

研究生教育书系
信息与电子学科

数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

(Second Edition)

(第二版)

王一平
陈逢时 编著
傅德民



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

研究生教育书系
信息与电子学科

数 学 物 理 方 法

(第二版)

Methods of Mathematical Physics
(Second Edition)

王一平 陈逢时 傅德民 编著

電 子 工 業 出 版 社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是为理工科院校研究生应用数学课程编写的基础教学用书,是在使用过十年的教材基础上修订而成的。全书共分7章,包括微分几何(含张量简述)、线性空间、变分法、渐近方法、格林函数、积分方程和小波变换。

本书可供理工科院校相关学科的本科生高年级及研究生的教学内容选用,也可供广大理工科院校的教师和科技工作者参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/王一平,陈逢时,傅德民编著. —2版. —北京:电子工业出版社,2006.1
(研究生教育书系)

ISBN 7-121-02203-6

I. 数... II. ①王...②陈...③傅... III. 数学物理方法—研究生—教材 IV. O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 001009 号

责任编辑:陈晓莉 特约编辑:李双庆

印 刷:北京天竺颖华印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×960 1/16 印张:26 字数:528 千字

印 次:2006 年 1 月第 1 次印刷

印 数:4000 册 定价:35.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

再 版 前 言

此次再版,对初版书中的个别段落和某些定理的证明过程做了删改,对文字、数学记号按新的国家标准做了纠正,全书的编写原则和结构未做改变。

根据目前本科生数学教学的实际情况,本次修订增加了微分几何、渐进方法两章;同时依据现代信号处理,图像处理技术的发展,又增加了小波变换一章。此外,修订时在例题、习题的选编时将特别注重数学方法与电磁学工程并重的原则。

增加的第7章小波变换由陈逢时教授负责选写。

全书共分7章,范围较宽,可供相关专业本科高年级及研究生导师依授课时数多少选用。

感谢北京航空航天大学理学院郭定辉教授对本书初版提出的修改意见和建议。

作 者

2005年6月于西安电子科技大学

前 言

本书是研究生应用数学课程的教学用书。数学物理方法是从 1983 年起单独设课的。最初只编写了一个提纲,后来撰写了讲义。1985 年 5 月又做过一次内部修订再版。现已成为“电磁场与微波技术”和“无线电物理”这两个学科的硕士研究生必修课的基本教材之一。本书主要讲述线性泛函的基本方法,但增加了对这两个学科来说必要的“微分几何”和“渐近方法”的内容。

在此次正式出版之前又对内容做了修改。其中前 3 章的修改由傅德民教授负责,后 3 章由陈逢时教授负责。最后由王一平教授对全书做了文字修订工作。

由于我们学识有限,错误或不当之处在所难免,望读者不吝指正。

作 者

1993 年 12 月于西安电子科技大学

目 录

第 1 章 微分几何	1
1.1 三维空间中的曲线	1
1.2 三维空间中的曲面	11
1.3 曲面的第一、二基本形式	20
1.4 曲面的曲率	26
1.5 测地线	39
1.6 张量简述	50
习题 1	64
第 2 章 线性空间	67
2.1 线性空间	67
2.2 线性变换	74
2.3 线性变换的本征值与本征向量	82
2.4 内积空间	85
2.5 正交化法	91
2.6 自伴算子	94
2.7 等距变换	98
2.8 正规变换的本征值与本征向量	99
2.9 平方可积函数空间	104
2.10 完备正交归一函数集	107
2.11 多项式逼近	112
2.12 完备正交归一集的例子	117
2.13 Sturm-Liouville 系统——正交多项式	125
附录 勒贝格积分(Lebesgue Integration)概念	133
习题 2	134
第 3 章 变分法	140
3.1 泛函和泛函的极值问题	140
3.2 最简泛函的欧拉方程	143
3.3 依赖多个函数的泛函	148
3.4 泛函的变分	150
3.5 重积分所表示的泛函极值问题	153

