

中国机械工程学会十周年年会

圆弧点啮合(诺维柯夫)齿轮传动 专题讨论文集

中国机械工程学会十周年年会秘书处编

· 内部发行 ·

中国工业出版社

中国机械工程学会十周年年会

圆弧点啮合(諾維柯夫)齒輪傳动 专题讨论文集

中国机械工程学会十周年年会秘书处編

中国工业出版社

**圓弧点嚙合(諾維柯夫)齒輪傳動
專題討論文集**

中国机械工程学会十周年年会秘书处編

*

机械工业图书編輯部編輯 (北京阜成門外百万庄)

中国工业出版社出版 (北京佟麟閣路丙10号)

(北京市书刊出版事业許可証出字第110号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印張 24 · 插頁 1 · 字数 545,000

1962年11月北京第一版·1962年11月北京第一次印刷

印数 0,001— 2,653 · 定价(10 7)3.35 元

*

統一书号. 15165 · 2041(一机-424)

目 录

序 言	編者	5
平行軸点嚙合圓柱齒輪傳动的嚙合原理	叶显標	10
关于点嚙合傳动原理的两个基本問題	丁 淳	21
法面圓弧螺旋面符合諾維柯夫嚙合原理	蔣洪潮	33
法向圓弧齒輪的基本原理	刘 健	49
圓弧齒輪强度問題及計算方法	陈貞祥	80
圓弧齒輪弯曲强度計算新方法	文百行、丁治亚、胡衡宇	91
圓弧齒輪傳动中的动載荷	欧宗瑛	100
关于圓弧圓柱齒輪減速器系列設計方面几个問題的探討	李长春	121
关于圓弧圓柱齒輪減速器系列設計新方案的探討	項昌期、时学素、刘尔膺	138
关于圓弧圓柱齒輪通用減速器系列基本参数的選擇与确定	温友淦	150
PM 型圓弧齒輪減速器系列設計和試驗报告	黃善鈞	164
关于圓弧齒輪齿形設計的討論	朱景梓	172
关于圓弧圓柱齒輪主要傳动参数的探討	刘士品等	186
高速圓弧齒輪在万轉鼓風机上应用的初步总结	戴行鈍	198
圓弧齒輪在起重机上应用的設計制造問題	張晏勛	205
圓弧齒輪減速器在矿山及重型机械中的生产实践	洛陽矿山机器厂产品設計科	215
圓弧齒輪減速器的試車及其在軋鋼机上工业試用情况	洛陽矿山机器厂产品設計科	229
圓弧齒輪減速器承載能力試驗及其在起重机上工业試用情况	張晏勛	235
关于灰鑄鉄圓弧齒輪承載能力的試驗报告	李得麟	242
圓弧齒輪傳动重合系数对噪音的影响	朱景梓、陈建基、沈紹槐	249
圓弧齒輪減速箱潤滑条件的試驗研究	朱景梓、陈建基、沈紹槐	253
加工圓弧齒輪用的万能变位滾刀	朱景梓、陈建基、沈紹槐	260
分屑槽圓弧齒輪滾刀的試驗研究	鄧宏鈞、文百行	268
关于圓弧圓柱齒輪檢驗方案的探討	丁 淳	273

圓弧齒輪若干測量尺寸的計算方法·····	李華敏、張希康(287
中心距及切深偏差對圓弧齒輪嚙合帶的影響·····	沈蘊方(308
圓弧齒形蝸杆傳動·····	郭克強(316
圓弧弧綫錐齒輪嚙合分析·····	王靖中(327
圓弧弧綫錐齒輪的設計與製造·····	王靖中(336
圓弧弧綫錐齒輪銑刀盤的設計與製造·····	張正中、顧虎生(358
附錄一 中國機械工程學會十周年年會上關於“圓弧點嚙合齒輪的應用與發展” 中心議題的討論記錄摘要·····	(366
附錄二 中國機械工程學會十周年年會有關齒輪傳動論文文稿目錄索引·····	(382

序 言

• 編 者 •

1961年11月22日到11月30日,中国机械工程学会,在北京举行了十周年年会。在所收到的六百余篇論文中有10%左右是属于齒輪傳动方面的学术报告和研究成果,其中有关圓弧点嚙合齒輪(諾維柯夫齒輪)的約占一半左右,共三十八篇。

在这次年会上,“圓弧点嚙合齒輪(以后,在本論文集中,一律簡称为圓弧齒輪)在我国的应用与发展”被列为中心議題之一。参加討論的正式代表来自十五省、两市和两个自治区共54人(列席不計)。共举行了八次学术报告及討論会,除扼要地介紹和宣讀了十六篇論文外,还根据当前生产中所迫切需要解决的問題,分成四个方面进行了深入的热烈的专题討論,有450人次参加了这些活动。

在专题討論中,代表們介紹了各地圓弧齒輪的試驗和試用情况,肯定了圓弧齒輪的优点,也指出了目前有待于进一步研究解决的問題。

目前,据不完全的統計,国内已生产了各种型式的圓弧齒輪減速器(包括增速箱)約2500台,在軋鋼机、鼓風机、起重機、皮帶运输机、卷揚机、球磨机及小型汽輪机等产品中試用的結果,絕大多數是成功的,对于鋼鐵、采矿、电力工业等都有很大貢獻。

試用結果表明:在标准系列漸开綫齒輪減速器中,改用圓弧齒輪代替漸开綫齒輪后(其它傳动零件作相应加强),可以按中心距提升一級使用。在符合1959年洛陽會議●決議中所規定的条件下,对于中等漸开綫齒輪減速器中的漸开綫齒輪,改用圓弧齒輪代替后,可以在确保工作安全可靠的前提下,使承載能力增加一倍到一倍半以上。

第一机械工业部正在制訂圓弧齒輪通用系列減速器的标准草案,在1962年內試制、試驗、鉴定以后,就可以在生产中貫徹执行。

这次會議是继1959年天津和洛陽两次圓弧齒輪技术會議以后的一次規模最大的全国性的学术會議,它对我国今后发展圓弧齒輪的理論研究与生产应用将起巨大的推动作用。我們选編了有关的論文三十篇和专题討論記錄,汇印成这个文集,提供从事圓弧齒輪工作的同志們参考与研究。

