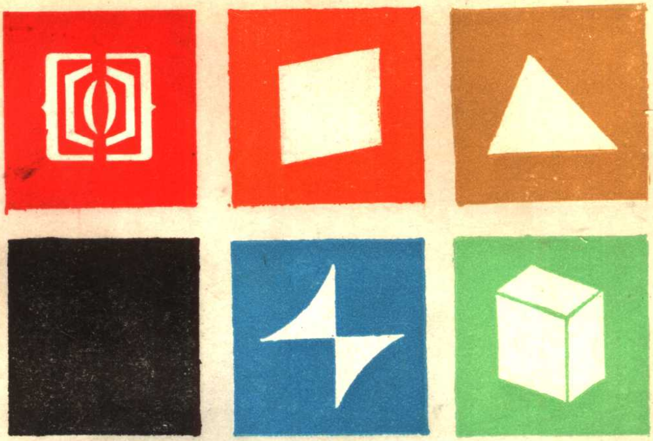

ZONGHE BUFEN

综合部分

谭光宙
丁家泰
徐玉明
朱志诚
张士澮

中学数学解题方法

北京师范大学出版社

中学数学解题方法

（综合部分）

谭光宙　丁家泰　徐玉明　朱志诚　张士清

北京师范大学出版社

中学数学解题方法

（综合部分）

谭光宙　丁家泰　徐玉明
朱志诚　张士清

*

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
北京朝阳展望印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：9.875　字数：208千
1989年 3 月　第1版　1989年　3 月　第 1 次印刷
印数：1 — 22 000

ISBN7-303-00376-2/G·185
定价：3.10元

前　言

在多年的教学实践中，我们深感，学会思考数学问题的方法和掌握解题的一些技巧是教师教好数学、学生学好数学的重要因素。为了帮助高、初中学生，自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧，我们根据《中学数学教学大纲》和现行的中学数学教材，以阐述逻辑思维、总结中学数学各部分的解题方法与技巧为主，用例题形式说明方法与技巧为辅编写了这本书。

本书稿曾请我们的老师—北京师范大学数学系蒋铎先生等详细地审阅，对此我们表示衷心的感谢。

在编写过程中，我们还曾得到曹德荣、陈季海、卞桂荣、王富芸、张大利、郑连德等同志的热情支持和帮助，在此表示谢意。

限于我们的水平，书中谬误一定不少，希望广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　解题通法

数学问题的形式虽千变万化，解答数学题的方法技巧也数不胜数。本章只对下列解题通法：综合法、分析法、反证法、同一法、归纳法的应用略加阐述并举例说明。

一、综合法与分析法

1．综合法

综合法是一种应用最广的解题方法，它是由命题的前提（已知条件），往下推演，逐步导出结果。即所谓“由因导果”的方法。

例1　已知$\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$，

$a^{c}=(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}$且$a>0$，$b>0$，$c>b$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$；

求证：　$(\lg a)^2=\lg(c+b)\cdot\lg(c-b)$。

分析：本题已知等式中，涉及到正弦、余弦，而欲证之等式却无三角函数，故可考虑消去已知中的正弦、余弦后，再推演。

证明：∵　$\frac{a}{c}=\sin\theta$，$\frac{b}{c}=\cos\theta$　$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\therefore\quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

即　　$$a^2+b^2=c^2$$

由此得 $a^2=c^2-b^2 \quad (a>0,\ b>0,\ c>b)$. ①

又 ∵ $a^a=(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}$，取对数，得

$$a\lg a=(c-b)\lg(c+b). \quad ②$$

$$a\lg a=(c+b)\lg(c-b). \quad ③$$

将②×③得

$$a^2(\lg a)^2=(c^2-b^2)\lg(c+b)\lg(c-b). \quad ④$$

将①代入④即得证：

$$(\lg a)^2=\lg(c+b)\lg(c-b).$$

例2 已知一圆锥内有四个半径相等的球互相外切，且都与圆锥面相切，求此圆锥的轴截面顶角的大小。

分析：因圆锥轴截面顶角的大小等于其轴与母线夹角的两倍，所以，问题可归到求轴与母线的夹角。如图1-1(甲)所示的轴截面，因四个球都是半径相等的，且又都与锥面相切，故各球的球心到锥面的距离均相等，并等于球半径r，所以，O_1O_2平行于母线SC，于是，$\angle CSO=\angle O_2O_1O$。这样，问题又转化为求$\angle O_2O_1O$的大小，而这个角恰是四个球的连心线构成的三棱锥（如图1-1（乙）所示）。$O_1\text{-}O_2O_3O_4$的高O_1O'与侧棱O_1O_2的夹角，故此不难求出圆锥轴截面的顶角大小。