3.6	变动边界的变分问题	155
3.7	泛函的条件极值问题	163
3.8	变分问题的直接解法	171
3.9	微分方程边值问题的变分解	176
3.10	应用于本征值问题	179
3.11	用变分法求电磁波传输线特性阻抗	183
	习题 3	190
第 4 章	渐近方法	193
4.1	量级符号	193
4.2	渐近展开	195
4.3	渐近展开式的运算	200
4.4	积分的渐近展开式	204
4.5	最陡下降法	210
4.6	驻定相位法	216
4.7	常微分方程的渐近解	220
	习题 4	224
第 5 章	格林函数	226
5.1	格林函数的引入	226
5.2	格林函数与 δ 函数	232
5.3	一维格林函数	236
5.4	三维情形下的格林函数	244
5.5	在电磁学中的应用	249
5.6	径向格林函数	255
5.7	在衍射问题中的应用	263
5.8	与时间有关的格林函数: 一阶方程	268
5.9	波动方程	274
5.10	矢量方程与并矢格林函数	280
	习题 5	286
第 6 章	积分方程	290
6.1	基本概念	290
6.2	迭代法	292
6.3	算子的范数	294
6.4	巴拿赫空间中的迭代法	299
6.5	非线性方程的迭代法	303
6.6	可分核	308

6.7 普遍的有限秩核	311
6.8 全连续算子	316
6.9 全连续厄米算子	323
6.10 全连续算子的弗雷德霍姆择一定理	334
6.11 积分方程的数值计算	337
习题 6	341
第 7 章 小波变换	345
7.1 短时傅里叶变换	345
7.2 小波变换	349
7.3 小波框架和规范正交基	353
7.4 多分辨分析与塔形算法	357
7.5 小波表示	367
7.6 小波构造	375
7.7 小波包	389
7.8 离散时间小波变换与滤波器组	397
习题 7	404
参考书目	408

第1章 微分几何

微分几何是应用微积分方法研究几何图形的学科。在波的辐射、传播、散射和反散射中必然会遇到对物体的几何形状相近似的或准确的分析,而微分几何所阐明的概念和方法,在这一方面是一个有力的工具。本章重点讨论曲面理论的基本原理,最后简述张量的概念。

1.1 三维空间中的曲线

1.1.1 曲线的表示

一条空间曲线可直观地想象为一个质点的运动轨迹。在三维空间中,一个质点的位置可以用由该点所在的笛卡儿坐标 (x, y, z) 所表示的位置矢 $\mathbf{r}$ 来描述,即

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (1.1)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 分别表示在 x, y, z 增加方向的单位矢。当点运动时, x, y, z 是时间 t 的函数, 矢量 $\mathbf{r}$ 端点描绘出的轨迹就是曲线。从数学上讲, 空间曲线可定义为: 区间 (a, b) 上的点 t 在映射: $t \rightarrow (x(t), y(t), z(t))$ 下的像的集合(见图 1.1)。因此, 一条曲线可以看作是定义在 (a, b) 上的一个实矢量函数 $\mathbf{r}(t)$, 这里自变量 t 不一定表示时间。今后, 我们把曲线表示为如下形式

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} + z(t)\hat{\mathbf{z}} = [x(t), y(t), z(t)] \quad (1.2)$$

式中, t 称为曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的参数。按参数 t 增加的方向规定曲线的正向(见图 1.1)。定义了方向的曲线称为有向曲线。以后我们假定所研究的曲线 $\mathbf{r}(t)$ 至少是 t 的一阶连续可微函数。这与 $x(t), y(t), z(t)$ 至少是 t 的一阶连续可微函数是等价的。

如果 $\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t_0} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)_{t_0} \neq 0$, 则称 t_0 是 $\mathbf{r}(t)$ 的正则点, 否则称奇点。

如 t_0 是曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的正则点, 由其定义知, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 在 t_0 点不全为零, 不失一般性可设 $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} \neq 0$ 。由于假定了 $\frac{dz}{dt}$ 的连续性, 故在 t_0 附近一段 $\frac{dz}{dt} \neq 0$, 即 $\frac{dz}{dt}$ 在 t_0 邻近一般恒正或恒负。也就是说在 t_0 附近 z 是 t 的单调函数, 因而有单调反函数 $t = t(z)$ 。这表明在正则点 t_0 附近 t 与 $\mathbf{r}(t)$ 是一一对应的。