关于圓弧齒輪强度及設計

(一)

會議討論并分析了关于圓弧齒輪的破坏形式和失效的原因。

除了由于材料缺陷,齒輪結構設計上不合理等特殊原因而使整个齒圈碎裂的情况以外,在实用产品中,其损坏形式的种类大致与漸开綫齒輪相同。按出現的次数統計,以齿面发生塑性变形为最普遍,其次为点蝕,个别也出現过胶合(擦伤)和断齿;在球磨机上試用圓弧齒輪作开式傳动时,寿命比漸开綫齒輪延长七八倍,但仍旧以磨損过度作为其失效原因。

● 1959年11月20日在洛陽召开了全国圓弧齒輪(諾維柯夫齒輪)技术會議。

塑性变形现象，表现为在齿的啮出端挤出了飞边，较严重的则在齿顶处也出现飞边，最严重的，在齿顶处发生卷边（如同在温度不适当时齿轮轧制中所出现情况相似），在齿面接触区出现明显的压痕。

这种情况，一般是由于材料未经热处理调质，硬度过低之故。在讨论中大家认为，圆弧齿轮的硬度要求应该在可能的条件下适当提高，大齿轮硬度不能低于 $220 \sim 240H_B$ ，小齿轮的硬度应该比大齿轮高 $20 \sim 40H_B$ 。

产品中，齿面发生点蚀的部位，一般都是在齿顶附近首先出现，而其中尤以大齿轮齿顶处最为常见。

经过讨论，大家认为这是由于因循了渐开线齿轮的生产习惯，中心距偏大、切齿深度偏深以致初期接触带偏于凹齿齿顶，或者由于矫正过正而使接触带偏于凸齿顶部。凡是接触带位置正确，硬度符合要求的就不会出问题。因此认为，装配后的接触检验是防止不合格产品出厂的有效措施。但接触检验的技术要求除了在齿长方向要求 $80 \sim 100\%$ 外，还应该对于接触带在齿高方向的位置有明确的规定。

只有洛阳矿山机器厂的试用工作中出现过严重的胶合破坏。其他单位也曾偶然出现过有胶合的倾向。

会议讨论了出现胶合现象的各种可能的原因，为进一步研究提出了方向。

在试用产品中，仅只有一次发生了轮齿折断事故，这是由于安装时，对于轴向窜动量的调整疏忽所致。

在实验室条件下的齿轮强度试验工作，过去在国内基本上是空白点，由于经验不足，因此所得出的数据往往不够稳定，结论也就不很可靠。但就这些试验结果来看，也足以说明圆弧齿轮的确具有高承载能力的优点。

在会上有不少同志指出，他们的试验结果与库得略夫采夫（В. Н. Кудрявцев）的经验公式相差很大，按库氏公式计算的结果过于安全。

同时也指出了，在各种参数中，螺旋角的变化对于圆弧齿轮的承载能力的影响最为显著，在进一步的试验研究工作中应该作为首要的项目。

许多同志指出，用铸铁作为齿轮材料是不适当的，但是，用球墨铸铁代替钢材来制造齿轮还是有其发展前途的。

（二）

关于圆弧齿轮的强度计算方法的研究，在年会上提出了三篇论文。

会议参加者认为，将渐开线齿轮计算方法类似地用于圆弧齿轮的设计工作，只能作为暂时的权宜办法。注意到齿轮的各参数对于圆弧齿轮承载能力的影响有别于渐开线齿轮，所以应该积极地从圆弧齿轮实际失效特点来研究圆弧齿轮的强度计算问题。

在讨论中，许多同志认为，接触强度计算方法，最好仍以苏联费加金（Р. В. Федякин）的计算公式为基础，根据试验数据加以补充和修正。

关于弯曲强度计算方法，文百行在论文中提出应按实际断口形状出发考虑，这一意见得到了代表们的重视，希望能深入地进一步研究。

在欧宗瑛的论文中，从理论上探讨了圆弧齿轮的动载荷计算方法。

陈貞祥的論文，对現有苏联公开发表的一些强度計算方法，进行了总结、分析和簡化，对于圓弧齿輪的强度研究提供了不少方便。

由于欧宗瑛和陈貞祥未出席會議，所以会上沒有对他們的論文进行討論。

(三)

會議討論了有关系列圓弧齿輪減速器設計問題，李长春的論文对于第一机械工业部所拟的系列草案作了說明。經過討論大家认为，这个草案基本上反映了国内各单位系列設計的經驗和实际工业試用的成績，是符合我国目前实际情况和技术水平的較为妥当可靠的方案。

会上代表們对于系列設計方案的进一步改进方向提出了不少有价值的意見，并展开了热烈的爭辯。

朱景梓教授提出應該采用較大的重合系数 ε ，建議在可能的条件下取为 $\varepsilon = 1.5$ 左右。刘士品的論文也表示了类似的意見。

另一个爭辯的焦点是模数和中心距的比值 $\frac{m}{A}$ 。在系列标准草案中选用的是 0.02，但項昌期等认为應該取成 0.025，以增强抗弯曲强度，从而可以充分發揮圓弧齿輪的最大潜力。

在討論中，大家认为，增加重合系数固然对于工作平稳性可能有些好处，但是如果为了增加 ε 而增加齿寬則将徒然浪費材料，如果增大螺旋角則对于軸承寿命有显著影响。对于項昌期等所提出的 $\frac{m}{A} = 0.025$ 的方案，大家初步认为在工作利用系数（ $\Pi B\%$ 值）較低的情况下，可能使承載能力有显著提高。但是該系列方案中，中心距的系列按 $R40$ 排列，与生产习惯不符，会給生产和使用带来过大的变革和不便。尽管如此，但項昌期等的看法还是有一定价值的，應該进一步試驗研究，以期作出更恰当的判断和正确的結論。