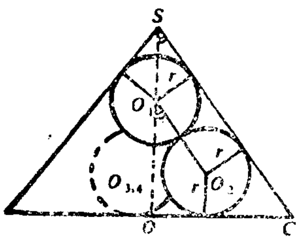

图 1-1(甲)

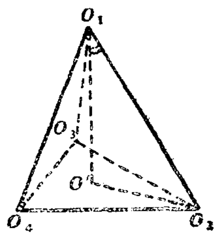

图 1-1(乙)

解：如图1-1(甲)，圆锥SO与其内部四个等球都相切，且四个球两两相外切，设球的半径为r，球心分别为O_1、O_2、O_3、O_4、过S、O_1、O_2三点作一平面截得母线SC。

$\because$ O_1、O_2到SC的距离都相等，

$\therefore$ $O_1O_2 \parallel SC$，

$\therefore$ 三棱锥$O_1\text{-}O_2O_3O_4$的侧棱O_1O_2与高O_1O'的夹角$\angle O_2O_1O'$等于圆锥母线SC和轴SO的夹角。

在三棱锥$O_1\text{-}O_2O_3O_4$中，(图1-1(乙)所示)它的侧面和底面均是边长为$2r$的正三角形，O_1O'是它的高，则

$$\sin\angle O_2O_1O' = \frac{O_2O'}{O_1O_2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \quad \angle O_2O_1O' = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},$$

因此，圆锥的轴截面顶角大小为$2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$。

2．分析法

分析法是由命题的结论出发（假定结论成立）逆推到前提．即所谓"执果索因"的一种解题方法．

例3 若a、b、c是一直角三角形的三边，其中c为斜边，且$a\neq1$，$c\neq1\pm b$，则

$$\log_{(b+c)}a + \log_{(c-b)}a = 2\log_{(b+c)}a\cdot\log_{(c-b)}a.$$

分析：本题虽从直角三角形中勾股定理可得$a^2=c^2-b^2$．但欲证出结论．却不易入手．若从结论出发分析．推理则较方便．

证明：设$\log_{(b+c)}a + \log_{(c-b)}a = 2\log_{(b+c)}a\ \log_{(c-b)}a$成立·

由此有 $$\frac{\lg a}{\lg(b+c)}+\frac{\lg a}{\lg(c-b)}=\frac{2(\lg a)^2}{\lg(b+c)\lg(c-b)},$$

$$\frac{\lg a[\lg(c-b)+\lg(b+c)]}{\lg(b+c)\lg(c-b)}=\frac{2(\lg a)^2}{\lg(b+c)\lg(c-b)},$$

$$\lg(b+c)+\lg(c-b)=2\lg a,$$

$$\lg(b+c)(c-b)=\lg a^2,$$

$$c^2-b^2=a^2,\text{ 即 } a^2+b^2=c^2。$$

此与已知三角形为直角三角形性质相符，又以上各步推理均可逆，所以命题得证。

例4 若$a>0,b>0$，$a\neq b$ 则 $\frac{a^3+b^3}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$。

证明：要证$\frac{a^3+b^3}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$，

只须证 $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3>0$，

只须证 $\frac{4a^3+4b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{8}>0$，

只须证 $3a^3+3b^3-3a^2b-3ab^2>0$，

只须证 $(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)>0$，

即只须证 $(a+b)(a-b)^2>0$

根据已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq b$。可知上述不等式一定成立。

于是，命题得证。

说明：分析法证题，通常有两种不同的方法：如例3中所示，这里寻求的结论的充要条件，所以，在证时要保证每步推理均可逆；象例4中所示，它是寻求结论的充分条件，

此时，无需要去考虑每步推理的可逆性。

分析法与综合法，在解题时常常是交错使用，即先用分析法导出一解题途径，再用综合法来加以论证。如

例5 用 A、B、C 和 a、b、c 分别表示$\triangle ABC$的三个角和三条边。

(1) 求证：当 $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B>1$时，此三角形为锐角三角形。

(2) 在这样的情况下，判别二次函数 $y=c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1$的图象与 x 轴是否有交点。

(3) 如果$\triangle ABC$ 是等边三角形。求二次函数 $y=c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1$ 的顶点轨迹方程。

分析：(1) 要证三角形为锐角三角形，只须证明它的每一个角均为锐角，由此知，只须证明 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$ 均为正。由 $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1$。可以得出 $\operatorname{tg}A,\operatorname{tg}B$ 都大于零。又由 $\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}[180^\circ-(A+B)]=-\operatorname{tg}(A+B)$及两角和的正切公式可证得 $\operatorname{tg}C$ 亦为正。于是 (1) 可证。

(2) 要判别二次函数 $y=c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1$的图象与 x 轴是否有交点。只须看 $y=0$时，方程$c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1=0$ 的判别式的符号。而判别式的符号可根据题设条件（锐角三角形等）来确定。