如果一段曲线上所有点都是正则点, 则此曲线被称为正则曲线。

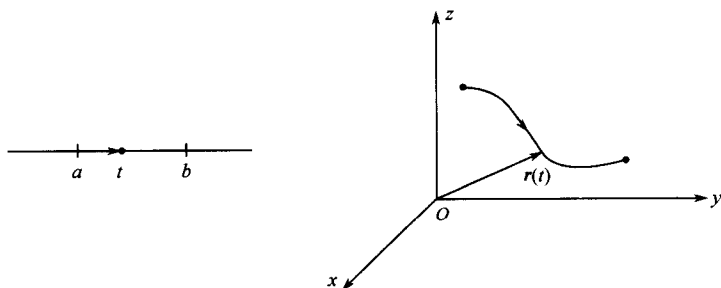


图 1.1 空间曲线

奇点一般是孤立的。如果在一段”曲线上 $\frac{dr}{dt}$ 恒等于零, 则 $r(t)$ 为常矢, 此“段”曲线收缩为一点。反之若 $\frac{dr}{dt}$ 在某点不为零, 则在此点附近一段上不为零(由于假定了 $\frac{dr}{dt}$ 的连续性)。这说明一段曲线上 $\frac{dr}{dt}$ 为零的点一般是孤立的, 即 $r(t)$ 一般是分段正则的。

例如, 半径为 a 、螺距为 $2\pi b$ 的圆柱螺线(如图 1.2 所示)

$$r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), (a > 0, b \neq 0, -\infty < t < \infty)$$

由于 $\frac{dr}{dt} = (-a \sin t, a \cos t, b) \neq 0$

故该曲线是 $(-\infty, \infty)$ 上的正则曲线。又如, 曲线(如图 1.3 所示)

$$r(t) = (t^3, t^2, 0), (-\infty < t < \infty)$$

由于 $\frac{dr}{dt} = (3t^2, 2t, 0)$

当且仅当 $t = 0$ 时为零, 即 $t = 0$ 是惟一的奇点。故该曲线是 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 上的正则曲线。

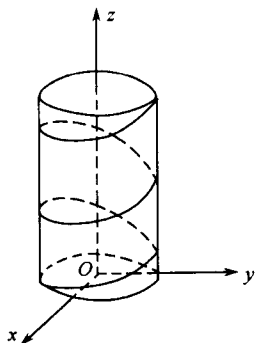


图 1.2 圆柱螺线

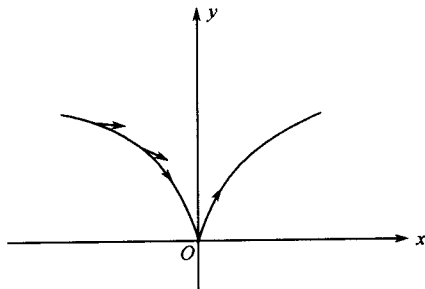


图 1.3 曲线的奇点

同一条曲线可有不同的参数表示式。事实上如曲线 C 为 $\mathbf{r}(t)$, 用 $t = t(t_1)$ 引入新的参数 t_1 , 则 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t(t_1)) = \mathbf{r}_1(t_1)$ 。这意味着 $\mathbf{r}_1(t_1)$ 也是 C 的一个参数表示式。为了保证 t 和 t_1 一一对应, 参数变换式 $t = t(t_1)$ 必须满足

$$\frac{dt}{dt_1} \neq 0$$

为了使 t 和 t_1 增加的方向均相应于曲线的正向, 则要求

$$\frac{dt}{dt_1} > 0 \quad (1.3)$$

(1.3) 式说明 t 是 t_1 的单调增函数, 从而 t_1 也是 t 的单调增函数, 故 $\frac{dt_1}{dt} > 0$ 。它可作为对参数变换式的一个等价要求。

曲线 C 上一点如取参数 t 时为正则点, 则在取参数 t_1 表示时也必是正则点。事实上, 因为

$$\frac{d\mathbf{r}(t_1)}{dt_1} = \frac{d\mathbf{r}[t(t_1)]}{dt_1} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt_1}$$

且 $\frac{dt}{dt_1} > 0$, 故 $\frac{d\mathbf{r}}{dt_1}$ 是否为零与 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 是否为零相等价。

对正则曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, 由微积分的知识, 可以得到曲线从参数 t_0 到 t 处的弧长为

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \quad (1.4)$$

其中 $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt} \right)^2}$ (1.5)