在圓弧齿輪参数選擇問題上，不少同志认为目前在高速傳动中采用大重合系数（人字齿輪每边的重合系数 ε 值大于 2 或 3）的設計是适当的。这样，能使同时参加工作的齿数增多，能使載荷作用位置沿軸向的变动减少，从而对傳动工作平稳性有利。但是必須指出，制造精度必須有相应的提高，否則将不能达到預期的效果，甚至反而不利。

考虑到目前各类产品都正在开始进行定型化工作，圓弧齿輪通用減速器（系列）仅仅是产品中的构件之一，必須与产品配套。因此，希望有关单位加速进行試制、試驗和鑑定工作，把系列作为标准肯定下来，供給有关設計部門选用。

关于啮合理論

年会所收到的論文中涉及啮合理論方面的有十余篇，其中专题論述圓弧齿輪啮合理論的有五篇。在这些論文中，对圓弧齿輪齿面的性质和特征及相对曲率問題进行了比較全面的深入討論。

在苏联諾維柯夫（М. Л. Новиков）的論文中，只一般地提出了点啮合原理，对于实用的齿輪，只提出了端面为圓弧齿形这样一种具体方案。但目前所推广的却是以法向为圓弧齿形的滾刀所加工的圓弧齿輪，这与原来的方案已經不同，應該在啮合理論方面加以补充和发展。会上对于这个問題展开了热烈的爭辯。

用圓弧作为齿形曲线的想法在很早以前就已经有人提出过了，其中著名的有在1922年提出的英国 V. B. B. 制度的圓弧齿輪，在三十年代也曾經有人做了不少試驗，証實了做成凸、凹齿以后，承載能力可以显著提高。但由于沒有摆脱綫嚙合制的思想束縛，因而对制造誤差的敏感性大，容易折断，而在生产中沒有得到实际应用。諾維柯夫所提出的圓弧齿輪摆脱了綫嚙合制的限制，建立了点嚙合制，且允許端面重合系数等于零，即使在跑合以后也只能为一很有限的数值，因而可以使凸、凹齿的齿形圓弧半径有一定的差值，从而得到具有在某种实用范围内已經能满足需要的中心距可分离性。如果局限于綫嚙合制齿輪傳动的嚙合原理范围之内，是不会找出这条出路的。

点嚙合原理比綫嚙合原理具有更大的概括性，綫嚙合制从实质上說来可以看作是点嚙合原理中的一个特例。有些同志指出，在一定条件下，点嚙合制的齿輪可以轉化成綫嚙合傳动，而綫嚙合制的齿輪也可以轉化成特殊的点嚙合傳动。

諾維柯夫在他的論文里早已指出点嚙合制齿輪可以用两种途徑来建立，一种是以接触迹綫为基础，一种是以改进了的奥利佛包絡原理为基础。他认为用前一种方法具有普遍意义，而后者只是其中的特例。

以接触迹綫为基础，可以按实用观点先規定出瞬时嚙合点运动軌迹，然后可以在通过接触迹綫的許多曲面中自由地选择最簡單而性能又最好的作为共軛齿面，只要它們的几何特性滿足規定的三个条件。

用經典的包絡原理所得出的是綫嚙合制齿輪，如果作某些修改也能得出点嚙合制的齿輪；給定两个（而不是一个）有一定关系的輔助的曲面（例如用两个相切的基本齿条），用它們分別包絡出的两个輪齿曲面彼此可以正确嚙合傳动。

以接触迹綫为基础来建立点嚙合制齿輪，有利于探求在各方面更为有利的曲面作为齿面；以包絡原理为基础建立点嚙合制齿輪的方法則比較适应于目前的工艺条件（例如滾齿、磨齿等），易于建立明确的工艺嚙合关系，对于刀具的設計等較為方便。

也有同志对于“以接触迹綫为基础，容易从工程的实用观点来选择共軛曲面”的看法，表示不能完全贊同。例如，对于圓弧曲綫錐齿輪來說，如果用接触迹綫出发来分析齿面的特性，就远远不如預先規定銑刀盘运动輔助曲面，用包絡原理进行分析来得方便，在研究共軛曲面的曲率干涉問題上也增加了不少困难。但也有同志指出在寻求圓弧齿輪剃齿刀齿形曲綫問題上，也許还是要从接触迹綫为基础出发比較适当。

最后，大家覺得两种方法各有其特色与发展前途，研究时应同时并重。

至于圓弧齿輪之所以具有很高的承載能力（指接触强度）的原因，大家都一致认为是由于所选择的齿形是一凸一凹，彼此相配齿面相对曲率很小（即相对曲率半径很大）所致。但有的同志认为現有圓弧齿輪在跑合之前，齿面間的相对曲率已經比漸开綫齿輪小得多，业已具有强度高的性能；而跑合以后，相对曲率更进一步减小，圓弧齿輪的接触强度則更显著地提高了。也还有同志持有这样的看法：在跑合以后，圓弧齿輪实际上已經轉化成綫嚙合，只是瞬时接触綫不像漸开綫那样沿齿寬方向分布，而是沿着齿高方向分布，即圓弧齿輪的最大优点要在轉化成綫嚙合傳动以后才能充分發揮。这样，就可以看成在理論上以綫嚙合制为基础，只是为了补偿制造与安装中的誤差，才不得已使齿形半径有一个差值。这种提法，更能反映圓弧齿輪承載能力提高的原因。同时，还可以使齿輪的嚙合原理

和加工工艺的理論用一致的概念来描述，既方便而且更易于为人們所理解。

但是主張圓弧齒輪仍舊應該以點嚙合理論为基础的同志表示不能接受这种观点。他們指出，就加工工艺而論，現有的加工方法中最常用的滾齒、插齒、刨齒和磨齒，固然是以包絡为其工作原理的，但也有用片銑刀和指狀銑刀来加工大模數圓弧齒輪的，如果要以圓弧原始齒條作为圓弧齒輪的理論基础，則这些刀具的齒形就会变得相当复杂，而实践却表明只須做成簡單的圓弧形就可以了；又如对于插制的圓弧齒輪能否与滾齒的圓弧齒輪配对（或者其他两种不同加工方法所得的齒輪），这也不是綫嚙合制所能完滿地答复的。因此从工艺上来看，也还是應該把圓弧齒輪的嚙合理論建立在點嚙合制的基础上。