(3) 因为$\triangle ABC$是等边三角形，所以有 $a=b=c$。代入函数解析式，可消去 b、c，则二次函数式中只有一个参数a，再求出顶点的坐标，即可得顶点轨迹方程，求出其轨迹。

证明：(1) $\because$ $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B>1$，$\therefore$ $\operatorname{tg}A$，$\operatorname{tg}B$ 同号。

又 $\because$ $\operatorname{tg}A$，$\operatorname{tg}B$ 不能同为负，否则 A，B都为钝角，这不可能，

$\therefore$ $\operatorname{tg}A$，$\operatorname{tg}B$ 同为正，从而得证角A 和B 都是锐角。

$\because\quad \mathrm{tg}C=\mathrm{tg}[\pi-(A+B)]=-\mathrm{tg}(A+B)$

$$=\frac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{\mathrm{tg}A\mathrm{tg}B-1}>0,$$

$\therefore$ 角C为锐角.

$\therefore$ $\triangle ABC$为锐角三角形.

解：（2）$\because$ $c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1=0$ 的判别式：

$$\Delta=(2\sqrt{a^2+b^2}\,)^2-4\cdot c^2\cdot 1$$
$$=4(a^2+b^2-c^2),$$

由锐角三角形的性质：$a^2+b^2>c^2$，

得知$\Delta>0$，此时，二次函数

$$y=c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1$$

的图象与x轴总有两个交点.

(3) 在等边$\triangle ABC$中，因$a=b=c$，于是，有$y=c^2x^2+2\sqrt{a^2+b^2}\,x+1=a^2x^2+2\sqrt{2}\,ax+1$，

其顶点坐标为

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{a} \quad (a>0), \\ y=-1. \end{cases}$$

$\therefore$ 此顶点轨迹是不包括端点的一条射线：

$$y=-1 \quad (x<0).$$

例6 (1) 若形如$y=(x-a)^2+b$的抛物线在平面上平行移动，而顶点总在$y=-\frac{1}{3}x^2+1$上，如果这个抛物线的焦点纵坐标的值不小于-2；问焦点横坐标在什么范围内取值？

(2) 若形如$y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+n$的抛物线。在平面上

平行移动，而顶点总在$y=x^2+1$上。这时平面上某个区域内总不会有这种抛物线上的点，求这个区域的范围。

分析：(1) 根据抛物线 $y=(x-a)^2+b$ 的解析式。可求出其顶点坐标(a, b)，定出焦参数 $p=\frac{1}{2}$。

由于抛物线是作平行移动，故其焦点坐标与顶点坐标中，横坐标相同。而纵坐标相差$\frac{p}{2}$，又抛物线的顶点总在 $y=-\frac{1}{3}x^2+1$ 上，此即说明点 (a, b) 的坐标满足方程 $y=-\frac{1}{3}x^2+1$，从而可求得 a 与 b 之间的特定关系式，于是，由焦点纵坐标的值不小于-2，即可转化成关于其横坐标的不等式，从而求出横坐标应满足的范围。

(2) 根据 $y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+n$作平行移动．且顶点总在$y=x^2+1$上可求出二参数m和n的特定关系式。从而消去方程 $y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+n$中的一个参数，如消去n，再应用此方程有实数解，判别式应该非负。可求出抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+n$上的点在坐标平面上的变化区域。这个区域的补集即是题中所要求的范围。

解：(1) 设抛物线$y=(x-a)^2+b$的焦参数为p，则$2p=1$

$\therefore\quad p=\frac{1}{2}$。

又此抛物线的顶点坐标为(a, b)，根据平移变动的性质，即可求得焦点为$(a, b+\frac{p}{2})$ 即$(a, b+\frac{1}{4})$。

据已知有 $b+\frac{1}{4}\geqslant -2$， $b\geqslant -2\frac{1}{4}$。

又 $\because$ 顶点 (a, b) 总在 $y=-\frac{1}{3}x^2+1$ 上，

$\therefore$ $b=-\frac{1}{3}a^2+1$ 代入上面不等式，有

$$-\frac{1}{3}a^2+1\geqslant -2\frac{1}{4}.$$

解之，得 $$-\frac{\sqrt{39}}{2}\leqslant a\leqslant \frac{\sqrt{39}}{2},$$

此即焦点横坐标取值的范围。

(2) 抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+n$ 的顶点为 (m,n)，由它总在 $y=x^2+1$ 上，知 $(m、n)$ 满足方程。 $y=x^2+1$。即有 $n=m^2+1$