是曲线切矢量的长度。弧长是一个代数量, $t > t_0$ 时, $s(t) > 0$; $t < t_0$ 时, $s(t) < 0$, 弧长只依赖于曲线上所选取的点 P_0 和 P , 而与参数的选择无关。事实上, 设曲线 C 上的 P_0 在不同参数 t, t_1 选取下相应的参数值分别为 t_0 和 t_{10} , 与曲线上点 P 相应的参数分别为 t 和 t_1 。用 $s(t)$ 表示曲线从 t_0 到 t 的弧长, 而用 $s_1(t_1)$ 表示曲线从 t_{10} 到 t_1 的弧长, 在条件

$$\frac{dt}{dt_1} > 0$$

下, 有 $s_1(t_1) = \int_{t_{10}}^{t_1} \left| \frac{d\mathbf{r}[t(t_1)]}{dt_1} \right| dt_1 = \int_{t_{10}}^{t_1} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{dt_1} \right| dt_1 = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = s(t)$

弧长 s 是 t 的可微函数, 且

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

对正则曲线, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$, 故 $\frac{ds}{dt} > 0$. 于是可取弧长 s 作为表示曲线的新参数. 由

$$1 = \frac{ds}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|$$

知, 用弧长为参数时, 切矢量 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 为一单位矢量. 反之, 当曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的切矢量 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 为单位矢量时, 由(1.4)式知

$$s = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

可见, 此时 t 就是曲线从 t_0 起算的弧长.

由于空间曲线是点在空间运动的轨迹, 所以常把参数 t 理解为时间变量. 于是我们得到 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 代表点的运动速度. (1.4) 式表示点运动经历的弧长. 如选用弧长为参数, 则 $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$. 所以把以弧长为参数表示的曲线常称为单位速率曲线.

选取弧长作为曲线的参数的好处是曲线上每一点的切向量都是单位向量. 这会给分析和讨论一些理论问题带来方便. 不过从参数 t 变换到 s 不是简单的变数直接变换, 而必须找出函数关系 $s = s(t)$ 及 $t = t(s)$. 这一点不总是容易做到的. 大多数实际情况下, 难以写出变换的解析式.

1.1.2 空间曲线的重要几何量

以下的讨论假定曲线具有三阶连续导数.

1. 曲线的曲率

设曲线 C 的表示式为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 这里 s 为弧长参数. 由前节的讨论知, $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 是曲线的单位切向量, 记为 $\hat{\mathbf{t}}$, 即

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'(s)$$

下面考查 $\hat{\mathbf{t}}(s)$ 随 s 的变代. 如图 1.4 所示, 曲线在 s 处的切向量 $\hat{\mathbf{t}}(s)$ 与 $s + \Delta s$ 处的切向量 $\hat{\mathbf{t}}(s + \Delta s)$ 间的夹角为 $\Delta\theta$, 显然

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{t}}'(s)| &= \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{t}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{t}}(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\hat{\mathbf{t}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{t}}(s)|}{|\Delta s|} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} / \Delta s \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \end{aligned}$$

上式说明 $|\hat{t}'(s)|$ 表征了曲线的切矢量相对于弧长的转动速度, 此值的大小也代表了曲线的弯曲程度。因此我们把 $|\hat{t}'(s)|$ 定义为曲线在 s 处的曲率, 用 $k(s)$ 表示, 即

$$k(s) = |\hat{t}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \quad (1.6)$$

如果 $k(s) \neq 0$, 则将其倒数 $\rho(s) = 1/k(s)$ 称为曲线在 s 处的曲率半径。

我们把 $\hat{t}'(s)$ (假定它为非零矢量) 方向的单位矢量记为 $\hat{n}(s)$, 显然 $\hat{n}$ 与 $\hat{t}$ 是正交的 (单位向量与它的导矢量必正交), 又由图 1.4 看出 $\hat{n}$ 总是指向曲线的凹向。 $\hat{n}(s)$ 被称为曲线在 s 处的主法向单位矢。于是有