討論进行得非常热烈，澄清了某些观点，例如不能把理論上的點接觸、綫接觸与物理意义上齒面受到載荷变形以后的局部面接觸混为一談。通过爭辯双方的論点都摆了出来，虽然最后意見还不能統一，但大家都感到收获很大，有助于进一步深入开展研究工作。

关于計量和檢驗

关于圓弧齒輪計量和檢驗方面的論文共五篇。这些論文反映了圓弧齒輪进入成批生产后对于計量工作所提出的要求，初步探討了各种誤差的起因和它們对于傳动质量的影响。

經過討論补充后，大家同意推荐試用丁淳在論文中所提出的檢驗方案，圓弧齒輪的測量項目規定为：（1）公法綫尺寸、齒根圓尺寸、齒深；（2）相邻周节最大差数、周节积累誤差、齒圈跳動量；（3）軸向齒距偏差、齒向偏差（導程偏差）、齒面波度等九項，另外將齒厚列为公法綫尺寸的代替項目，用于大模數及大直徑齒輪。應該在前三項中選擇一項或兩項作为生产檢驗項目，其他項目用于定期檢驗。

會議对于上海量具刃具厂試制并經過实际使用成功的四种圓弧齒輪量具，表示滿意。认为这些量具，对于巩固和提高圓弧齒輪的制造质量是个有力的保証，希望他們列为正規产品供应各有关单位。

測量尺寸的計算方法，在刘健、李华敏与張希康等的論文中从不同的观点得出了相同的結果，會議建議加以綜合和簡化，提出推荐的計算卡片。并希望能进一步将有关的測量尺寸編成手冊，供生产单位查用。

會議討論了圓弧齒輪对于切齒深度和中心距偏差的敏感性問題，认为這一問題与原始齒廓参数的選擇有关（主要因素是兩齒廓的半徑差 Δr 的大小），有人主張对于低精度等級的圓弧齒輪規定不同的原始齒廓，將 Δr 增加为 $0.2m$ 。在丁淳、張希康和沈蘊方等的論文中，提出用改变切齒深度的办法来补偿中心距偏差，就可以允許齒輪箱中心距有正偏差。这个研究結論是正确的。这样，机械工业通用标准机标（JB）179-60的圓柱漸開綫齒輪傳动公差标准中，对于中心距規定的公差数值，也可以适用于圓弧齒輪傳动。因此，大家认为，圓弧齒輪减速器的箱体可以和漸開綫齒輪通用。這一結論，对于圓弧齒輪的生产和进一步推广都带来了很大的方便。

关于制訂圓弧齒輪傳动公差标准問題，在生产中已反映出有迫切的需求，建議有关单位协助工厂在积累各項測量数据的基础上，着手制定試用的工厂标准。

平行軸點啮合圓柱齒輪傳動的啮合原理

浙江大學 叶显標

內容提要

本文利用研究平面啮合的一般方法，对平行軸點啮合（諾維柯夫啮合）圓柱齒輪傳動的空間啮合理論，作了較为深入的分析 and 探討，并作出結論：分別通过主动輪和从动輪上的接触綫所作的两个螺旋曲面，只要满足下述三个条件，就可以作为共軛齿面。

- 一、两个端面齿廓当处在啮合位置时必须彼此相切而不應相交；
- 二、两个端面齿廓当处在啮合位置时必须符合啮合基本定律；
- 三、两个端面齿廓当处在啮合位置时必须分別在其包絡的兩側而不能同在一側。

这里所謂[两个端面齿廓]是指两个螺旋曲面与任一垂直于齒輪軸綫的平面之間的交綫。

本文論述主要以點啮合的一般情况为依据，但为了探討提高點啮合齒輪傳動承載能力的途徑，在結語时也針對綫啮合的特殊情况（點啮合的极限情况）进行了討論。

本文将奧利佛-高赫曼关于构成共軛齿面的理論和欧拉-沙伐尔关于齿廓曲率与瞬心綫曲率的关系方程式在點啮合齒輪傳動中加以推广应用。

（一）引言

为了在平行軸間得到傳动比不变的齒輪傳動，工程上通常应用直齿、斜齿或人字齿圓柱齒輪。对于直齿圓柱齒輪傳動來說，为了满足运动学和动力学的要求，齒輪付的端面齿廓无疑地必须符合奧利佛-高赫曼的互为包絡关系的理論，齿廓曲率半徑与齒輪节圓半徑之間的关系必须满足欧拉-沙伐尔方程式。但对于斜齿及人字齿的圓柱齒輪傳動來說（这种齒輪的齿面是螺旋曲面），情况并不如此。然而这个事实早先并没有引起人們的注意，相反地，許多人的思想长期地受到奧利佛-高赫曼理論和欧拉-沙伐尔方程式的束縛，因此，使关于提高齒輪承載能力和相应的新啮合原理的研究工作一直没有取得显著的成效。

諾維柯夫首先注意到：对于斜齿和人字齿圓柱齒輪傳動，其端面齿廓不一定要具有互为包絡的关系，或者說，它們不一定要满足欧拉-沙伐尔方程式，而仍能得到傳动比不变的傳動。受到上述現象的启发，于是諾維柯夫創立了大功率傳動用的點啮合新理論，并根据这个新的啮合理論大胆地建議采用按旧的啮合理論看来是不可能采用的圓弧齿廓。无数實踐証明这种新型齒輪傳動的承載能力比渐开綫齒輪傳動的高好几倍，啮合損耗也大大降低了。諾維柯夫的这一发明創造已經在全世界引起普遍的重視，我国自1959年广泛开展学习和試制以后，在齒輪制造业中掀起了一場規模巨大的技术革命，其经济效益实难以估量。然而諾維柯夫齒輪（在我国也称为圓弧齒輪）从发明到現在不过几年時間，对它的研究工作还进行得很不够，其潜在能力显然还没有完全被发掘出来，因此，繼續对它进行理論研究和实际試驗是完全必要的。