$\therefore$ $y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+n$ 变为

$$y=-\frac{1}{3}(x-m)^2+m^2+1,$$

即 $$2m^2+2xm+(3-x^2-3y)=0.$$

$\because$ m 存在，并为实数，

$\therefore$ $\Delta=4x^2-4\times 2(3-x^2-3y)\geqslant 0$，

即 $$x^2-2(3-x^2-3y)\geqslant 0.$$

解之，得 $$y\geqslant -\frac{1}{2}x^2+1.$$

由题意可知 $y<-\frac{1}{2}x^2+1$ 即为所要求的范围。

例7 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a\geqslant b>0$）上任一点$M$，向以短轴为直径的$\odot O$作两切线，如过两切点的直线与$x$轴、$y$轴分别交于$P$、$Q$两点，求证：$\frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}$是定值。

证本题的方法步骤是：

① 先设法求出过两切点的直线方程。

② 然后算出此直线分别在x、y轴上的截距。

③ 再代入$\frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}$求值。并说明此值是与$M$点的变化无关的定值。

但在求过两切点的直线方程时，应利用平面几何知识和相应的解题技巧。

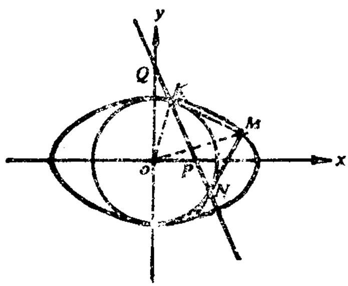

图 1-2

证明：设M点坐标为（m，n）两切点分别为K、N。

如图 1-2，则由圆的切线性质知

$$OK\perp MK,\ ON\perp MN.$$

∴ N、K在以OM为直径的圆上，而以OM为直径的圆的方程为

$$x^2+y^2-mx-ny=0. \qquad ①$$

又以短轴为直径的圆的方程，为

$$x^2+y^2=b^2. \qquad ②$$

∴ 过K、N两切点（也是两圆的交点）的直线方程可

由①－②得到

$$mx+ny=b^2。 \quad ③$$

在③中分别令 $x=0$和$y=0$．得截距．

$$|OQ|=\frac{b^2}{n}, \quad |OP|=\frac{b^2}{m}.$$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{OP^2}+\frac{a^2}{OQ^2}=\frac{b^2}{\frac{b^4}{m^2}}+\frac{a^2}{\frac{b^4}{n^2}}=\frac{b^2m^2+a^2n^2}{b^4}, \quad ④$$

∵ $M(m, n)$在椭圆上，

$$\therefore \quad \frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1,$$

即

$$b^2m^2+a^2n^2=a^2b^2. \quad ⑤$$

将⑤代入④即得 $\dfrac{b^2}{OP^2}+\dfrac{a^2}{OQ^2}=\dfrac{a^2b^2}{b^4}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

$\dfrac{a^2}{b^2}$显然是与M点的变动无关的定值．于是命题得证．

说明：综合法与分析法是两种常用解题方法，在应用此法解题的同时，还必须配以灵活的解题技巧，问题才能顺利解决．本例中，首先利用平面几何中圆的切线垂直于过切点的半径和直径所对的圆周角是直角的性质，将过两切点K、N的直线转化成过两圆交点的弦所在直线．然后利用两个圆的方程相减，求得此直线方程．这样，就大大地简化了解题过程．

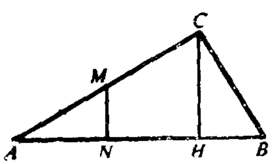

图 1-3

练习1.1

1．如图1-3，

已知$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AM=MC=\frac{1}{2}b$，$CH\perp AB$，$MN\perp AB$，$CH=h_c$，$BN=l$，$AN=k$。

求证：$l^2-k^2=h_c^2$

2. $\triangle ABC$中，已知$\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$，求证：$A=90°$。

3. 已知关于x的方程$x^4+2x^2\cos\theta+\sin^2\theta=0$有相异四实根，求$\theta$的范围。

4. 已知$0<\alpha<\pi$，求证：$2\sin2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$，并讨论$\alpha$为何值时，等号成立。

5. 已知正数a、b满足等式：$36a^2+49b^2=116ab$，

求证：$\lg(6a+7b)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b+\lg2)+1$。

6. 已知p、q、r和x均为不等于1的正数，且$\log_p x$，$\log_q x$，$\log_r x$成等差数列，求证：$r^2=(pr)^{\log_p q}$

7. 有甲乙两容器，甲容器是直圆柱形，高为2寸，底面半径为1寸；乙容器是直圆锥形，高为2寸，底面半径为$2\sqrt{3}$寸。若将甲容器装满水，然后把甲容器的部分水倒入乙容器，使得两容器的水面一样高，求这时水面的高度是多少？

8. 设直线L的方程，为

$$\begin{cases}x=t,\\y=b+mt,\end{cases}\qquad(t\text{ 为参数})。$$

椭圆E的方程，为

$$\begin{cases}x=1+a\cos\theta,\\y=\sin\theta,\end{cases}\qquad(\theta\text{为参数})。$$