$$\hat{t}'(s) = \mathbf{r}''(s) = k(s) \hat{n}(s) \quad (1.7)$$

有时也记为 $\mathbf{k}(s) = k(s) \hat{n}(s)$, 称为曲线的曲率矢量。

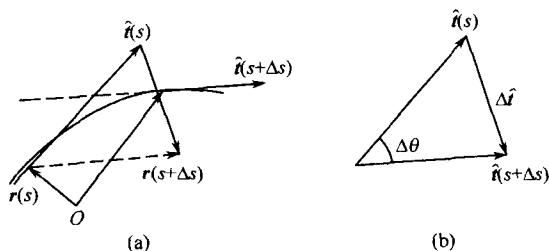


图 1.4 曲线的曲率

曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在 s 点的 $\hat{t}$ 与 $\hat{n}$ 所构成的平面称为曲线在该点处的密切平面 (如图 1.5)。如果密切面上的点用 $\mathbf{p} = (x_1, y_1, z_1)$ 来表示, 则 $\mathbf{p} - \mathbf{r}$ 位于密切面内, 即 $\mathbf{p} - \mathbf{r}$, $\hat{t}$ 和 $\hat{n}$ 三向量共面, 故

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}, \hat{t}, \hat{n}) = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

这就是密切面的方程。

命

$$\hat{b}(s) = \hat{t}(s) \times \hat{n}(s) \quad (1.8)$$

并且称它为曲线在 s 处的从法向单位矢。它是密切面的法线。通过 $\mathbf{r}(s)$ 点, 由 $\hat{t}(s)$ 和 $\hat{b}(s)$ 构成的平面叫从切面, 由 $\hat{n}(s)$ 和 $\hat{b}(s)$ 构成的平面叫法平面。这样, 在曲线上一点就获得了三个互相垂直的基本矢, 它们两两决定三个互相垂直的平面 (见图 1.5)。它们所构成的三棱形称为曲线在该点的基本三棱形。当点沿曲线移动时, 基本三棱形作为一个刚体来运动, 因此又称为动标三棱形。

2. 曲线的挠率

对空间曲线 $\mathbf{r}(s)$, 一般来说, 当 s 变化时, $\hat{\mathbf{b}}(s)$ 也变化, 即密切面的方向在变化。为了描述曲线的密切面的方向随 s 的变化情况, 引入挠率的概念。现在来研究 $\hat{\mathbf{b}}'(s)$ 。因为

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) \cdot \hat{\mathbf{b}}(s) = 0 \quad (\text{单位向量和它的导矢量正交})$$

对 $\hat{\mathbf{b}}(s) \cdot \hat{\mathbf{t}}(s) = 0$ 两边求导, 可得

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) \cdot \hat{\mathbf{t}}(s) = -\hat{\mathbf{b}}(s) \cdot \hat{\mathbf{t}}'(s) = -k(s) \hat{\mathbf{b}}(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s)$$

计及 $\hat{\mathbf{b}}(s) \cdot \hat{\mathbf{n}}(s) = 0$, 得

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) \cdot \hat{\mathbf{t}}(s) = 0$$

因此, $\hat{\mathbf{b}}'(s)$ 必平行于 $\hat{\mathbf{n}}(s)$ 。命

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) = -\tau(s) \hat{\mathbf{n}}(s) \quad (1.9)$$

把由上式所确定的函数 $\tau(s)$ 称为曲线在 s 点的挠率。显然, $|\tau(s)| = |\hat{\mathbf{b}}'(s)|$ 。由图 1.6 看出

$$|\hat{\mathbf{b}}'(s)| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{b}}(s + \Delta s) - \hat{\mathbf{b}}(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$

所以挠率的绝对值表示了曲线的密切面(或从法矢量)随 s 的旋转速率。当 $\hat{\mathbf{b}}'$ 与 $\hat{\mathbf{n}}$ 反向时, $\tau(s) \geq 0$, 且等于 $\left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$, 当 $\hat{\mathbf{b}}'$ 与 $\hat{\mathbf{n}}$ 同向时, $\tau(s) \leq 0$, 且等于 $-\left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$ 。关于挠率正负的几何意义的进一步说明将在本节末叙述。