（二）啮合原理概述

現在以諾維柯夫提出的构成共軛齿面的新方法为基础，在一定程度上引用旧的啮合理

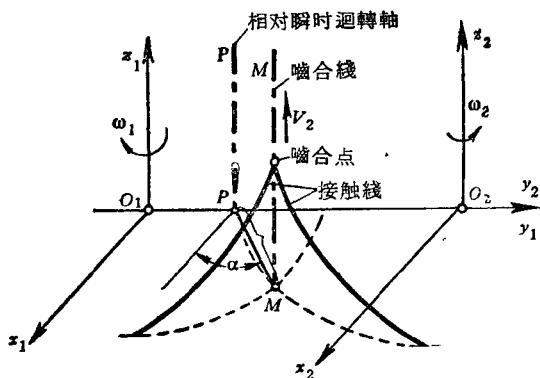


图 1

論，并按照作者本人的見解，將平行軸點啮合圓柱齒輪傳動共軛齒面的設計方法及其理論根據介紹如下：

為了使所設計的齒面能夠盡量滿足預定的要求，我們可以遵循諾維柯夫的建議，首先從工程上的實用觀點出發來給定啮合點在齒輪軸所決定的固定空間的運動規律。為了使傳動獲得良好的工藝特性和動力學特性，換句話說，使齒輪易于切削加工、保證齒面有足夠的接觸強度和防止

過度磨損等等，通常我們使啮合點在固定空間中沿平行於相對迴轉瞬時軸 PP 的直綫 MM 以等綫速度 V_2 移動（見圖 1），同時，啮合綫 MM （即啮合點在固定空間中的軌跡）與相對迴轉瞬時軸 PP 之間的相對位置必須選擇得當。

在這種情況下，啮合點在齒輪 1 和齒輪 2 上的軌跡（即接觸綫）是兩條方向相反的（亦即一條是右旋的，另一條是左旋的）螺旋綫（見圖 1）。如果齒輪 1 和齒輪 2 的角速度各為 ω_1 和 ω_2 ，則其螺旋參數分別為

$$p_1 = \frac{V_2}{\omega_1} \quad \text{和} \quad p_2 = -\frac{V_2}{\omega_2},$$

則傳動比 $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p_2}{p_1}$ 。

因此，對於這種空間點啮合制的齒輪傳動來說，為獲得所需的傳動比，必須使其接觸綫的螺旋參數與角速度成反比。

齒面必須包含接觸綫，因此，從工程上的實用觀點來看，在這種情況下，齒面只能是螺旋曲面。這就是說，所論的圓柱齒輪傳動必須具有斜齒或人字齒。

現在我們來研究：通過這些螺旋綫所作的螺旋曲面要符合哪些條件才能作為共軛齒面，換句話說，這些螺旋齒面必須符合哪些條件才有可能按預期的傳動比工作，並能保證啮合綫處在原定的位置上。

對平行軸螺旋齒圓柱齒輪傳動來說，兩共軛齒面在軸向並沒有相對運動，同時，它們在不同端面上（即與軸綫垂直的截面上）的情況又是完全相同的，只是角向位置有差異和啮合時間有先後而已。因此，在這種特殊情況下，空間啮合理論的研究工作可以大大簡化：在保證齒面螺旋參數符合傳動比要求的前提下，基本上只要應用平面啮合中的一般方法來對某一對端面齒廓（即共軛齒面與某一垂直於軸綫的平面之間的交綫）進行研究就可以解決問題。

對平行軸點啮合圓柱齒輪傳動來說，在某一端面上，啮合點的軌跡退化為一點（這與一切綫啮合制齒輪傳動有本質上的區別），這一點就是啮合綫與該端面的交點（即圖 2 中的 M 點）。端面齒廓只有經過這一點時才相互接觸，因此，主動齒廓對從動齒廓的推壓動作也只有在那瞬間才發生，而連續傳動的任务是依靠在不同端面上的無數對齒廓相互配合依次工作來完成的。由此可見，每一對端面齒廓都必須負擔傳動任务，因此當它們處在啮合位置時就必須符合啮合基本定律，這就是說，它們在啮合點的公法綫必須通過節點（即