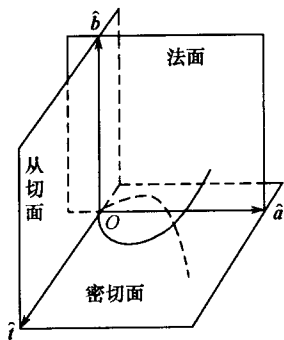


图 1.5 密切平面

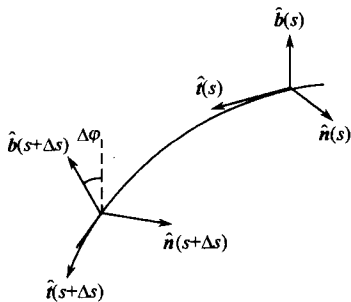


图 1.6 挠率的表示

下面讨论曲线曲率与挠率的计算公式。

当曲线以弧长为参数表示时, 即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)]$$

则曲率为

$$k(s) = |\mathbf{r}''(s)| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \quad (1.10)$$

挠率为

$$\begin{aligned} \tau(s) &= -\hat{\mathbf{b}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{r}''/k)' \\ &= (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''/k) \cdot (\mathbf{r}'''/k + \mathbf{r}''(1/k)') \\ &= (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')/k^2 \\ &= (\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')/|\mathbf{r}''(s)|^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

当曲线用一般参数 t 表示时, 因为

$$\mathbf{r}'(s) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$\mathbf{r}''(s) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2t}{ds^2}$$

$$\text{所以} \quad |\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right| \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right| \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3$$

注意到 $\mathbf{r}'(s)$ 为单位向量, 且 $\mathbf{r}''(s)$ 与 $\mathbf{r}'(s)$ 正交, 则上式左端等于 $|\mathbf{r}''(s)|$, 即曲率, 故有

$$k(t) = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right| / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3 \quad (1.12)$$

用类似的推导可得

$$\tau(t) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \right) / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|^2 \quad (1.13)$$

应该指出曲线的曲率与挠率的计算结果与参数的选择无关。

【例 1.1】 求圆柱螺线

$$\mathbf{r}(s) = (a \cos \omega s, a \sin \omega s, b \omega s)$$

的曲率和挠率, 其中 $a > 0, b \neq 0, \omega = (a^2 + b^2)^{-1/2}$ 均为常数。

从所给的表达式容易验证: $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$ 。所以 s 为弧长参数, 故

$$\hat{\mathbf{t}}(s) = \omega(-a \sin \omega s, a \cos \omega s, b)$$

$$\hat{\mathbf{t}}'(s) = \omega^2 a(-\cos \omega s, -\sin \omega s, 0)$$

由此得 $k(s) = \omega^2 a$, 且 $\hat{\mathbf{n}}(s) = (-\cos \omega s, -\sin \omega s, 0)$

$$\hat{\mathbf{b}}(s) = \hat{\mathbf{t}}(s) \times \hat{\mathbf{n}}(s) = \omega(b \sin \omega s, -b \cos \omega s, a)$$

$$\hat{\mathbf{b}}'(s) = \omega^2 b(\cos \omega s, \sin \omega s, 0)$$

$$= -\omega^2 b \hat{n}(s)$$

故挠率 $\tau(s) = \omega^2 b$ 。计算表明,圆柱螺线的曲率和挠率均为常数。

【例 1.2】 求椭圆

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0) \quad (a > 0, b > 0, \text{均为常数})$$

的曲率和挠率。

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (-a \sin t, b \cos t, 0) \\ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \neq 1 \text{ (除非 } a = b = 1) \end{aligned}$$

因此, t 不是弧长参数,且

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= (-a \cos t, -b \sin t, 0) \\ \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} &= (a \sin t, -b \cos t, 0) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= (0, 0, ab) \end{aligned}$$

于是由(1.12)式和(1.13)式得

$$\begin{aligned} k(t) &= ab / (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2} \\ \tau(t) &= 0 \end{aligned}$$

【例 1.3】 曲率恒等于零的曲线为直线,挠率恒为零的曲线为平面曲线。

若曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的曲率恒等于零,则 $\mathbf{r}''(s) = 0$, 即 $\mathbf{r}'(s) = \text{常矢量 } \mathbf{C}$ 。由此得 $\mathbf{r}(s) = \mathbf{C}s + \mathbf{C}_1$ ($\mathbf{C}_1$ 为常矢量), 这是一个过 $\mathbf{C}_1$ 点且平行于 $\mathbf{C}$ 的直线。

若曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的挠率恒为零,则 $\hat{\mathbf{b}}(s) = \text{常矢量}$ 。于是

$$0 = \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{r}'(s) = [\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{r}(s)]'$$

由此得 $\mathbf{r}(s) \cdot \hat{\mathbf{b}} = \text{const.}$

设 s_0 是曲线上任一点,则由上式可得

$$(\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0)) \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$$

可见 $\mathbf{r}(s)$ 位于通过 s_0 、法线为 $\hat{\mathbf{b}}$ 的平面上,即 $\mathbf{r}(s)$ 是一个平面曲线。

【例 1.4】 若某曲线的所有法面通过定点,则该曲线为球面曲线(即曲线位于球面上)。

不失一般性,可设曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的法面通过原点,则由假定条件知 $\mathbf{r}(s)$ 位于它的法平面上。于是有 $\hat{\mathbf{t}}(s) \cdot \mathbf{r}(s) = 0$, 即 $\mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{r}(s) = 0$ 。从而 $(\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{r}(s))' =$

$2\mathbf{r}'(s) \cdot \mathbf{r}(s) = 0$ 。可见, $|\mathbf{r}(s)|^2 = \text{常数}$ 。故曲线 $\mathbf{r}(s)$ 落在一个球面上。

如果两条曲线 $\mathbf{r}(t)$ 及 $\mathbf{R}(t)$ 的值及其直到 n 阶导数的值在 $t = t_0$ 处相等, 则称这两条曲线在 $t = t_0$ 处是 n 阶接触的。从(1.12)式和(1.13)式看出, 如果两条曲线在 t_0 处是三阶接触的, 则这两条曲线在这一点的曲率和挠率均相等。

1.1.3 曲线在一点邻近的性质

1. Frenet 标架

如前所述, 空间曲线 $\mathbf{r}(s)$ 的每一点都有三个互相正交的单位矢量 $\hat{\mathbf{t}}(s)$, $\hat{\mathbf{n}}(s)$, $\hat{\mathbf{b}}(s)$, 且按 $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}$ 的顺序组成右手关系。以点 $\mathbf{r}(s)$ 为原点, 以 $\hat{\mathbf{t}}(s)$, $\hat{\mathbf{n}}(s)$ 和 $\hat{\mathbf{b}}(s)$ 为坐标轴, 构成一个标架, 用来研究曲线 $\mathbf{r}(s)$ 在一点邻近的性质是方便的。这一标架: $\{\mathbf{r}(s); \hat{\mathbf{t}}(s), \hat{\mathbf{n}}(s), \hat{\mathbf{b}}(s)\}$ 被称为曲线在点 $\mathbf{r}(s)$ 处的 Frenet 标架, 标架随点的移动而变动其位置, 故称活动标架。它是研究空间曲线几何性质的重要工具。由于曲线上每一点都有标架, 故有必要研究相邻两点 $\mathbf{r}(s)$ 、 $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ 处两套标架之间的差别。在 $\Delta s \rightarrow 0$ 时, 就相当于要研究 $\hat{\mathbf{t}}'(s)$, $\hat{\mathbf{n}}'(s)$ 和 $\hat{\mathbf{b}}'(s)$ 。

由(1.7)式和(1.9)式知 $\hat{\mathbf{t}}' = k\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{b}}' = -\tau\hat{\mathbf{n}}$ 。至于 $\hat{\mathbf{n}}'$, 我们可以预先把它表示为上述标架内三个矢量的线性组合, 即

$$\hat{\mathbf{n}}' = (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}})\hat{\mathbf{t}} + (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}}$$

在其中很明显 $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ 。另外由 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$ 得 $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{b}}' = 0$, 即 $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{b}}' = \tau$; 由 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$ 得 $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}}' = 0$, 即 $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}}' = -k$ 。把 $\hat{\mathbf{t}}'$, $\hat{\mathbf{n}}'$, $\hat{\mathbf{b}}'$ 的表示式写在一起, 则为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}' &= k\hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{n}}' &= -k\hat{\mathbf{t}} + \tau\hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{b}}' &= -\tau\hat{\mathbf{n}}\end{aligned}\tag{1.14}$$

也可记为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}' \\ \hat{\mathbf{n}}' \\ \hat{\mathbf{b}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}} \\ \hat{\mathbf{n}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix}\tag{1.15}$$

这就是所谓的 Frenet 公式。由公式看出, 曲线的曲率 k 和挠率 τ 已知后, 邻近点 Frenet 标架之间的变化情况就清楚了。