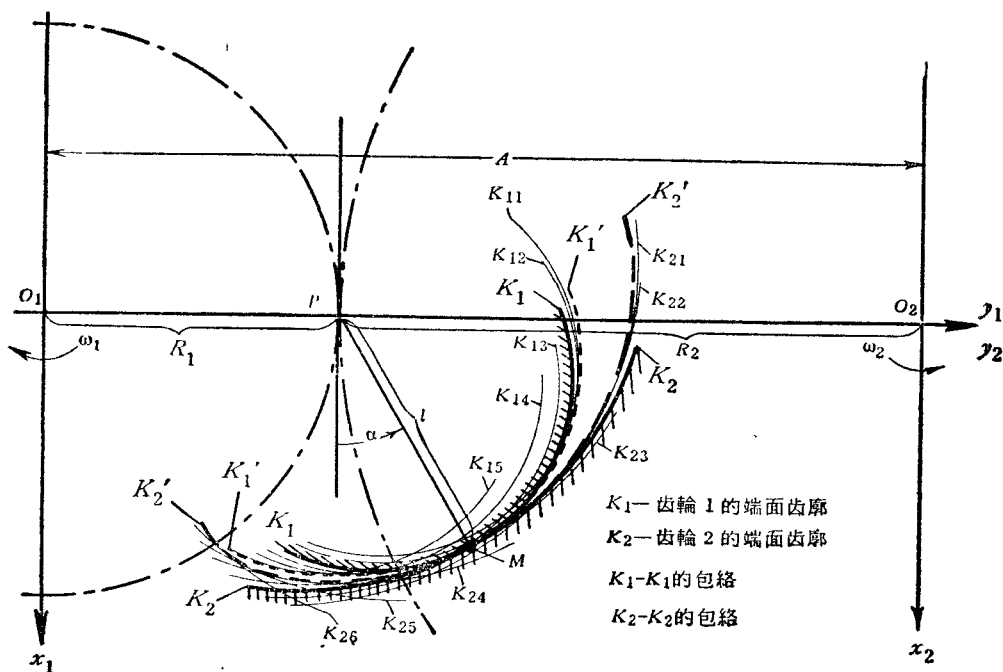


图 2

相对迴轉瞬時軸與齒廓所在端面的交點)。但是，在另一方面，我們又必須注意到，任一對端面齒廓的傳動任務都是瞬時完成的，因此它們彼此之間並不要求具有互為包絡的關係（這與一切綫嚙合制圓柱齒輪傳動有本質上的區別）。在這裡應該指出：雖然一對齒廓當它們的理論曲綫相交時（即兩個輪齒稜邊接觸或者一個輪齒稜邊與另一個輪齒齒面接觸），也可以傳遞運動，但為了保證必要的齒面接觸強度，我們應該要求：端面工作齒廓必須是光滑的曲綫，當它們處在嚙合位置時必須彼此相切而不應相交。

下面我們研究共軛齒面在工作過程中不發生干涉的條件：上面已經提到，就平行軸傳動而論，由於兩共軛齒面並沒有沿軸向的相對運動，則分別在不同端面上的局部齒面之間，就不存在彼此干涉的問題。因此，在這種情況下，只要研究某一端面上的一對齒廓的干涉現象就夠了。雖然乍然看來，為判定是否發生干涉需要分析兩種情況：

- （1）在某一個瞬間，在所有端面上的兩個齒廓的相對位置；
- （2）在某一端面上，兩個齒廓在工作過程中一系列的相對位置。

但是，由於所論齒輪的齒面是螺旋曲面，研究第二種情況也就包含對第一種情況的研究。而第二種情況又可轉化為任一端面齒廓與另一個端面齒廓底包絡之間的相對位置關係（例如圖 2 中， K_2 與 K_1' 的關係，或者 K_1 與 K_2' 的關係）。這樣，防止齒面發生干涉的條件就可以歸結為：兩個端面齒廓當處在嚙合位置時，必須分別在其包絡的兩側而不能同在一側。

這裡「包絡」的含義是：假定齒輪付中的某一個齒輪不動，使另一個齒輪對它作相對運動，由動齒輪上的齒廓所產生的軌跡（參考圖 2 及圖 3）。

在這裡必須指出，在求包絡時必須注意到被包絡的界限（即觀察是否發生干涉時只需考慮端面齒廓的工作部分而不必考慮整個理論齒廓曲綫）。

綜上所述，通过接触綫所作的两个螺旋曲面，只要滿足三个条件，就可以作为共軛齿面并能保証啮合綫处在已經取定的位置。这些条件是：

一、两个端面齿廓必須是光滑的曲綫，当它們处在啮合位置时必须彼此相切而不应相交；

二、两个端面齿廓当处在啮合位置时，其在啮合点的公法綫必須通过节点；

三、两个端面齿廓当处在啮合位置时，必須在其包絡的兩側而不能同在一側。

第一个条件是为了保証必要的齿面接触强度；第二个条件再加上齿面螺旋参数与角速度成反比的条件是为了获得給定的傳动比；第三个条件是为了防止干涉。

这里必須指出，当第三个条件得到滿足时，第一个和第二个条件必然会得到滿足，換句話說，前面两个条件已經被包含在最后一个条件之中。虽然如此，但作者从齿廓設計的实用观点出发认为仍有必要把它們相提并論。关于这一点将会在下一节中得到論証和說明。

(三) 有关分析理論的探討

茲将上述条件的理論根据和齿廓設計方法用分析法进一步探討如下：

将两个直角坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 和 $O_2x_2y_2z_2$ 分別固定在齿輪 1 和齿輪 2 上，并使 z_1 軸和 z_2 軸重合于齿輪軸。設傳动开始工作的瞬間，在 $z_1 = z_2 = 0$ 的端面上两个齿廓 K_1 与 K_2 处在啮合位置且 y_1 軸和 y_2 軸在該瞬間的位置重合（如图 2 所示）。現在我們就研究这个端面上的情况。

若已知傳动比 $i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ 和中心距 A ，則节圓半徑 R_1 和 R_2 可用下列公式求出：

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{A}{i+1} \\ R_2 &= \frac{iA}{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

因而节点 P 的位置可以决定。

当移距 l 和端面啮合角 α 选定后，啮合点 M 的位置可以确定。过 M 点分別作齿輪 1 和齿輪 2 的端面齿廓 K_1 和 K_2 。如前所述，为保証必要的齿面接触强度， K_1 和 K_2 應該是光滑的曲綫并应在啮合点 M 相切。为了获得給定的傳动比， K_1 和 K_2 應該在啮合点和 PM 正交（这里 PM 是节点和啮合点之間的联綫）。

K_1 和 K_2 的相对位置应根据这样的原則来取：使它們分別靠近各自的輪心。如果啮合点的位置如图 2 所示，則 K_1 应在 K_2 之上。

按上述条件作出的齿廓帶有很大程度的試探性，为了判断其是否可以作为共軛齿面，必須檢驗它們在工作过程中是否会发生干涉。

为此我們必須求出其中一个齿廓的包絡（最好对凸齿齿廓求包絡）。

为了有利于計算，我們在所論的端面上取两个极坐标系 ρ_1 、 θ_1 和 ρ_2 、 θ_2 分別固定在齿輪 1 和齿輪 2 上。設傳动开始工作的瞬間，两个极点都与节点重合，两个极軸彼此重合并与 x_1 及 x_2 軸的方向一致。

設齿輪 1 的端面齿廓 K_1 关于极坐标系 ρ_1 、 θ_1 的方程式为

$$\rho_1 = \rho_1(\theta_1) \quad (2)$$

設齒輪 2 的端面齒廓 K_2 关于极座标系 ρ_2 、 θ_2 的方程式为

$$\rho_2 = \rho_2(\theta_2) \quad (3)$$

从图 3 可以看出, K_1 关于直角坐标系 $x_1O_1y_1$ 的方程式为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= \rho_1 \sin \theta_1 + R_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

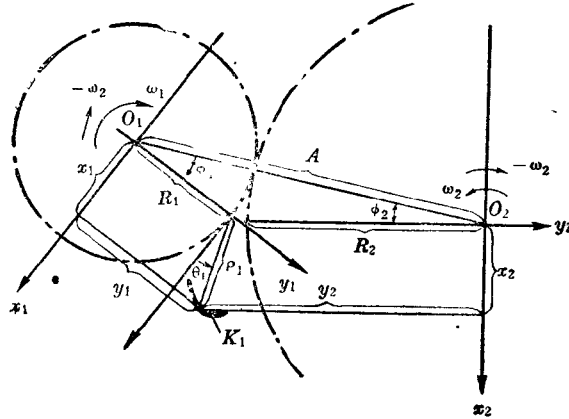


图 3

为了求 K_1 的包絡 K'_1 , 我們使齒輪 2 不动而使齒輪 1 对于齒輪 2 作相对运动, 則經過時間 t 之后, 两个齒輪的相对位置如图 3 所示。图中 ϕ_1 及 ϕ_2 均为角位移, 其值为

$$\phi_1 = \omega_1 t; \quad \phi_2 = \omega_2 t.$$

利用图 3 可以求出 K_1 关于直角坐标系 $x_2O_2y_2$ 的方程式:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos(\phi_1 + \phi_2) + y_1 \sin(\phi_1 + \phi_2) - A \sin \phi_2 \\ y_2 &= -x_1 \sin(\phi_1 + \phi_2) + y_1 \cos(\phi_1 + \phi_2) - A \cos \phi_2 \end{aligned} \right\}$$

代以 $\phi_1 = i\phi_2$ 及 (4) 式, 并經過轉化得

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \rho_1 \cos[(i+1)\phi_2 - \theta_1] + R_1 \sin[(i+1)\phi_2] - A \sin \phi_2 \\ y_2 &= -\rho_1 \sin[(i+1)\phi_2 - \theta_1] + R_1 \cos[(i+1)\phi_2] - A \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

方程式 (5) 对于 ϕ_2 的每一个固定值表示一平面曲綫, 而且 这条平面曲綫在坐标系 $x_2O_2y_2$ 内处在某一个固定的位置, 当 ϕ_2 取不同的值时, 即得到无限多的曲綫 (例如 图 2 中的 K_1 、 K_{11} 、 K_{12} 等等), 其全体組成曲綫族。

下面我們来求曲綫族 (5) 的包絡 K'_1 的方程式:

由于包絡上的每一点总有族中某一曲綫与其相切, 因此有下列等式:

$$\frac{\frac{\partial Y_2}{\partial \theta_1}}{\frac{\partial X_2}{\partial \theta_1}} = \frac{\frac{dY_2}{d\phi_2}}{\frac{dX_2}{d\phi_2}}$$

上式左端表示族中曲綫在特征点 (即族中曲綫与包絡的切点) 的斜率, 右端表示包絡的斜率。这里必須注意: 在求族中某一曲綫的斜率时, 应把 (5) 式中的 θ_1 当作独立参变量而把 ϕ_2 看作是某一固定的值; 在求包絡的斜率时, 应把 ϕ_2 当作独立参变量而把 θ_1 看作是 ϕ_2 的函数。因此, 上式也可以写成

$$\frac{\frac{\partial Y_2}{\partial \theta_1}}{\frac{\partial X_2}{\partial \theta_1}} = \frac{\frac{\partial Y_2}{\partial \theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{d\phi_2} + \frac{\partial Y_2}{\partial \phi_2}}{\frac{\partial X_2}{\partial \theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{d\phi_2} + \frac{\partial X_2}{\partial \phi_2}}$$

簡化之得

$$\frac{\partial Y_2}{\partial \theta_1} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial \phi_2} = \frac{\partial Y_2}{\partial \phi_2} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial \theta_1}$$

代以(5)式的偏导数,并考虑到(1)式中 R_1 与 A 的关系,得到

$$R_1 \rho_1 [\cos \theta_1 - \cos(i\phi_2 - \theta_1)] + \rho_1 \rho'_1 + R_1 \rho'_1 [\sin \theta_1 + \sin(i\phi_2 - \theta_1)] = 0 \quad (6)$$

式中 $\rho'_1 = \frac{d\rho_1}{d\theta_1}$ 。

联立方程式(5)和(6)即为包络 K'_1 的方程式。

在前面我們曾經預設,当傳动开始工作的瞬間(即 $t=0$,因而 $\phi_1=\omega_1 t=0$ 及 $\phi_2=\omega_2 t=0$),在所論端面上的两个齿廓处在啮合位置,因此,相当于 $\phi_2=0$ 的族中曲綫(即图2中的 K_1)的特征点应该就在 K_1 的接触点($\rho_1=l$ 、 $\theta_1=\alpha$)。这就是說,为了使 K'_1 通过啮合点(这是防止干涉的必要条件),則 $\phi_2=0$ 、 $\theta_1=\alpha$ 及 $\rho_1=l$ 必須滿足(6)式,由此得到

$$\rho'_1 = 0 \quad (7)$$

因当 $\phi_1=0$ 及 $\phi_2=0$ 时极点与节点重合,故(7)式的物理意义就是端面齿廓 K_1 当处在啮合位置时,其在接触点 M_1 的法綫必須通过节点 P 。同理,

$$\rho'_2 = 0 \quad (8)$$

这里 $\rho'_2 = \frac{d\rho_2}{d\theta_2}$, 意即端面齿廓 K_2 当处在啮合位置时,其在接触点的法綫也必須通过节点 P 。

这就是說, K_1 与 K_2 在啮合点必須相切,且其公法綫必須通过节点(此即啮合基本定律)。

由此可見,如果齿廓不干涉的条件得到了滿足,則齿廓在啮合点相切及其公法綫通过节点的两个条件必然会得到滿足。但考虑到后两条件对齿廓設計很有帮助,故作者认为仍有必要把它們同时列出。

为了进一步研究两个端面齿廓 K_1 与 K_2 在啮合点的微分邻域內不发生干涉的条件,我們必須求出 K_1 与 K_2 分別在其接触点的曲率半徑 r_1 和 r_2 的关系式。

如果曲率半徑的符号根据这样的原則来取:即对于 K_1 ,当其向靠近节点的方向弯曲时(如图4所示),其曲率半徑取正值,反之取負值;对于 K'_1 ,当其向远离节点的方向弯曲时(如图4所示),其曲率半徑取正值,反之取負值,則从微分学知道:

K_1 上任意点的曲率半徑 ρ_{K_1} 可用下式来求

$$\rho_{K_1} = \frac{(\rho_1^2 + \rho_1'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2 + 2\rho_1'^2 - \rho_1\rho_1''} \quad (9)$$

这里

$$\rho_1'' = \frac{d^2\rho_1}{d\theta_1^2}。$$

在上式中令 $\theta_1=\alpha$ 、 $\rho_1=l$ 及 $\rho'_1=0$,則得到 K_1 在其接触点的曲率半徑:

$$r_1 = \frac{l^2}{1 - \rho_1''} \quad (10)$$

包絡 K'_1 上任意点的曲率半徑 $\rho_{K'_1}$ 可用下式来求:

$$\rho_{K'_1} = \frac{\left[\left(\frac{dx_2}{d\theta_1} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{d\theta_1} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx_2}{d\theta_1} \cdot \frac{d^2y_2}{d\theta_1^2} - \frac{dy_2}{d\theta_1} \cdot \frac{d^2x_2}{d\theta_1^2}} \quad (11)$$

对 (5) 式微分可以得到 $\frac{dx_2}{d\theta_1}$ 、 $\frac{dy_2}{d\theta_1}$ 、 $\frac{d^2x_2}{d\theta_1^2}$ 、 $\frac{d^2y_2}{d\theta_1^2}$ 的数值, 把它们代入 (11) 式, 并注意到在啮合点 $\phi_2 = 0$ 、 $\theta_1 = \alpha$ 、 $\rho_1 = l$ 及 $\rho'_1 = 0$, 则得到 K'_1 在啮合点的曲率半徑:

$$r'_1 = - \frac{l^2 \left[(i+1) \frac{d\phi_2}{d\theta_1} - 1 \right]^2}{l \left[(i+1) \frac{d\phi_2}{d\theta_1} - 1 \right]^2 + iA \sin \alpha \left(\frac{d\phi_2}{d\theta_1} \right)^2 - \rho_1''} \quad (12)$$

对 (6) 式微分, 并令 $\phi_2 = 0$ 、 $\theta_1 = \alpha$ 、 $\rho_1 = l$ 及 $\rho'_1 = 0$, 得:

$$\frac{d\phi_2}{d\theta_1} = \frac{\rho_1''}{iR_1 \sin \alpha}$$

将此式代入 (12) 式并令 $A = (i+1)R_1$, 则:

$$r'_1 = - \frac{l^2 \left[(i+1) \frac{\rho_1''}{iR_1 \sin \alpha} - 1 \right]^2}{l \left[(i+1) \frac{\rho_1''}{iR_1 \sin \alpha} - 1 \right]^2 + iR_1 \sin \alpha \rho_1''} \quad (13)$$

在 (10)、(13) 两式中消去 ρ_1'' , 得:

$$r'_1 = -l + \frac{1}{\frac{i+1}{iR_1 \sin \alpha} - \frac{1}{r_1 - l}} \quad (14)$$

$$\text{或} \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \left(\frac{1}{r_1 - l} + \frac{1}{r'_1 + l} \right) \sin \alpha \quad (14a)$$

此即欧拉-沙伐尔方程式, 它的几何意义可以利用图 4 予以说明:

设 B_1 为齿廓 K_1 在啮合点 M 的曲率中心, B'_1 为 K'_1 在啮合点 M 的曲率中心, PD 为通过节点 P 并垂直于公法线 nn 的直线。则欧拉-沙伐尔方程式的几何意义就是: 两条联心线 O_1B_1 与 $O_2B'_1$ 的交点 D 必在 PD 直线上。

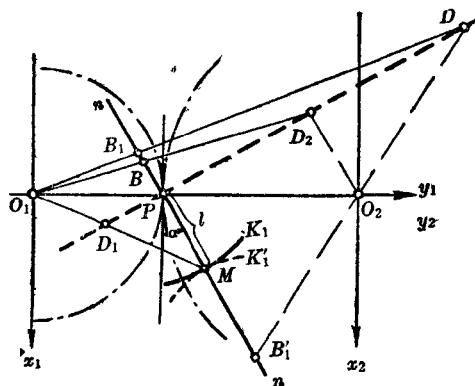


图 4

设 D_1 为 O_1M 与 PD 的交点, 则当联心线交点在 D_1 的位置时, $r_1 = 0$; 设 D_2

为通过 O_2 而平行于 nn 的直线与 PD 的交点, 则当联心线交点在 D_2 的位置时, $r'_1 = \infty$ 。为了增大端面齿廓的诱导曲率半径以提高齿面的接触强度, 应把一个齿轮的轮齿做成凸的, 另一个齿轮的轮齿做成凹的。为了达到这个目的, 必须把联心线交点限制在 D_1 与 D_2 之间, 换句话说, 必须把齿廓 K_1 在啮合点的曲率中心的位置限制在 M 与 B 之间 (这里 B 是 O_1D_2 与 nn 的交点), 因为只有在这种情况下 K_1 和 K'_1 的弯曲方向相同 (都弯向节点) 而且在啮合点的微分邻域内 K_1 位于 K'_1 之上, 这样才有可能把齿轮 1 的齿做成凸的, 把齿轮 2 的齿做成凹的。

在上述情况下, 为使两个齿廓在接触点的微分邻域内彼此不发生干涉, 下列关系式应得到满足: